Bollettino Unione Matematica Italiana

Oscar Montaldo

Un'osservazione sulle equazioni paraboliche elementari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.2, p. 155–160.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_2_155_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

Un' osservazione sulle equazioni paraboliche elementari.

OSCAR MONTALDO (Cagliari) (*)

Sunto. - *Si dimostra che il teorema di positività per le soluzioni, in senso ordinario, del problema* $(D_x^{2n} + (-1)^n D_y) u = 0$ *in* $0 < x < 1, 0 < y \leq a$, $u/_{x,o} = f(x) \geq 0$, $D_x^{2i} u/_{o,y} = D_x^{2i} u/_{1,y} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *vale solo per* $n = 1$.

Summary. - *Let* $u(x,y)$ *be, for a sufficiently smooth function* $f(x)$, *the ordinary solution of the problem* $D_y u = (-1)^{n+1} D_x^{2n} u$ *in* $0 < x < 1$, $0 < y \leq a$, $u/_{x,o} = f(x)$, $D_x^{2i} u/_{o,x} = D_x^{2i} u/_{1,y} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. *Then we have that* $f(x) \geq 0$ *in* $[0,1] \Rightarrow u(x,y) \geq 0$ *in* $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq a$ *only for* $n = 1$.

Introduzione. – Sulle equazioni di ordine superiore, ellittiche o paraboliche, pochi sono i criteri noti di dipendenza monotona della soluzione dai dati e difficilmente si possono estendere ad esse le dimostrazioni che si fanno abitualmente per il caso delle equazioni del 2° ordine.

Per esempio, sarebbe di grande interesse trovare per equazioni di ordine superiore teoremi di positività analoghi a quelli che si hanno per le equazioni di LAPLACE e quella del calore, teoremi che, come si sa, sono ricchi di conseguenze.

Per quanto riguarda l'equazione del calore si ha, come è ben noto, che, se esiste in senso ordinario la soluzione $u(x,y)$ del problema

$$(1) \quad \begin{cases} (D_x^2 - D_y) u = 0 & \text{in} \quad 0 < x < 1, 0 < y \leq a \\ u/_{o,y} = u/_{1,y} = 0 & \text{per} \quad 0 \leq y \leq a \\ u/_{x,o} = f(x) & \text{"} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

e se $f(x) \geq 0$ in $[0,1]$, allora $u(x,y) \geq 0$ in $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq a$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerche matematiche N. 31 del C. N. R.

Consideriamo ora l'equazione

$$L(u) = (D_x^{2n} + (-1)^n D_y) = 0$$

e il problema

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} L(u) = 0 & \text{in} \quad 0 < x < 1,\ 0 < y \leq a \\ D_x^{2i} u/_{0,y} = D_x^{2i} u/_{1,y} = 0 & \text{per} \quad 0 \leq y \leq a,\ i = 0,1,\dots,n-1 \\ u/_{x,0} = f(x) & \text{,,} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

che rappresentano per $n > 1$ la più naturale estensione dell'equazione del calore e del problema (1).

Se si cerca di estendere all'equazione $L(u) = 0$ la classica teoria dell'equazione del calore (per estensione in questo senso vedansi [1], [2], [3], [4]) s'incontra la difficoltà che non si sa se valga o meno per le soluzioni di $L(u) = 0$ un teorema di massimo e minimo analogo a quello valido per le soluzioni dell'equazione del calore.

Non ci sembra pertanto privo di interesse mostrare in questa Nota che la soluzione di (2) per $n > 1$ (supposta esistente in senso ordinario) non soddisfa al teorema di positività valido per $n = 1$; mostrare cioè, che l'ipotesi $f(x) \geq 0$ in $[0,1]$ non implica, per $n > 1$, che la soluzione di (2) sia non negativa in $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq a$.

Il risultato si ottiene semplicemente attraverso un accurato esame della soluzione esplicita di (2) con l'uso della formula asintotica di Pólya ([5]) che si adopera nelle distribuzioni di probabilità di Cauchy.

1. - Sia $f(x) \in C^{2n-1}(0,1)$ con $f^{(2i)}(0) = f^{(2i)}(1) = 0, i = 0,1,\dots,n-1$. La soluzione di (2) può allora essere rappresentata nella forma

$$\text{(3)} \qquad u(x,y) = \sum_{1}^{\infty}{}_h\, c_h \exp\,[-(h\pi)^{2n} y]\ \sin\,(h\pi x)$$

con

$$c_h = 2\int_0^1 f(\xi)\ \sin\,(h\pi\xi)\, d\xi$$

e

$$\sum_{1}^{\infty}{}_h\, c_h\ \sin\,(h\pi x) = f(x)\ .$$

La (3) si può scrivere, per l'ipotesi fatta sulla $f(x)$, e per $y > 0$:

$$u(x,y) = 2\int_0^1 f(\xi)\,(\sum_1^\infty{}_h \exp[-(h\pi)^{2n}y]\sin(h\pi x)\sin(h\pi\xi))\,d\xi =$$

$$= \int_0^1 f(\xi)\,\{\sum_1^\infty{}_h \exp[-(h\pi)^{2n}y]\,[\cos h\pi(x-\xi) - \cos h\pi(x+\xi)]\}\,d\xi =$$

$$= \int_0^1 K(x, q; \xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

dove

(4) $$K(x, q; \xi) = \frac{1}{2}\left[\theta_{2n}\left(\frac{x-\xi}{2}, q\right) - \theta_{2n}\left(\frac{x+\xi}{2}, q\right)\right]$$

con

$$\theta_{2n}(X, q) = 1 + 2\sum_1^\infty{}_k q^{k^{2n}} \cos(2k\pi X)\ ,$$

$$q = \exp(-\pi^{2n}y).$$

Posto

$$F_{2n}(t) = \int_0^\infty \exp(-s^{2n}) \cos st\,ds,$$

si ha, per la formula asintotica di PÓLYA:

(5) $$\theta_{2n}(X, q) \sim |\log q|^{-1/2n} \cdot F_{2n}(2\pi X / |\log q|^{1/2n}) \sim$$

$$|\log q|^{-1/2n}\, C(2\pi X / |\log q|^{1/2n})^{-\nu}\,.$$

$$\exp(-\lambda(2\pi X / |\log q|^{1/2n})^k)\,.$$

$$\cos(\mu(2\pi X / |\log q|^{1/2n})^k + \pi\nu/2)$$

(C, λ, μ, ν, k dipendono da n ed è $\lambda > 0$, $\mu \neq 0$, $k > 0$, $C \neq 0$, per $n > 1$) per $q \to 1, x$ fisso. La formula asintotica $\sim$ si riferise a un errore o $(|\log q|^{-1/2n}\, C(2\pi X / |\log q|^{1/2n})^{-\nu} \exp(-\lambda(2\pi X / |\log q|^{1/2n})^k)$ valido uniformemente per $\varepsilon < X < 1-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, (vedasi [5], formule (2), (8), (9), Appendix 1).

Dalle (4) e (5) discende

$$K(x,q;\xi) \sim \frac{1}{\pi y^{1/2n}} C\left(\frac{x-\xi}{y^{1/2n}}\right)^{-\nu} \cdot \exp\left(-\lambda\left(\frac{x-\xi}{y^{1/2n}}\right)^{k}\right) \cos\left(\mu\left(\frac{x-\xi}{y^{1/2u}}\right)^{k} + \pi\nu/2\right)$$
$$-\frac{1}{\pi y^{1/2n}} C\left(\frac{x+\xi}{y^{1/2n}}\right)^{-\nu} \cdot \exp\left(-\lambda\left(\frac{x+\xi}{y^{1/2n}}\right)^{k}\right) \cdot \cos\left(\mu\left(\frac{x+\xi}{y^{1/2n}}\right)^{k} + \pi\nu/2\right)$$

uniformemente in un intorno di (x,ξ) per $y \to 0^+$.

Dunque

$$K(x,q;\xi) = \frac{1}{\pi y^{1/2n}} C\left(\frac{x-\xi}{y^{1\,2n}}\right)^{-\nu} \exp\left(-\lambda\left(\frac{x-\xi}{y^{1/2n}}\right)^{k}\right) \cdot$$
$$\cdot \left[\cos\left(\mu\left(\frac{x-\xi}{y^{1/2n}}\right)^{k} + \pi\nu/2\right) + o(1)\right]$$

e quando $y \to 0^+$, il cos (..), poichè $k > 0$, assume i valori $+1$ e -1 infinite volte.

In particolare, preso $0 < \xi_0 < x_0 < 1$, si può trovare y_0 piccolo a piacere tale che

$$C \cos\left(\mu\left(\frac{x_0-\xi_0}{y_0^{1/2n}}\right)^{k} + \pi\nu/2\right) = -1\,. \tag{6}$$

Sia $I_\varepsilon = (\,|x-x_0| < \varepsilon\, |\xi-\xi_0| < \varepsilon,\, |y-y_0| < \varepsilon)$ un intorno di $(x,\xi,y) = (x_0,\xi_0,y_0)$, $0 < \xi_0 < x_0 < 1$ con y_0 piccolo quanto si vuole tale che $C \cos (\ldots) < 0$.

Prendiamo $\qquad \xi_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} < x_0 < 1\,.$

Allora per la (6) esiste y_0 piccolo a piacere ed esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$K(x,y;\xi) < 0$$

in $I_{\varepsilon_0}: |x-x_0| \leq \varepsilon_0, |y-y_0| \leq \varepsilon_0, |\xi - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon_0$.

Sia $K \leq -m$, $m > 0$, in I_{ε_0}. Allora se $f \geq 0$ in $[0,1]$ e $|x-x_0| \leq \varepsilon_0, |y-y_0| \leq \varepsilon_0$, si ha

$$u(x,y) = \int_0^1 f(\xi)\, K(x,y;\xi)\, d\xi \leq$$

$$\leq -m \int_{1/2-\varepsilon_0}^{1/2+\varepsilon_0} f(\xi)\, d\xi + M\left(\int_0^1 f(\xi)\, d\xi - \int_{1/2-\varepsilon_0}^{1/2+\varepsilon_0} f(\xi)\, d\xi\right)$$

dove

$$M = \max_{|y - y_0| \leq \varepsilon_0} |K| .$$

Prendiamo ora

$$f(\xi) = [4\xi(1 - \xi)]^s$$

con $s \geq 2n$; f è ≥ 0 in $[0,1]$ e soddisfa alle condizioni prescritte.

Si ha

$$[4\xi(1 - \xi)]^s \leq (1 - 4\varepsilon_0^2)^s$$

per $|\xi - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon_0$;

$$\int_{1/2 - \varepsilon_0}^{1/2 + \varepsilon_0} [4\xi(1 - \xi)]^s d\xi = 2\int_{1/2}^{1/2+\varepsilon_0} [4\xi(1 - \xi)]^s d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{1-4\varepsilon_0^2}^{1} t^s(1 - t)^{-1/2} dt \geq \int_{1-4\varepsilon_0^2}^{1} t^s dt =$$

$$= \frac{1}{2(s+1)}[1 - (1 - 4\varepsilon_0^2)^{s+1}] > \varepsilon_0^2/s$$

avendo posto

$$\xi = \frac{1 + (1 - t)^{1/2}}{2} .$$

Dunque

$$u(x, y) \leq -\varepsilon_0^2 m/s + M(1 - 4\varepsilon_0^2)^s$$

e preso s sufficientemente grande si ha

$$u(x,y) < 0 \qquad \text{in} \qquad |x - x_0| < \varepsilon_0, \; |y - y_0| < \varepsilon_0$$

per

$$f(\xi) = [4\xi(1 - \xi)]^s .$$

Questo qualunque sia $x_0 > \frac{1}{2}$, $y_0 = y_0(x_0)$, $s \geq s(x_0)$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0)$.

Dunque, per simmetria, la condizione $x_0 > \frac{1}{2}$ può essere eliminata, possiamo dire che se $x_i \neq \frac{1}{2}$, $0 < x_i < 1$, $i = 0,1,\ldots,k$, e se

$s \geq s(x_0, x_1, \dots, x_k)$, allora preso $f = [4\xi(1-\xi)]^s$, si può garantire che

$$u(x, y) < 0$$

per $(x, y) = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$, con $y_i = y_i(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Osservazione. - Per $n = 1$ la formula (5) diventa

$$\theta_2(X, q) \sim \frac{1}{(\pi^8 y)^{1/2}} \exp\left(-X^2/y\right) \qquad \left(F_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-t^2/_4\right)\right)$$

e, tenuta presente la (4) con $n = 1$, si può dimostrare ancora, come è noto, il teorema di positività e ciò avviene solo in questo caso.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. PINI, *Sul problema fondamentale di valori al contorno per una classe di equazioni paraboliche lineari*, «Ann. di Mat. (IV)», T. XLIII, 1957.

[2] L. CATTABRIGA, *Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine 2n*, «Rend. Sem. Mat. Un. Padova», V. XXVIII, 1958.

[3] M. L. TARGHETTA, *Sull'equazione parabolica elementare in due variabili*, «Tesi di laurea», Un. Cagliari. 1964.

[4] F. MANDRAS, *Un problema di valori al contorno per l'equazione parabolica elementare*, «Tesi di laurea», Un. Cagliari, 1964.

[5] A. WINTNER, *Cauchy stable distributions and an "explicit formula" of Mellin*, «Am. J. of Math.», v. LXXVIII, 1956.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 25 marzo 1966