Bollettino
Unione Matematica Italiana

Denise Huet

Remarque sur un théorème d'Agmon et applications à quelques problèmes de perturbation singulière.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.3, p. 219–227.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_3_219_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Remarque sur un théorème d'Agmon et applications à quelques problèmes de perturbation singulière

par DENISE HUET (Nancy, France)

Résumé. - *Soient Ω un ouvert très régulier de R^n de frontière Γ et u_ε la solution d'un problème aux limites de la forme: $-\varepsilon A u_\varepsilon + u_\varepsilon = h$ dans Ω, $B_j u_\varepsilon = 0$ sur Γ, $1 \leq j \leq m$ où A est elliptique d'ordre $2m$, $\{B_j\}$ est un système normal qui recouvre A est satisfait à une condition d'Agmon garantissant que l'axe réel > 0 est un rayon de croissance minima pour le résolvent dans $L^p(\Omega)$; A et B_j sont à coefficients très réguliers. On montre que si h est indéfiniment différentiable à support compact dans Ω, $u_\varepsilon \to 0$ plus vite que toute puissance de ε dans un voisinage Γ dans lequel h est nulle.*

1. - Introduction.

Soient Ω un ouvert de $\boldsymbol{R}^l$ de frontière Γ. On considère, lorsque $\varepsilon \to 0$, la solution u_ε, sur Ω, d'un problème aux limites homogène pour l'équation

$$-\varepsilon A u_\varepsilon + u_\varepsilon = h \tag{1.1}$$

où A est un opérateur elliptique et h une fonction donnés.

Dans des travaux antérieurs (D. HUET [5], [6] et [7]) on a vu que, sous des hypothèses convenables, pour h indéfiniment différentiable à support compact dans Ω, on a, pour r entier ≥ 0 (et même r réel ≥ 0)

$$\| u_\varepsilon - h \|_{W_p^r(\Omega)} \leq c\varepsilon \tag{1.2}$$

où les $W_p^r(\Omega)$ sont des espaces de SOBOLEV.

On se propose ici d'étudier de façon plus précise le comportement de u_ε dans un voisinage de Γ dans lequel h est nulle, et de montrer que pour une certaine classe de problèmes aux limites, dans un tel voisinage, « u_ε tend vers 0 » plus vite que toute puissance de ε (théorème 2).

Pour obtenir ce résultat, on utilise une légère généralisation (théorème 1 formule (3.3)) d'une inégalité classique d'AGMON (formule (3.2)). Dans le cas $p = 2$, la formule (3.3) est un cas particulier d'une inégalité oblenue par VISHIK et AGRANOVICH [9] (voir aussi [8]) par une méthode tout à fait différente (¹).

2. - Notations et hypothèses.

Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$ dont la frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est une variété indéfiniment différentiable de dimension $n-1$, Ω étant d'un seul côté de Γ.

On utilise les espaces de SOBOLEV, $W_p^s(\Omega)$, pour s entier ≥ 0 et p réel, avec $1 < p < +\infty$. Rappelons que $W_p^s(\Omega)$ est l'espace de BANACH des fonctions $u \in L_p(\Omega)$, dont les dérivées (au sens des distributions) d'ordre inférieur ou égal à s, sont dans $L_p(\Omega)$, muni de la norme

$$\| u \|_{W_p^s(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq s} \| D^\alpha u \|_{L_p(\Omega)}^p \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

On désigne par $\overset{\circ}{W}{}_p^s(\Omega)$, l'adhérence, dans $W_p^s(\Omega)$, de l'espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω.

On considère l'opérateur différentiel d'ordre $2m$

$$A = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{2.2}$$

On suppose que les coefficients $a_\alpha(x)$ sont dans $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, espace des fonctions indéfiniment différentiables dans l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω, et que A satisfait aux hypothèses:

H_1: A est proprement elliptique dans $\overline{\Omega}$.

H_2: $\dfrac{(-1)^m A_{2m}(x, \xi)}{| A_{2m}(x, \xi) |} \neq 1$ pour tout ξ réel $\neq 0$ et tout $x \in \overline{\Omega}$, avec

$$A_{2m}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \tag{2.3}$$

On introduit en outre m opérateurs frontières

$$B_j = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(x) D^\beta \tag{2.4}$$

d'ordre $m_j \leq 2m - 1$, $j = 1, \ldots, m$, à coefficients $b_{j\beta}$ indéfiniment différentiables sur Γ.

(¹) Voir aussi la remarque finale.

On fait en outre les hypothèses:

H_3: Les opérateurs B_j, $j=1, \ldots, m$ forment un système normal, au sens de ARONSZAJN-MILGRAM [3].

H_4: En tout point $x \in \Gamma$, soit ν la normale à Γ intérieure à Ω, et $\xi \neq 0$ un vecteur tangent à Γ, et soient $t_k^+(x;\, \xi, \nu, \lambda)$ les m racines à parties imaginaires positives du polynôme en t

$$(2.4) \qquad (-1)^m A_{2m}(x;\, \xi + t\nu) - \lambda$$

où λ est un nombre réel ≥ 0 quelconque. Alors les polynômes en t:

$$(2.6) \qquad B_{j,m_j}(x;\, \xi + t\nu) = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}(x)\, (\xi + t\nu)^\beta, \quad j=1, \ldots, m$$

sont linéairement indépendants, modulo le polynôme

$$(2.7) \qquad \prod_{k=1}^{m} (t - t_k^+(x;\, \xi, \nu, \lambda)).$$

On désignera encore par $W_p^{2m}(\Omega;\, \{B_j\}_{j=1}^m)$ le sous-espace de $W_p^{2m}(\Omega)$ des fonctions u qui vérifient $B_j u = 0$ sur Γ pour $j=1, \ldots, m$.

3. - Le théorème d'Agmon (AGMON [3]).

Désignons par A_p l'opérateur non borné de $L_p(\Omega)$ dans $L_p(\Omega)$, de domaine $\mathfrak{D}(A_p) = W_p^{2m}(\Omega;\, \{B_j\}_{j=1}^m)$, défini par

$$(3.1) \qquad A_p u = Au \quad \text{pour} \quad u \in \mathfrak{D}(A_p).$$

On a alors le

THEOREME D'AGMON. - Sous les hypothèser H_1, H_2, H_3, H_4, le spectre de A_p est discret et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour $\lambda \geq \lambda_0$, $(-A_p + \lambda I)$ soit inversible et tel que

$$(3.2) \qquad \sum_{j=0}^{2m} \lambda^{1-\frac{j}{2m}} \| u \|_{W_p^j(\Omega)} \leq c_1 \| -A_p u + \lambda u \|_{L_p(\Omega)}$$

pour tout $u \in W_p^{2m}(\Omega;\, \{B_j\}_{j=1}^m)$.

Il est alors facile d'en déduire, par une adaption de la démonstration donnée par AGMON dans [1], de

THEORÈME 1. - Sous les hypothèses du théorème d'AGMON, pour k entier > 0, il existe λ_1, dépendant de k, $\geq \lambda_0$ tel que, pour $\lambda \geq \lambda_1$:

$$(3.2) \qquad \sum_{j=0}^{2m+k} \lambda^{1-\frac{j}{2m}} \| u \|_{W_p^j(\Omega)} \leq c_2 \sum_{j=0}^{k} \lambda^{-\frac{j}{2m}} \| -A_p u + \lambda u \|_{W_p^j(\Omega)}$$

pour tout $u \in W_p^{2m+k}(\Omega) \cap W_p^{2m}(\Omega\,;\ \{B_j\}_{j=1}^m)$. Notons que la constante c_2 dépend de k.

Démonstration. - Désignons par Σ le domaine cylindrique formé des points (x, t) avec $x \in \Omega$, $-\infty < t < +\infty$. Il résulte des hypothèses H_1 à H_4 que l'opérateur

$$\mathcal{L} = A - (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}} \tag{3.4}$$

est proprement elliptique dans $\overline{\Sigma}$ et que les opérateurs B_j, $j=1, \dots, m$ recouvrent $\mathcal{L}$ sur la frontiére de Σ.

En appliquant les inégalités à priori d'Agmon-Douglis-Nirenberg [2], on obtient

$$\| v \|_{W_p^{2m+k}(\Sigma)} \leq c_3 \{ \| \mathcal{L} v \|_{W_p^k(\Sigma)} + \| v \|_{L_p(\Sigma)} \} \tag{3.5}$$

pour toute fonction $v(x, t) \in W_p^{2m+k}(\Sigma)$, $\equiv 0$ pour $|t| \geq 1$, et satisfaisant, sur la frontière de Σ, aux conditions aux limites

$$B_j v = 0 \qquad j = 1, \dots, m. \tag{3.6}$$

Soit $\zeta(t)$ une fonction fixe, indéfiniment différentiable, $0 \leq \zeta(t) \leq 1$, $\zeta(t) \equiv 0$ pour $|t| \geq 1$ et $\equiv 1$ pour $|t| \leq \frac{1}{2}$, et soit μ un nombre réel.

Désignons par Σ_r la partie de Σ dans $|t| < r$. Si

$$u \in W_p^{2m+k}(\Omega) \cap W_p^{m}(\Omega\,;\ \{B_j\}_{j=1}^m),$$

on peut appliquer (3.5) à

$$v_\mu(x, t) = \zeta(t) e^{i\mu t} u(x) \tag{3.7}$$

ce qui donne

$$\| v_\mu \|_{W_p^{2m+k}(\Sigma_1)} \leq c_3 \{ \| \mathcal{L} v_\mu \|_{W_p^k(\Sigma_1)} + \| v_\mu \|_{L_p(\Sigma_1)} \}. \tag{3.8}$$

Notons tout d'abord qu'on a, pour k entier ≥ 0, et $u \in W_p^k(\Omega)$:

$$\| \zeta(t) e^{i\mu t} u(x) \|_{W_p^k(\Sigma_1)} \leq c_4 \sum_{s=0}^{k} |\mu|^{k-s} \| u \|_{W_p^s(\Omega)} \tag{3.8}$$

ainsi qu'une inégalité analogue lorsqu'on remplace $\zeta(t)$ par l'une de ses dérivées.

Or

$$\begin{aligned} \mathcal{L} v_\mu = {} & \zeta(t) e^{i\mu t}(Au - \mu^{2m} u) - \\ & - (-1)^m \left(\sum_{\alpha=0}^{2m-1} \binom{2m}{\alpha} (i\mu)^\alpha D^{2m-\alpha}[\zeta(t)] \right) e^{i\mu t} u(x). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Par suite

$$(3.11) \quad \| u e^{i\mu t} \|_{W_p^{2m+k}(\Sigma_{\frac{1}{2}})} = \| v_\mu \|_{W_p^{2m+k}(\Sigma_{\frac{1}{2}})} \leq \| v_\mu \|_{W_p^{2m+k}(\Sigma_1)} \leq$$

$$\leq c_3 \{ \| \zeta(t) e^{i\mu t}(Au - \mu^{2m} u) \|_{W_p^k(\Sigma_1)} +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{2m-1} \binom{2m}{\alpha} | \mu |^\alpha \| D^{2m-\alpha} [\zeta(t)] e^{i\mu t} u \|_{W_p^k(\Sigma_1)} + \| v_\mu \|_{L_p(\Sigma_1)} \}.$$

On en déduit facilement, en tenant compte de (3.9):

$$(3.12) \quad \| u e^{i\mu t} \|_{W_p^{2m+k}(\Sigma_1)} \leq c_5 \{ \sum_{s=0}^{k} | \mu |^{k-s} \| Au - \mu^{2m} u \|_{W_p^s(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{2m+k-1} | \mu |^{2m-1+k-s} \| u \|_{W_p^s(\Omega)} \}.$$

Mais on a, pour tout $j \leq 2m + k$

$$(3.13) \quad \| u e^{i\mu t} \|_{W_p^{2m+k}(\Sigma_{\frac{1}{2}})} \geq | \mu |^{2m+k-j} \| u \|_{W_p^j(\Omega)}$$

et par suite

$$(3.14) \quad \sum_{j=0}^{2m+k} | \mu |^{2m+k-j} \| u \|_{W_p^j(\Omega)} \leq$$

$$\leq (2m + k + 1) c_5 \left\{ \sum_{s=0}^{k} | \mu |^{k-s} \| Au - \mu^{2m} u \|_{W_p^s(\Omega)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{| \mu |} \sum_{s=0}^{2m+k-1} | \mu |^{2m+k-s} \| u \|_{W_p^s(\Omega)} \right\}.$$

Toutes les constantes c_i introduites, dépendent de k.

Alors, si $| \mu_1 | = 2(2m + k + 1)c_5$, pour $\lambda \geq \lambda_1 = \operatorname{Sup}(\lambda_0, | \mu_1 |^{2m})$, on a (3.3) ce qui démontre le théorème.

Posons $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$. Alors, sous les hypothèses du théorème d'AGMON, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour $\varepsilon > \varepsilon_0$, $-\varepsilon A_p + I$ soit inversible et tel que

$$(3.15) \quad \sum_{j=0}^{2m} \varepsilon^{\frac{j}{2m}} \| u \|_{W_p^j(\Omega)} \leq c_1 \| -\varepsilon A_p u + u \|_{L_p(\Omega)}$$

pour tout $u \in W_p^{2m}(\Omega; \{B_j\}_{j=1}^m)$.

Et on déduit du théorème 1, le

COROLLAIRE 1. - Sous les hypothèses H_1, H_2, H_3, H_4, pour k

entier ≥ 0, il existe $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ (dépendant de k) tel que, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1$

$$\sum_{j=0}^{2m+k} \varepsilon^{\frac{j}{2m}} \| u \|_{W_p^j(\Omega)} \leq c_2 \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^{\frac{j}{2m}} \| -\varepsilon A_p u + u \|_{W_p^j(\Omega)}$$

pour tout $u \in W_p^{2m+k} \cap W_p^{2m}(\Omega\,;\, \{B_j\}_{j=1}^{m})$.

4. - Applications aux perturbations singulières.

Nous reprenons l'opérateur A, défini par (2.2) et satisfaisant aux hypothèses H_1 et H_2 et nous prenons comme opérateurs frontières

$$B_j = \frac{\partial^{s+j-1}}{\partial \nu^{s+j-1}} \quad \text{(dérivée normale d'ordre } s+j-1) \tag{4.1}$$

où s est un nombre fixé avec $0 \leq s \leq m$, $j = 1, \ldots, m$. L'hypothèse H_3 est alors satisfaite, et, comme ces opérateurs déterminent un problème aux limites absolument elliptique au sens de HÖRMANDER [4], il en est de même de H_4. Remarquons que, pour $s = 0$, on retrouve les conditions de DIRICHLET at $W_p^{2m}(\Omega\,;\, \{B_j\}_{j=1}^{m}) = W_p^{2m}(\Omega) \cap \mathring{W}_p^{m}(\Omega)$.

Soit $h \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Soit, pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, $u_\varepsilon \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ la solution de

$$-\varepsilon A u_\varepsilon + u_\varepsilon = h. \tag{4.2}$$

$$B_j u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.3}$$

On sait déjà, d'aprés D. HUET [5] que, pour k entier ≥ 0, on a

$$\| u_\varepsilon - h \|_{W_p^k(\Omega)} \leq c\varepsilon. \tag{4.4}$$

On va montrer le

THÉOREME 2. - Soit $h \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Considérons un système de cartes locales d'un voisinage de Γ dans lequel h est nulle. Sous les hypothèses H_1 et H_2, soit, pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, la solution u_ε de (4.2) et (4.3), où les B_j sont donnés par (4.1). Alors, pour toute carte locale U du système, et tout entier $r \geq 0$, $u_\varepsilon \to 0$ dans $W_p^r(U)$. plus vite que toute puissance de ε, quand $\varepsilon \to 0$.

DÉMONSTRATION. - U est l'intersection avec Ω d'un ouvert 0 tel qu'il existe un difféomorphisme Φ de 0 sur le pavé $P = \{x \in \boldsymbol{R}^n;\ 0 < x_i < 1$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, et $|x_n| < 1\}$ appliquant U sur $P^+ = \{x \in P;\ x_n > 0\}$ et $0 \cap \Gamma$ sur $P^0 = \{x \in P;\ x_n = 0\}$.

Soient $\tilde{A}$ [resp. $\tilde{u}_\varepsilon$] l'image par Φ de la restriction à U de A [resp. u_ε]. Alors $\tilde{u}_\varepsilon$ satisfait à

$$(4.5)\qquad -\varepsilon\tilde{A}\tilde{u}_\varepsilon+\tilde{u}_\varepsilon=0 \quad \text{dans} \quad P^+.$$

$$(4.6)\qquad \frac{\partial^{s+j-1}\tilde{u}_\varepsilon}{\partial x_n^{s+j-1}}=0 \quad \text{dans} \quad P^0$$

et, en outre, d'après (4.4), on a, pour k entier ≥ 0

$$(4.7)\qquad \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_p^k(U)}\leq c\varepsilon .$$

Pour $0<\delta<\frac{1}{2}$, posons

$$(4.8)\quad P_\delta=\{x\in \boldsymbol{R}^n;\ \delta<x_i<1-\delta \text{ pour } i=1,\ldots,n-1, \text{ et } |x_n|<1-\delta\}$$
$$P_\delta^+=\{x\in P_\delta;\ x_n>0\} \quad \text{et} \quad P_\delta^0=\{x\in P_\delta;\ x_n=0\}.$$

Nous poserons d'autre part $x=(x', x_n)$ avec $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$.

Soient, pour $0<\delta_1<\delta<\frac{1}{2}$, $\alpha_{\delta,\delta_1}(x')$ une fonction indéfiniment différentiable dans $\boldsymbol{R}^{n-1}$, $\equiv 1$ pour $\delta\leq x_i\leq 1-\delta$, $i=1,\ldots,n-1$ et $\equiv 0$ pour $x_i\leq\frac{\delta+\delta_1}{2} x_i\geq 1-\left(\frac{\delta+\delta_1}{2}\right)$, $i=1,\ldots.n-1$, et $\beta_{\delta,\delta_1}(x_n)$ une fonction indéfiniment différentiable, $\equiv 1$ pour $|x_n|\leq 1-\delta$ et $\equiv 0$ pour $|x_n|\geq\left(1-\frac{\delta+\delta_1}{2}\right)$.

Alors

$$(4.9)\qquad \varphi_{\delta,\delta_1}(x)=\alpha_{\delta,\delta_1}(x')\beta_{\delta,\delta_1}(x_n)$$

est indéfiniment différentiable dans $\boldsymbol{R}^n$, $\equiv 1$ dans $\bar{P}_\delta$ et $\equiv 0$ dans un voisinage de la frontière ∂P_{δ_1} de P_{δ_1}. En outre

$$(4.10)\qquad \frac{\partial^r\varphi_{\delta,\delta_1}}{\partial x_n^r}=\alpha(x')\beta^{(r)}(x_n)\equiv 0 \quad \text{dans} \quad P^0$$

pour tout $r>0$.

Considérons $\varphi_{\delta,\delta_1}\tilde{u}_\varepsilon$. D'après (4.5) on a

$$(4.11)\qquad -\varepsilon\tilde{A}(\varphi_{\delta,\delta_1}\tilde{u}_\varepsilon)+(\varphi_{\delta,\delta_1}\tilde{u}_\varepsilon)=\varepsilon\tilde{A}_1\tilde{u}_\varepsilon) \quad \text{dans} \quad P^+$$

où $\tilde{A}_1$ est un opérateur différentiel d'ordre $2m-1$, à coefficients indéfiniment différentiables à support dans P_{δ_1}. En outre, les conditions (4.6) impliquent, en vertu de (4.10) et de la définition de $\varphi_{\delta,\delta_1}$:

$$\frac{\partial^{s+j-1}}{\partial x_n^{s+j-1}}(\varphi_{\delta,\delta_1}u_\varepsilon) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial P^+. \tag{4.12}$$

$$j = 1, \ldots, m.$$

On peut appliquer le corollaire 1 dans P^+ à $\tilde{A}$ agissant sur $\varphi_{\delta,\delta_1}\tilde{u}_\delta$: pour k entier ≥ 0, existe ε_1 (dépendant de k) tel que, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, on ait

$$\sum_{j=0}^{2m+k} \varepsilon^{\frac{j}{2m}} \| \varphi_{\delta,\delta_1} u_\varepsilon \|_{W_p^j(P^+)} \leq C_1 \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^{1+\frac{j}{2m}} \| \tilde{A}_1 \tilde{u}_\varepsilon \|_{W_p^j(P^+)}. \tag{4.13}$$

On déduit que, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{2m+k} \varepsilon^{\frac{s}{2m}} \| \tilde{u}_\varepsilon \|_{W_p^s(P_\delta^+)} &= \sum_{s=0}^{2m+k} \varepsilon^{\frac{s}{2m}} \| \varphi_{\delta,\delta_1} \tilde{u}_\varepsilon \|_{W_p^s(P_\delta^+)} \\
&\leq \sum_{s=0}^{2m+k} \varepsilon^{\frac{s}{2m}} \| \varphi_{\delta,\delta_1} \tilde{u}_\varepsilon \|_{W_p^s(P^+)} \\
&\leq C_1 \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^{1+\frac{j}{2m}} \| \tilde{A}_1 \tilde{u}_\varepsilon \|_{W_p^j(P^+)} = C_1 \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^{1+\frac{j}{2m}} \| \tilde{A}_1 \tilde{u}_\varepsilon \|_{W_p^j(P_{\delta_1}^+)} \\
&\leq C_2 \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^{1+\frac{j}{2m}} \| \tilde{u}_\varepsilon \|_{W_p^{2m+j-1}(P_{\delta_1}^+)}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

où C_2 est indépendante de ε, mais dépend de $\varphi_{\delta,\delta_1}$.

On va en déduire le

LEMME 1. - Pour tout k entier ≥ 0, il existe $\varepsilon_2 > 0$ (dépendant de k) tel que, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ et $0 \leq s \leq 2m + k$, on ait:

$$\| \tilde{u}_\varepsilon \|_{W_p^s(P_\delta^+)} \leq C_3 \varepsilon^{2+\frac{k}{2m}-\frac{s}{2m}}. \tag{4.15}$$

Le théerème 2 en résulte immédiatement.

La démonstration du lemme 1 se fait par récurrence sur k. Il est vrai pour $k = 0$ d'après (4.7) et (4.14). Supposons le démontré jasqu'à l'ordre k. D'après (4.14), il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ et pour $0 \leq s \leq 2m + k + 1$, on ait:

$$\varepsilon^{\frac{s}{2m}} \| \tilde{u}_\varepsilon \|_{W_p^s(P_\delta^+)} \leq C_4 \sum_{j=0}^{k+1} \varepsilon^{1+\frac{j}{2m}} \| \tilde{u} \|_{W_p^{2m+j-1}(P_{\delta_1}^+)}. \tag{4.16}$$

Mais d'après l'hypothèse de récurrence. en existe ε_2 tel que, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_2$, $0 \leq j \leq k + 1$, on ait:

$$\| \tilde{u}_\varepsilon \|_{W_p^{2m+j-1}(P_{\delta_1}^+)} \leq C_5 \varepsilon^{1+\frac{k+1}{2m}-\frac{j}{2m}}. \tag{4.17}$$

Par suite, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_3 = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et $0 \leq s \leq 2m + k + 1$, on a:

$$\varepsilon^{\frac{s}{2m}} \| \tilde{u}_\varepsilon \|_{W_p^s(P_\delta^+)} \leq C_4 \varepsilon^{2 + \frac{k+1}{2m}} \quad \text{C.Q.F.D.} \tag{4.18}$$

REMARQUE [2]. – On peut démontrer le théorème 2 autrement. Tout d'abord, on remarque qu'il suffit de faire la démonstration dans $W_2^r(U)$, le théorème de SOBOLEV permettant alors de passer à $W_p^r(U)$.

Pour la démonstration dans $W_2^r(U)$ on peut utiliser l'inégalité de VISHIK–AGRANOVICH, signalée dans l'introduction, et valable pour des problèmes aux limites homogènes ou non. Il n'est alors plus nécessaire d'imposer à $\varphi_{\delta,\delta_1}$ des conditions aussi restrictives entrainant (4.11). Et on voit alors facilement que cette nouvelle démonstration s'étend aux problèmes aux limites généraux introduits au n. 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON, *On the eigenfinctions and on the engenvalues of general elliptic boundary value problems,* Communications on Pure and Applied Mathematics XV, 1962, pp. 119-147.

[2] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions,* I, Comm. on pure App Math. XII, 1959, pp. 623-727.

[3] N. ARONSZAJN, A. N. MILGRAM, *Differential aperators on Riémannian manifolds,* Rend. Cuc. Mat. Palermo, 2, 1952, pp. 1-61.

[4] HÖRMANDER, *On the regularity of lhe solutions of boundary problems,* Acta Math. vol. 99, 1958, pp. 225-264.

[5] D. HUET, *Perturbations singulieres,* Notes aux comp. Rend. Ac. Sc. Paris, t. 258, pp. 6320-6322, 1964 et t. 259, pp, 4213 4215, 1965.

[6] — —, *Sur quelques problèmes de perturbation singulière dans les espaces L_p,* à paraitre dans la Revue de la Faculté des Sciences de Lisbonne.

[7] — —, *Perturbations singulières dans les espaces L_p,* exposé au Séminaire Schwartz-Lions, 1964-1965.

[8] — —, Seminaire Schwartz-Lions 1965-1966 exposés du memoire ci-dessous de Vishik-Agranovich.

[9] M. I. VISHIK, M. S. AGRANOVICH, *Elliptic problemems with a parameter and parabolic problems of general type,* Uspehi Mat. Nauk 19 (1964) pp. 53-155 et Russian Math. Surveys J. London Math. 19 (1964) pp. 53-159.

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 27 settembre 1965

[2] Ajoutée en juillet 1966.