Carlo Pucci

Su una limitazione per soluzioni di equazioni ellittiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.3, p. 228–233.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_3_228_0>

Su una limitazione per soluzioni di equazioni ellittiche

Nota di CARLO PUCCI (*)

Sunto. - *Si prova una particolare limitazione integrale per le soluzioni di equazioni ellittiche lineari del secondo ordine a coefficienti misurabili in m variabili con secondo membro in L_m.*

Summary. - *We establish a bound of integral type for solutions of $Lu = f$, where L is a linear elliptic operator of the second order in m variables with measurable coefficients and f is of class L_m.*

Si indica con Ω la sfera, dello spazio euclideo R^m, con centro nell'origine e raggio 1; α è una costante, $0 < \alpha \leq \frac{1}{m}$; a_{ij} sono funzioni misurabili in Ω verificanti le condizioni:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ii}(x) = 1, \quad \sum_{i,j}^{1,m} a_{i,j}(x)\lambda_i\lambda_j \geq \alpha \, | \lambda |^2, \quad x \in \Omega, \quad \lambda \in R^m. \tag{1}$$

TEOREMA. - *Sia* $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $f \in L_m(\Omega)$,

$$\sum_{i,j}^{1,m} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega; \tag{2}$$

ne segue

$$\left\| \frac{u(x)}{1 - |x|} \right\|_{L_m(\Omega)} \leq \frac{1}{m\alpha} \left\{ \frac{\alpha}{1 - (m-1)\alpha} \right\}^{\frac{1}{m}} \| f \|_{L_m(\Omega)} . \tag{3}$$

Si noti che la limitazione per u non dipende dalla continuità dei coefficienti a_{ij}. In una precedente ricerca (¹) è provata per u, soddisfacente alle ipotesi del teorema, la seguente limitazione puntuale:

$$| u(x) | \leq k \, \{ 1 - | x | \}^{\frac{1}{m}} \, \| f \|_{L_m(\Omega)}, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo n° 23 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R..

(¹) C. PUCCI: *Limitazioni per soluzioni di equazioni ellittiche* in corso di stampa su « Ann. Mat. pura appl. ».

ove k è una costante dipendente solo da α ed m. La (4) non implica la (3) nè viceversa. Il teorema può essere riformulato in ipotesi più generali per quanto riguarda Ω, l'equazione ellittica e la classe delle soluzioni analogamente a quanto è fatto nel lavoro citato in [1]. Il procedimento per dimostare la (3) è in parte lo stesso di quello seguito per provare la (4) e cioè è fondato su la stessa limitazione dell'hessiano di u in dipendenza di $\|f\|_{L_m(\Omega)}$. La dimostrazione si basa anche su la seguente proprietà delle funzioni convesse [2]:

Sia u convessa in Ω, $u \in C'(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $u = 0$ su $\partial\Omega$; si ha

$$(5) \qquad \left\| \frac{u(x)}{1 - |x|} \right\|_{L_m(\Omega)} \leq [\text{mis } \nabla u(\Omega)]^{\frac{1}{m}} \, [3].$$

Per $\zeta \in \partial\Omega$ sia

$$\mu(\zeta) = \sup \{ \lambda : \max_{x \in \bar{\Omega}} [\Sigma \lambda \zeta_i (x_i - \zeta_i) - u(x)] \geq 0 \}.$$

Notiamo che

$$(6) \qquad \Omega_1 \equiv \{ y : y = \lambda\zeta, \ 0 \leq \lambda < \mu(\zeta), \ \zeta \in \partial\Omega \} \subset \nabla u(\Omega).$$

Infatti se $y \in \Omega_1$ si ha $y = \lambda\zeta$ con $\zeta \in \partial\Omega$ e $\lambda \geq 0$ ed esiste almeno un η in Ω tale che

$$(7) \qquad \max_{x \in \bar{\Omega}} [\sum_{i=1}^{m} \lambda \zeta_i (x_i - \zeta_i) - u(x)] = \sum_{i=1}^{m} \lambda \zeta_i (\eta_i - \zeta_i) - u(\eta) > 0.$$

Siccome $u = 0$ su $\partial\Omega$ e $\sum_{i=1}^{m} \zeta_i \eta_i \leq 1$, η non può essere su $\partial\Omega$. Per la

[2] Una funzione u si dice convessa in Ω se fissato comunque x ed y in Ω si ha $u[tx + (1-t)y] \leq tu(x) + (1-t)u(y)$ per $0 \leq t \leq 1$.

[3] $\nabla u(\Omega)$ è l'insieme dei valori assunti dal gradiente di u in Ω. Si noti che la (5) non può essere migliorata. Infatti fissato μ, $0 < \mu < 1$, esiste un τ, $\tau > 1$, tale che posto $u(x) = |x|^\tau - 1$, risulta u convessa in Ω, $u \in C'(\bar{\Omega})$, $u = 0$ su $\partial\Omega$ e

$$\left\| \frac{u(x)}{1 - |x|} \right\|_{L_m(\Omega)} > \mu \, [\text{mis } \nabla u(\Omega)]^{\frac{1}{m}}.$$

Si osservi che nella (5) il segno di uguaglianza sussiste solo se $u \equiv 0$. La (5) può essere provata anche per funzioni convesse continue in $\bar{\Omega}$, nulle su $\partial\Omega$, senza supporre $u \in C'(\Omega)$ dando una naturale estensione alla definizione di $\nabla u(\Omega)$, precisamente $\nabla u(\Omega) = \Omega_1$ definito dalla (6). In questo caso il segno di uguaglianza sussiste nella (5) solamente per $u(x) = c(1 - |x|)$ con c costante non positiva

(7) si ha anche

$$u(x) - u(\eta) \geq \sum_{i=1}^{m} y_i(x_i - \eta_i),$$

e quindi $\nabla u(\eta) = y$.

Per la definizione di $\mu(\zeta)$

$$\left| \frac{|u(t\zeta)|}{1 - |t\zeta|} \right| \leq \mu(\zeta) \quad \text{per} \quad 0 \leq t < 1,\ \zeta \in \partial\Omega,$$

e la (5) segue dalla (6) e da

$$\int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{1 - |x|} \right|^m dx \leq \frac{1}{m} \int_{\partial\Omega} \mu^m(\zeta) d\sigma = \operatorname{mis} \Omega_1 .$$

Proviamo ora il teorema. Nella classe Γ delle funzioni v continue e convesse in $\overline{\Omega}$ con $v \leq u$ in Ω esiste una $\breve{u}$ tale che

$$\breve{u}(x) \geq v(x) \quad \text{per} \quad x \in \Omega,\ v \in \Gamma;$$

analogamente fra le funzioni v continue in $\overline{\Omega}$ con $-v$ convessa e $v \geq u$ in Ω, esiste una, $\widehat{u}$, più piccola. Le funzioni $\breve{u}$ e $\widehat{u}$ sono di classe $C'(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Poniamo

$$\Omega + \equiv \{ x : x \in \Omega,\ u(x) = \breve{u}(x) \},\ \Omega - \equiv \{ x : x \in \Omega,\ u(x) = \breve{u}(x) \}.$$

Indichiamo con H il determinante hessiano di u e proviamo la seguente utile relazione

$$|H| \leq |f|^m \gamma_\alpha \quad \text{in} \quad \Omega + \quad \text{e in} \quad \Omega -, \tag{8}$$

con

$$\gamma_\alpha = m^{-m} \alpha^{1-m} [1 - (m-1)\alpha]^{-1}. \tag{9}$$

Indichiamo con $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ gli autovalori della matrice hessiana di u, $\mathcal{C}_1 \leq \ldots \leq \mathcal{C}_m$. Per le (1), (2) esistono delle funzioni α_i in Ω tali che

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq \alpha,\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathcal{C}_i = f \ (^4).$$

(4) Vedere C. Pucci *Operatori ellittici estremanti* «Ann. Mat. pura appl.» 1966, pag 144.

In $\Omega+$ le $\mathcal{C}_i$ sono non positive e pertanto

$$\Big|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathcal{C}_i\Big|^m \geq \Big|\alpha\sum_{i=1}^{m-1}\mathcal{C}_i+[1-(m-1)\alpha]\mathcal{C}_m\Big|^m;$$

dalla condizione $\mathcal{C}_i\leq 0$ segue che

$$\gamma_\alpha\Big|\alpha\sum_{i=1}^{m-1}\mathcal{C}_i+[1-(m-1)\alpha]\mathcal{C}_m\Big|^m\leq|\mathcal{C}_1\ldots\mathcal{C}_m|=|H|,$$

e quindi si ha la (8) relativamente ad $\Omega+$; analogamente si prova la (8) in $\Omega-$.

H è lo jacobiano della trasformazione $y=\nabla u(x)$ e quindi

$$\operatorname{mis}\nabla u(\Omega+)\leq\int_{\Omega+}|H|\,dx,\quad \operatorname{mis}\nabla u(\Omega-)\leq\int_{\Omega-}|H|\,dx;$$

si ha inoltre

$$\nabla u(\Omega+)=\nabla\widehat{u}(\Omega+)=\nabla\widehat{u}(\Omega),\quad \nabla u(\Omega-)=\nabla\breve{u}(\Omega-)=\nabla\breve{u}(\Omega),$$

e quindi

$$\operatorname{mis}\nabla\widehat{u}(\Omega+)\leq\gamma_\alpha\int_\Omega|f|^m dx,\quad \operatorname{mis}\nabla\breve{u}(\Omega-)\leq\gamma_\alpha\int_\Omega|f|^m dx.$$

Per la (5)

$$(10)\quad \left\|\frac{\widehat{u}(x)}{1-|x|}\right\|_{L_m(\Omega)}\leq\gamma_\alpha\int_{\Omega+}|f|^m dx,\quad \left\|\frac{\breve{u}(x)}{1-|x|}\right\|_{L_m(\Omega)}\leq\gamma_\alpha\int_{\Omega-}|f|^m dx.$$

Dalla relazione $\breve{u}\leq u\leq\widehat{u}$ in Ω segue quindi

$$\left\|\frac{u(x)}{1-|x|}\right\|^m_{L_m(\Omega)}\leq\left\|\frac{\widehat{u}(x)}{1-|x|}\right\|^m_{L_m(\Omega)}+\left\|\frac{\breve{u}(x)}{1-|x|}\right\|_{L_m(\Omega)}\leq\gamma_\alpha\int_\Omega|f|^m dx.$$

OSSERVAZIONE I. - Notiamo che in $\Omega+$ risulta f non positiva e quindi, posto $2f^-=|f|-f$, dalla (10) segue

$$\left\|\frac{\widehat{u}(x)}{1-|x|}\right\|_{L_m(\Omega)}\leq\gamma_\alpha^{\frac{1}{m}}\|f^-\|_{L_m(\Omega)};$$

analogamente si ottiene

$$\left\|\frac{\breve{u}(x)}{1-|x|}\right\|_{L_m(\Omega)}\leq\gamma_\alpha^{\frac{1}{m}}\|f^+\|_{L_m(\Omega)};$$

si tratta di due limitazioni più forti della (3).

OSSERVAZIONI II. - Nel teorema la ipotesi $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ può essere sostituita dalla ipotesi $u \in H^{2,m}(\Omega)$, ove $H^{2,m}(\Omega)$ è il completamento dello spazio delle funzioni ν:

$$\nu \in C^2(\Omega), \quad \| \nu \|_{H^{2,m}(\Omega)} \equiv \left\{ \int_\Omega (\nu^2 + \sum_{i=1}^{m} \nu_i^2 + \sum_{i,j}^{1,m} \nu_{ij}^2)^{\frac{m}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{m}} < +\infty,$$

completamente effettuato secondo la norma $\| \quad \|_{H^{2,m}(\Omega)}$ (5). Per provare questa estensione basta approssimare u in $H^{2,m}(\Omega)$ con la successione $\{u_n\}$ di funzioni in $C^2(\bar{\Omega})$ nulle su $\partial\Omega$. Siccome le funzioni

$$f_n = \sum_{i,j}^{1,m} a_{ij} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j}$$

convergono ad f in $L_m(\Omega)$, dalla limitazione provata per le u_n segue la (3).

OSSERVAZIONE III. - Sia Γ la classe delle funzioni u con $u \in H^{2,m}(\Omega)$, $u = 0$ su $\partial\Omega$; sia $\mathfrak{L}_\alpha$ la classe degli operatori ellittici

$$L \equiv \sum_{i,j}^{1,m} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

con a_{ij} misurabili in Ω soddisfacenti alla (1). Posto

$$\mu_\alpha = \sup_{\substack{u \in \Gamma \\ L \in \mathfrak{L}_\alpha}} \frac{\left\| \dfrac{u(x)}{1 - |x|} \right\|_{L_m(\Omega)}}{\| Lu \|_{L_m(\Omega)}},$$

si è osservato che

$$\mu_\alpha \leq \gamma_\alpha^{\frac{1}{m}}.$$

Si vuole notare che questa limitazione é quantitativamente accurata. Precisamente

$$\mu_\alpha > \gamma_\alpha^{\frac{1}{m}} \frac{1 - (m-1)\alpha}{1 - (m-2)\alpha}.$$

(5) Una funzione in $H^{2,m}(\Omega)$ può essere prolungata con continuità in $\bar{\Omega}$ ed in questo senso è considerata.

Infatti posto

$$u(x) = 1 - |x|^{1+\frac{\alpha}{1-(m-1)\alpha}}, \quad L = \sum_{i,j}^{1,m}\left[a\delta_{ij} + (1 - m\alpha)\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right]\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

risulta

$$u \in \Gamma, \; L \in \mathfrak{L}_\alpha, \; Lu = -m\alpha\,\frac{1-(m-2)\alpha}{1-(m-1)\alpha}\,|x|^{\frac{\alpha}{1-(m-1)\alpha}-1},$$

$$\| Lu \|_{L_m(\Omega)} = \frac{1-(m-2)\alpha}{1-(m-1)\alpha}\left(\frac{\omega_m}{m}\right)^{\frac{1}{m}}\gamma_\alpha^{-\frac{1}{m}} \text{ (}^{6}\text{)},$$

$$\left\| \frac{u(x)}{1-|x|} \right\|_{L_m(\Omega)} = \omega_m^{\frac{1}{m}}\left[\int_0^1 \left(\frac{1-\varsigma^{1+\frac{\alpha}{1-(m-1)\alpha}}}{1-\varsigma}\right)^m \varsigma^{m-1}\,d\varsigma\right]^{\frac{1}{m}} > \left(\frac{\omega_m}{m}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I.
il 27 giugno 1965

[6] ω_m è l'area della superficie della sfera di raggio 1 in R^m.