Mario Pezzana

Trasformazioni puntuali fra due S_3 a configurazione caratteristica quasi armonica. Nota I.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.2, p. 161–167.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_2_161_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

Trasformazioni puntuali fra due S_3 a configurazione caratteristica quasi armonica

NOTA I

MARIO PEZZANA (*)

Summary: - *It is studied a particular type of transformations between ordinary projective spaces whose caracteristic directions are distinct and are forming a configuration which is called almost harmonical. One comes to find the equations of a remarkable type of them, constituted of only two transformations and of their inverse.*

1. – Dirò che in un S_3 sette rette uscenti da un punto presentano una configurazione quasi armonica se, intersecate con un piano non passante per il loro punto comune, le loro tracce godono delle seguenti proprietà: ne esistono tre vertici di un triangolo $\triangle$, una quarta E non appartenente ad alcun lato, le altre tre (che dirò *principali*), appartenenti ciascuna ad un lato di $\triangle$, sono i coniugati armonici, dopo le altre due tracce che appartengono allo stesso lato, dell'intersezione del lato stesso con la congiungente di E con il terzo vertice di $\triangle$. Si osservi che le tracce principali devono essere pure allineate.

Si osservi anche che la configurazione descritta coincide con la seguente:

a) tre tracce sono allineate e sono quelle che ho già chiamato principali;

b) associando ad ognuna di queste una delle quattro rimanenti, ciascuna coppia individua un lato di un trilatero che gode delle due seguenti proprietà: 1° le congiungenti ogni vertice con la seconda traccia di ciascun lato passano per uno stesso punto che è la settima traccia; 2° la coppia di tracce di ogni lato separa armonicamente la coppia dei vertici che giacciono su di esso. Si osservi che si hanno ancora in definitiva quattro terne di tracce allineate.

Chiamo quasi armonica tale configurazione per analogia con la configurazione armonica definita per un S_3 da L. MURACCHINI

(*) Il presente lavoro è stato eseguito nell'ambito dell'attività del 26° Gruppo di Ricerca del Consiglio Nazionale della Matematica del C.N.R.

e per un S_n, con n qualunque, in una mia precedente Nota ([1]). Anche la definizione di configurazione quasi armonica è ovviamente estensibile ad S_n con $n > 3$ qualsiasi.

In questa Nota mi propongo di studiare le trasformazioni puntuali di due regioni regolari di S_3 per cui la configurazione delle rette caratteristiche è quasi armonica in ogni coppia di punti corrispondenti.

Dimostrerò (n. 3) che in generale questi tipi di trasformazioni non hanno congruenze di curve caratteristiche che siano rette e neppure sistemi di superficie caratteristiche anche se *tutte possiedono quattro sistemi di faccette caratteristiche.*

Tuttavia *esiste un sottotipo di esse che ha al massimo due sistemi, tra i quattro di faccette caratteristiche, che si organizzano in superficie caratteristiche* (n. 4). Inoltre *se il sistema di faccette che si organizzano è quello corrispondente alle tracce principali, il sistema è unico e in entrambe le regioni corrispondenti è un fascio di piani* (n. 5).

In quest'ultimo caso il sistema differenziale che dà le trasformazioni é completamente integrabile e si può integrare elementarmente. Eseguendo tale integrazione si vede che le trasformazioni di questo tipo si riducono a due sole con le loro inverse, a meno di omografie. Di tali trasformazioni si determinano le equazioni (n. 5).

2. - Il metodo che userò è quello del riferimento mobile ([2]).

Detta A, B una coppia regolare di punti corrispondenti, e A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3, coppie di punti che si corrispondono in una omografia tangente alla trasformazione in A, B, si ponga

$$\begin{aligned} dA &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 \\ dA_i &= \omega_{i0}A + \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2 + \omega_{i3}A_3 \\ dB &= \tau_{00}B + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3 \\ dB_i &= \tau_{i0}B + \tau_{i1}B_1 + \tau_{i2}B_2 + \tau_{i3}B_3 . \end{aligned} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

(1) L. MURACCHINI, *Trasformazioni puntuali fra due spazi a configurazione caratteristica armonica*, « Boll. Un. Mat. Ital. » (3)8, pp. 144-152 (1953). M. PEZZANA, *Trasformazioni puntuali fra due S_n a configurazione caratteristica armonica*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3) 10, pp. 344-350 (1965).

(2) Per i procedimenti seguiti qui e nel seguito si veda ad es: E. ČECH, *Géométrie Projective différentielle des corrispondances entre deux espaces*, I, II, III. « Cas. pro Pest. Mat. a Fys », 74, 75, pp. 32-48, 123-136, 137-157 (1950).

Affinchè la configurazione caratteristica sia del tipo voluto, si potrà imporre che le sette direzioni caratteristiche siano:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0;\ \omega_2 = \omega_3 = 0;\ \omega_3 = \omega_1 = 0;\ \omega_1 = \omega_2 = \omega_3;$$
$$-\omega_1 = \omega_2,\ \omega_3 = 0;\ -\omega_2 = \omega_3,\ \omega_1 = 0;\ -\omega_3 = \omega_1,\ \omega_2 = 0.$$

Si ha allora $\Omega_i = 2\rho\omega_i(\omega_{i+1} - \omega_{i+2})$; per $i = 2$, $i + 2 = 1$; per $i = 3$, $i + 1 = 1$, $i + 2 = 2$.

Differenziando esternamente le differenze $\tau_{ij} - \omega_{ij}$ che sono individuate dalle Ω_i si vede che ρ è un invariante relativo.

Perciò, escludendo le omografie, si può scrivere:

$$\Omega_i = 2\omega_i(\omega_{i+1} - \omega_{i+2}).$$

Supponendo che l'omografia tangente sia quella locale, si ha

$$\tau_{00} - \omega_{00} = 0. \tag{1}$$

Ricordando che $\tau_{ii} - \omega_{ii} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\Omega_i}{\partial\omega_i}$, $\tau_{ri} - \omega_{ri} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\Omega_i}{\partial\omega_r}$, si otterrà allora:

$$\begin{array}{lll}
\tau_{11} - \omega_{11} = \omega_2 - \omega_3 & \tau_{22} - \omega_{22} = \omega_3 - \omega_1 & \tau_{33} - \omega_{33} = \omega_1 - \omega_2 \\
\tau_{12} - \omega_{12} = -\omega_2 & \tau_{23} - \omega_{23} = -\omega_3 & \tau_{31} - \omega_{31} = -\omega_1 \\
\tau_{21} - \omega_{21} = \omega_1 & \tau_{32} - \omega_{32} = \omega_2 & \tau_{13} - \omega_{13} = \omega_3 .
\end{array} \tag{2}$$

Per differenziazione esterna della (1) si ottiene

$$\begin{aligned}
\tau_{10} - \omega_{10} &= \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3 \\
\tau_{20} - \omega_{20} &= \alpha_2\omega_1 + \alpha_4\omega_2 + \alpha_5\omega_3 \\
\tau_{30} - \omega_{30} &= \alpha_3\omega_1 + \alpha_5\omega_2 + \alpha_6\omega_3 .
\end{aligned} \tag{3}$$

Per differenziazione delle (2) tenendo conto delle (3) si ha

$$\begin{aligned}
&2\omega_{12} - 2\omega_{13} = (\beta^1_1 - \alpha_1)\omega_1 + (\beta^1_2 - \alpha_2 + 1)\omega_2 + (\beta^1_3 - \alpha_3 + 1)\omega_3 \\
&2\omega_{23} - 2\omega_{21} = (\beta^2_2 - \alpha_2 + 1)\omega_1 + (\beta^2_4 - \alpha_4)\omega_2 + (\beta^2_5 - \alpha_5 + 1)\omega_3 \\
&2\omega_{31} - 2\omega_{32} = (\beta^3_3 - \alpha_3 + 1)\omega_1 + (\beta^3_5 - \alpha_5 + 1)\omega_2 + (\beta^3_6 - \alpha_6)\omega_3 \\
&\omega_{22} - \omega_{00} + \omega_{21} - \omega_{23} = \beta^1_2\omega_1 + \beta^1_4\omega_2 + \beta^1_5\omega_3 \\
&\omega_{33} - \omega_{00} + \omega_{32} - \omega_{31} = \beta^2_3\omega_1 + \beta^2_5\omega_2 + \beta^2_6\omega_3
\end{aligned} \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_{11} - \omega_{00} + \omega_{13} - \omega_{12} = \beta^3_1\omega_1 + \beta^3_2\omega_2 + \beta^3_3\omega_3\\
&- \omega_{33} + \omega_{00} - \omega_{31} + \omega_{32} = \beta^1_3\omega_1 + \beta^1_5\omega_2 + \beta^1_6\omega_3\\
&- \omega_{11} + \omega_{00} - \omega_{12} + \omega_{13} = \beta^2_1\omega_1 + \beta^2_2\omega_2 + \beta^2_3\omega_3\\
&- \omega_{22} + \omega_{00} - \omega_{23} + \omega_{21} = \beta^3_2\omega_1 + \beta^3_4\omega_2 + \beta^3_5\omega_3\\
&\omega_{22} - \omega_{00} + \omega_{21} - \omega_{23} = (\gamma^1_1 - \alpha_2)\omega_1 + (\gamma^1_2 - \alpha_4 + 1)\omega_2 + (\gamma^1_3 - \alpha_5 - 3)\omega_3\\
&\omega_{33} - \omega_{00} + \omega_{32} - \omega_{31} = (\gamma^2_2 - \alpha_3 - 3)\omega_1 + (\gamma^2_4 - \alpha_5)\omega_2 + (\gamma^2_5 - \alpha_6 + 1)\omega_3\\
&\omega_{11} - \omega_{00} + \omega_{13} - \omega_{12} = (\gamma^3_3 - \alpha_1 + 1)\omega_1 + (\gamma^3_5 - \alpha_2 - 3)\omega_2 + (\gamma^3_6 - \alpha_3)\omega_3\\
&2\omega_{21} = \gamma^1_2\omega_1 + \gamma^1_4\omega_2 + \gamma^1_5\omega_3\\
&2\omega_{32} = \gamma^2_3\omega_1 + \gamma^2_5\omega_2 + \gamma^2_6\omega_3\\
&2\omega_{13} = \gamma^3_1\omega_1 + \gamma^3_2\omega_2 + \gamma^3_3\omega_3\\
&2\omega_{31} - 2\omega_{21} = \gamma^1_3\omega_1 + \gamma^1_5\omega_2 + \gamma^1_6\omega_3\\
&2\omega_{12} - 2\omega_{32} = \gamma^2_1\omega_1 + \gamma^2_2\omega_2 + \gamma^2_3\omega_3\\
&2\omega_{23} - 2\omega_{13} = \gamma^3_2\omega_1 + \gamma^3_4\omega_2 + \gamma^3_5\omega_3\\
&- \omega_{33} + \omega_{00} - \omega_{31} + \omega_{32} = (\delta^1_1 - \alpha_3)\omega_1 + (\delta^1_2 - \alpha_5 - 3)\omega_2 + (\delta^1_3 - \alpha_6 + 1)\omega_3\\
&- \omega_{11} + \omega_{00} - \omega_{12} + \omega_{13} = (\delta^2_2 - \alpha_1 + 1)\omega_1 + (\delta^2_4 - \alpha_2)\omega_2 + (\delta^2_5 - \alpha_3 - 3)\omega_3\\
&- \omega_{22} + \omega_{00} - \omega_{23} + \omega_{21} = (\delta^3_3 - \alpha_2 - 3)\omega_1 + (\delta^3_5 - \alpha_4 + 1)\omega_2 + (\delta^3_6 - \alpha_5)\omega_3\\
&2\omega_{31} - 2\omega_{21} = \delta^1_2\omega_1 + \delta^1_4\omega_2 + \delta^1_5\omega_3\\
&2\omega_{12} - 2\omega_{32} = \delta^2_3\omega_1 + \delta^2_5\omega_2 + \delta^2_6\omega_3\\
&2\omega_{23} - 2\omega_{13} = \delta^3_1\omega_1 + \delta^3_2\omega_2 + \delta^3_3\omega_3\\
&- 2\omega_{31} = \delta^1_3\omega_1 + \delta^1_5\omega_2 + \delta^1_6\omega_3\\
&- 2\omega_{12} = \delta^2_1\omega_1 + \delta^2_2\omega_2 + \delta^2_3\omega_3\\
&- 2\omega_{23} = \delta^3_2\omega_1 + \delta^3_4\omega_2 = \delta^3_5\omega_3 .
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Osservando che le (2) danno le relazioni

$$
\begin{aligned}
&\tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13} - \omega_{11} - \omega_{12} - \omega_{13} = 0\\
&\tau_{21} + \tau_{22} + \tau_{23} - \omega_{21} - \omega_{22} - \omega_{23} = 0\\
&\tau_{31} + \tau_{32} + \tau_{33} - \omega_{31} - \omega_{32} - \omega_{33} = 0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

per differenziazione esterna si ha

$$\tau_{10} + \tau_{20} + \tau_{30} - \omega_{10} - \omega_{20} - \omega_{30} = \sigma(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3). \tag{6}$$

La (6), tenendo conto che per le (4) si ha $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_6$, dà $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5$.

In definitiva, cambiando opportunatamente le notazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}
\omega_{12} &= -\frac{1}{2}[(-\lambda_1 - \lambda_3 - \mu_3 + \nu_1 + 4)\omega_1 - (\mu_1 + \mu_3)\omega_2 - \\
&\qquad - (\mu_2 - \lambda_1 - \lambda_3 - \mu_3 + \nu_1 + 4)\omega_3] \\
\omega_{23} &= -\frac{1}{2}[-(\nu_2 - \mu_1 - \mu_3 - \nu_3 + \lambda_1 + 4)\omega_1 + \\
&\qquad + (-\mu_1 - \mu_3 - \nu_3 + \lambda_1 + 4)\omega_2 - (\nu_1 + \nu_3)\omega_3] \\
\omega_{31} &= -\frac{1}{2}[-(\lambda_1 + \lambda_3)\omega_1 - (\lambda_2 - \nu_1 - \nu_3 - \lambda_3 + \mu_1 + 4)\omega_2 + \\
&\qquad + (-\nu_1 - \nu_3 - \lambda_3 + \mu_1 + 4)\omega_3] \\
\omega_{21} &= \frac{1}{2}[\lambda_1\omega_1 + (-\nu_1 - \nu_3 - \lambda_3 + \mu_1 + 4)\omega_2 + \lambda_2\omega_3] \\
\omega_{32} &= \frac{1}{2}[\mu_2\omega_1 + \mu_1\omega_2 + (-\lambda_1 - \lambda_3 - \mu_3 + \nu_1 + 4)\omega_3] \\
\omega_{13} &= \frac{1}{2}[(-\mu_1 - \mu_3 - \nu_3 + \lambda_1 + 4)\omega_1 + \nu_2\omega_2 + \nu_1\omega_3] \\
\omega_{11} - \omega_{00} &= \frac{1}{2}[(\mu_1 + \mu_3 + \nu_1)\omega_1 + (\mu_1 + \mu_3 - \nu_2 + 2\nu_3 - 2\alpha - 6)\omega_2 + \\
&\qquad + (\lambda_1 + \lambda_3 - \mu_2 - \mu_3 + 2\alpha + 2)\omega_3] \\
\omega_{22} - \omega_{00} &= \frac{1}{2}[(\mu_1 + \mu_3 - \nu_2 - \nu_3 + 2\alpha + 2)\omega_1 + (\nu_1 + \nu_3 + \lambda_1)\omega_2 + \\
&\qquad + (\nu_1 + \nu_3 - \lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\alpha - 6)\omega_3] \\
\omega_{33} - \omega_{00} &= \frac{1}{2}[(\lambda_1 + \lambda_3 - \mu_2 + 2\mu_3 - 2\alpha - 6)\omega_1 + \\
&\qquad + (\nu_1 + \nu_3 - \lambda_2 - \lambda_3 + 2\alpha + 2)\omega_2 + (\lambda_1 + \lambda_3 + \mu_1)\omega_3] \\
\omega_{00} &= -\frac{1}{8}[(\lambda_1 + \lambda_3 + 2\mu_1 - \mu_2 + 4\mu_3 + \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 - 4)\omega_1 + \\
&\qquad + (\mu_1 + \mu_3 + 2\nu_1 - \nu_2 + 4\nu_3 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - 4)\omega_2 + \\
&\qquad + (\nu_1 + \nu_3 + 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 + \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - 4)\omega_3]
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{10} - \omega_{10} &= \frac{1}{2}(\lambda_3 + \mu_3 + \nu_3 - 6)\omega_1 + \alpha\omega_2 + \alpha\omega_3 \\
\tau_{20} - \omega_{20} &= \alpha\omega_1 + \frac{1}{2}(\lambda_3 + \mu_3 + \nu_3 - 6)\omega_2 + \alpha\omega_3 \\
\tau_{30} - \omega_{30} &= \alpha\omega_1 + \alpha\omega_2 + \frac{1}{2}(\lambda_3 + \mu_3 + \nu_3 - 6)\omega_3
\end{aligned} \tag{8}$$

Ora, per differenziazione di ω_{21}, ω_{32}, ω_{13} si vede che si può porre $\lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = 0$.

Perciò le (7) divengono

$$\omega_{12} = -\frac{1}{2}[(-\lambda_3 - \mu_3 + 4)\omega_1 - \mu_3\omega_2 - (\mu_2 - \lambda_3 - \mu_3 + 4)\omega_3]$$

$$\omega_{23} = -\frac{1}{2}[-(\nu_2 - \mu_3 - \nu_3 + 4)\omega_1 + (-\mu_3 - \nu_3 + 4)\omega_2 - \nu_3\omega_3]$$

$$\omega_{31} = -\frac{1}{2}[-\lambda_3\omega_1 - (\lambda_2 - \lambda_3 - \nu_2 + 4)\omega_2 + (-\lambda_3 - \nu_3 + 4)\omega_3]$$

$$\omega_{21} = \frac{1}{2}[(-\nu_3 - \lambda_3 + 4)\omega_2 + \lambda_2\omega_3]$$

$$\omega_{32} = \frac{1}{2}[\mu_2\omega_1 + (-\lambda_3 - \mu_3 + 4)\omega_3]$$

$$\omega_{13} = \frac{1}{2}[(-\mu_3 - \nu_3 + 4)\omega_1 + \nu_2\omega_2] \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\omega_{00} = -\frac{1}{8}[&(\lambda_3 - \mu_2 + 4\mu_3 - \nu_2 - \nu_3 - 4)\omega_1 + (\mu_3 - \nu_2 + 4\nu_3 - \lambda_2 - \lambda_3 - 4)\omega_2 + \\ &+ (\nu_3 - \lambda_2 + 4\lambda_3 - \mu_2 - \mu_3 - 4)\omega_3]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{11} = -\frac{1}{8}[&(\lambda_3 - \mu_2 - \nu_2 - \nu_3 - 4)\omega_1 + \\ &+ (-3\mu_3 + 3\nu_2 - 4\nu_3 - \lambda_2 - \lambda_3 + 8\alpha + 20)\omega_2 + \\ &+ (\nu_3 - \lambda_2 + 3\mu_2 + 3\mu_3 - 8\alpha - 12)\omega_3]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{22} = -\frac{1}{8}[&(\lambda_3 - \mu_2 + 3\nu_2 + 3\nu_3 - 8\alpha - 12)\omega_1 + \\ &+ (\mu_3 - \nu_2 - \lambda_2 - \lambda_3 - 4)\omega_2 + (-3\nu_3 + 3\lambda_2 - 4\lambda_3 - \mu_2 - \mu_3 + 8\alpha + 20)\omega_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{33} = -\frac{1}{8}[&(-3\lambda_3 + 3\mu_2 - 4\mu_3 - \nu_2 - \nu_3 + 8\alpha + 20)\omega_1 + \\ &+ (\mu_3 - \nu_2 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 - 8\alpha - 12)\omega_2 + (\nu_3 - \lambda_2 - \mu_2 - \mu_3 - 4)\omega_3].\end{aligned}$$

Ancora per differenziazione delle (5) si ottiene

$$\lambda_2 = 3\lambda_3 - 3\nu_3 - 2 \qquad \mu_2 = 3\mu_3 - 3\lambda_3 - 2 \qquad \nu_2 = 3\nu_3 - 3\mu_3 - 2 \tag{10}$$

e $\alpha = \frac{1}{2}(\lambda_3 + \mu_3 + \nu_3 - 6)$.

Perciò posto $\lambda_3 = \lambda$, $\mu_3 = \mu$, $\nu_3 = \nu$, si ha

$$\omega_{00} = \frac{1}{2}[(\nu - \lambda - \mu)\omega_1 + (\lambda - \mu - \nu)\omega_2 + (\mu - \nu - \lambda)\omega_3]$$

$$\omega_{11} = \frac{1}{2}[(\nu - \lambda)\omega_1 + (2\mu - 3\nu + 2)\omega_2 + (4\lambda - 3\mu - 2)\omega_3]$$

$$\omega_{22} = \frac{1}{2}[(4\mu - 3\nu - 2)\omega_1 + (\lambda - \mu)\omega_2 + (2\nu - 3\lambda + 2)\omega_3]$$

$$\omega_{33} = \frac{1}{2}[(2\lambda - 3\mu + 2)\omega_1 + (4\nu - 3\lambda - 2)\omega_2 + (\mu - \nu)\omega_3]$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{2}[(\lambda + \mu - 4)\omega_1 + \mu\omega_2 + 2(\mu - 2\lambda + 1)\omega_3]$$

$$\omega_{23} = \frac{1}{2}[2(\nu - 2\mu + 1)\omega_1 + (\mu + \nu - 4)\omega_2 + \nu\omega_3]$$

$$\omega_{31} = \frac{1}{2}[\lambda\omega_1 + 2(\lambda - 2\nu + 1)\omega_2 + (\nu + \lambda - 4)\omega_3] \tag{11}$$

$$\omega_{21} = \frac{1}{2}[-(\nu + \lambda - 4)\omega_2 + (3\lambda - 3\nu - 2)\omega_3$$

$$\omega_{32} = \frac{1}{2}[(3\mu - 3\lambda - 2)\omega_1 - (\lambda + \mu - 4)\omega_3]$$

$$\omega_{13} = \frac{1}{2}[-(\mu + \nu - 4)\omega_1 + (3\nu - 3\mu - 2)\omega_2]$$

$$\tau_{10} - \omega_{10} = \tau_{20} - \omega_{20} = \tau_{30} - \omega_{30} = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \nu - 6)(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3).$$

Dalle (11) si ha inoltre

$$\omega_{11} + \omega_{12} + \omega_{13} = \omega_{21} + \omega_{22} + \omega_{23} = \omega_{31} + \omega_{32} + \omega_{33} = 0. \tag{12}$$

Le (12), tenendo conto delle (5), danno anche

$$\tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13} = \tau_{21} + \tau_{22} + \tau_{23} = \tau_{31} + \tau_{32} + \tau_{33} = 0. \tag{13}$$

Differenziando esternamente le ultime delle (11) e le (12) si ottiene infine

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \omega_{30} = \rho(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3). \tag{14}$$

Restano così determinate tutte le ω_{ik} con il minimo numero di invarianti.

---

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U.M.I.
il 22 Aprile 1966