BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

EMILIA SCRUCCA

Sul comportamento asintotico delle soluzioni di una classe di equazioni del secondo ordine non lineari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.2, p. 168–173.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_2_168_0>

Sul comportamento asintotico delle soluzioni di una classe di equazioni del secondo ordine non lineari.

EMILIA SCRUCCA (Firenze) (*)

Sommario. - *Si studia il comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni del tipo* $\ddot{x} + p(t)f(\dot{x}) + q(t)g(x) = 0$, *e si ottengono criteri di limitatezza e di monotonia che estendono risultati di altri Autori.*

Summary. - *The asymptotic behaviour of certain second order differential equations is investigated. Two boundedness and monotony theorems, that generalize known results in the linear case, are given.*

1. - Il presente lavoro è dedicato allo studio del comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni differenziali del tipo

$$\ddot{x} + p(t)f(\dot{x}) + q(t)g(x) = 0 \tag{1}$$

Numerose ricerche hanno avuto per oggetto, anche recentemente, lo studio di particolari equazioni che possono farsi rientrare nella (1).

Ad esempio, per l'equazione lineare:

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} - q^2x = 0 \qquad (q \text{ costante reale}), \tag{2}$$

H. HOCHSTADT [2] [1], generalizzando un risultato di A. L. RUITZ [4], relativo al caso della periodicità della funzione $p(t)$, ha provato che, se $p(t)$ è limitata in futuro, esistono soluzioni della (2) non limitate, e quelle limitate tendono asintoticamente alla soluzione nulla; viceversa, per l'equazione:

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q^2x = 0 \tag{3}$$

sotto la condizione che la funzione $p(t)$ sia non negativa e limitata, è dimostrata la limitatezza in futuro di tutte le soluzioni.

Per l'equazione binomia non lineare:

$$\ddot{y} + q(t)f(y) = 0 \tag{4}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 11 del Comitato per la Matematica del C. N. R.

[1] I numeri in parentesi quadra si riferiscono all'elenco bibliografico posto alla fine del lavoro.

YU. A. KOKLOV [3] (cfr. anche P. WALTMAN [5]), estendendo un noto risultato di R. BELLMAN [1], ha inoltre stabilito un criterio di limitatezza in futuro delle soluzioni nelle ipotesi:

i) $q(t)$ *continua e dotata di derivata prima continua,*

ii) $q(t)$ *positiva non decrescente,*

iii) $\lim\limits_{|y|\to\infty} \int_0^y f(u)du = +\infty.$

Nel presente lavoro ci proponiamo di estendere tali risultati al caso della equazione (1), ottenendo in particolare criteri di limitatezza che contengono quelli ora citati per le equazioni (2), (3) e (4).

2. - Supporremo che nell'equazione (1) $p(t)$, $q(t)$, $f(u)$, $g(x)$ siano funzioni continue dei loro argomenti, ovunque definite; supporremo inoltre che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(5) $p(t)$ *non negativa,*

(6) $q(t)$ *positiva non decrescente, dotata di derivata prima continua,*

(7) $uf(u) \geq 0$,

(8) $\lim\limits_{|x|\to\infty} \int_0^x g(s)ds = +\infty.$

Cominciamo con l'osservare che, fissata una generica soluzione $x = v(t)$ dell'equazione (1), e posto

$$G(v(t)) = \int_0^{v(t)} g(s)ds, \tag{9}$$

esisterà, per la (8), almeno un valore v_0 di $v(t)$ in corrispondenza del quale la (9) assume il suo minimo assoluto.

La funzione

$$u(t) = v(t) + v_0 \tag{10}$$

verifica l'equazione differenziale

$$\ddot{u} + p(t)f(\dot{u}) + q(t)g(u + v_0) = 0: \tag{11}$$

inoltre, per tutti i valori di t per i quali $v(t)$ (e quindi $u(t)$) risulta definita, segue subito dalla (9):

$$H(u(t)) = \int_0^{u(t)} g(s + v_0)ds = G(u(t) + v_0) - G(v_0) \geq 0. \tag{12}$$

Ciò posto, moltiplicando l'equazione (11) per $\dot{u}(t)$ ed integrando, si ottiene:

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2(t) + \int_{t_0}^{t} p(s)f(\dot{u}(s))\dot{u}(s)ds + \int_{t_0}^{t} q(s)g(u(s) + v_0)\dot{u}(s)ds = \frac{1}{2}\dot{u}^2(t_0), \tag{13}$$

da cui, tenendo conto della (5) e della (7) ed integrando per parti:

$$p(t)H(u(t)) - \int_{t_0}^{t} \dot{q}(s)H(u(s))ds \leq c, \tag{14}$$

ove si è posto $c = \frac{1}{2}\dot{u}^2(t_0) + q(t_0)H(u(t_0))$.

Dalla (14), in virtù della (6), si ha allora

$$q(t)H(u(t)) \leq c + \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{q}(s)}{q(s)} q(s)H(u(s))ds,$$

e da qui, applicando un noto lemma di GRONWALL (cfr. ad es. R. BELMAN [1]) segue

$$q(t)H(u(t)) \leq cq(t)/q(t_0),$$

ovvero

$$H(u(t)) = G(u(t) + v_0) - G(v_0) \leq c/q(t_0).$$

E ciò implica, per la (8), la limitatezza di $u(t)$, e quindi di $v(t)$. Si ha dunque il

TEOREMA 1. – *Se le funzioni* $p(t)$, $q(t)$, $f(u)$, $g(x)$ *sono ovunque definite e continue, e se inoltre sono soddisfatte le condizioni* (5), (6), (7), (8), *tutte le soluzioni dell'equazione* (1) *sono limitate in futuro.*

3. – Si verifica facilmente che il precedente teorema generalizza i criteri richiamati al n. 1 sia per l'equazione (3) che per l'equazione (4). Si osservi tuttavia che dal procedimento dimostrativo usato, mentre segue la limitatezza in futuro delle soluzioni della (1), non segue in generale quella delle loro derivate.

D'altra parte ciò può facilmente ottenersi aggiungendo ad esempio alle ipotesi del TEOREMA 1 quella della limitatezza in futuro della funzione $p(t)$ (ipotesi che è verificata nel caso della equazione (3)).

Ed infatti dalla (13), ponendo $|H(u(t))| < L$, si ottiene

$$\frac{1}{2}\dot{v}^2(t) = \frac{1}{2}\dot{u}^2(t) < c - q(t)H(u(t)) + L(q(t) - q(t_0)).$$

4. - Poniamo adesso nella (1) $f(\dot{x}) = \dot{x}$; consideriamo cioè l'equazione

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)g(x) = 0. \tag{15}$$

Ferme restando le ipotesi del Teorema (1) sulla continuità delle funzioni $p(t)$, $q(t)$, $g(x)$, supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\left|\int_0^t p(s)\,ds\right| = |P(t)| \leq K < +\infty, \tag{16}$$

$$q(t) \leq -c < 0, \tag{17}$$

$$xg(x) > 0 \ \ per \ \ x \neq 0. \tag{18}$$

Cominciamo col provare che nessuna soluzione della (15) può presentare più di uno zero. Supponiamo infatti per assurdo che una tale soluzione (non nulla) $x = v(t)$ presenti nei punti $t = a$ e $t = b$ due zeri consecutivi, e sia $v(t) > 0$ nell'intervallo (a, b).

Dovrà esistere in (a, b) un punto t_0 di massimo relativo per $v(t)$, ma dalla (15) si avrebbe

$$\ddot{v}(t_0) = -q(t_0)g(v(t_0)) > 0$$

e si cade in assurdo.

Analoga conclusione si ha supponendo $v(t) < 0$ in (a, b), e ne segue quindi l'esistenza di un valore T di t a partire dal quale la funzione $v(t)$ conserva sempre lo stesso segno.

Ancora dalla (15) si ha facilmente che la funzione $\dot{v}(t)$ può annullarsi una volta al più nell'intervallo (T, ∞).

Esisterà pertanto un conveniente valore $t_0 \geq T$ a partire dal quale $v(t)$ e la sua derivata prima conservano sempre lo stesso segno.

Ciò posto, sono a priori possibili quattro casi, a seconda che per $t > t_0$ si abbia $v(t) > 0$, $\dot{v}(t) > 0$; $v(t) > 0$, $\dot{v}(t) < 0$; $v(t) < 0$, $\dot{v}(t) > 0$; $v(t) < 0$, $\dot{v}(t) < 0$.

Moltiplicando la (15) per $expP(t)$ ed integrando, abbiamo:

$$e^{P(t)}\dot{v}(t) = e^{P(t_0)}\dot{v}(t_0) - \int_{to}^{t} q(s)e^{P(s)}g(v(s))ds. \tag{19}$$

Nel primo e nel quarto caso si ha allora

$$\dot{v}(t) \geq L > 0, \; \dot{v}(t) \leq - L' < 0,$$

con L e L' opportune costanti positive, e ne segue rispettivamente

$$\lim v(t) = + \infty, \; \lim v(t) = - \infty.$$

Nel secondo caso, per le ipotesi fatte, dalla (19) si ha

$$e^{P(t)} \mid \dot{v}(t_0) \mid < - \int_{to}^{t} q(s)e^{P(s)}g(v(s))ds,$$

e poichè tale disuguaglianza deve valere per ogni $t > t_0$, necessariamente dovrà aversi

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = 0.$$

Ad analoga conclusione si perviene anche nel terzo caso. E si ha pertanto il

TEORENA 2. - *Se nell'equazione* (15) *le funzioni* $p(t)$, $q(t)$, $g(x)$, *sono ovunque definite e continue, e se inoltre sono soddisfatte le ipotesi* (16), (17) e (18), *le eventuali soluzioni limitate diverse dalla nulla tendono asintoticamente alla soluzione nulla.*

Tale risultato generalizza quello richiamato al n. 1 per l'equazione (2).

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BELLMAN, *Stability Theory of Differential Equations*, New York (1963).

[2] H. HOCHSTADT, *On the stability of certain second order differential equations*, J. ind. appl. Math., 12 (1964), 58-59.

[3] YU. A. KLOKOV, *Some theorems on boundedness of solutions of ordinary differential equations* (in russo), Usp. Mat. Nauk, 13 (1958), n. 2 (80), 189-194. Cfr. anche Am. Math. Soc. Transl., 2, 18 (1961), 289-295.

[4] A. L. RUITZ, *Unstable characteristics of a class of functions defined by a linear differential equation with periodic coefficients*, J. ind. appl. Math., 11 (1963), 148-158.

[5] P. WALTMAN, *Some properties of equations of* $\ddot{u} + a(t)f(u) = 0$, Monatsh. für Math., 67 (1963), 50-54.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 20 maggio 1966