Bollettino Unione Matematica Italiana

Oscar Montaldo

Sul comportamento delle funzioni univalenti nell'intorno della funzione di Koebe.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.2, p. 127–143.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_2_127_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

Sul comportamento delle funzioni univalenti nell'intorno della funzione di Koebe.

OSCAR MONTALDO (Cagliari) (*)

Sunto. - *In questa Nota si studia il comportamento dell' n-esimo coefficiente a_n di una funzione univalente $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots\ldots \in S$, quando il secondo coefficiente a_2 sia vicino a 2; in particolare si studiano i rapporti $|n - \mathrm{Re}(a_n)| / |2 - \mathrm{Re}(a_2)|$ e $|n - a_n|^2 / |2 - a_2|$, si dimostra che questi rapporti si mantengono limitati e del tipo $0(n^a)$, con a costante opportuna.*

Summary. - *Let $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in S$ be regular and univalent in $|z| < 1$. In this paper, we shall prove that $|n - Re(a_n)| / |2 - Re(a_2)|$ and $|n - a_n|^2 / |2 - a_2|$ are bounded by $0(n^a)$, for some a, and that the order of magnitude of these bounds is best possible.*

Introduzione. - Sia S la famiglia delle funzioni $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots\ldots$ regolari e univalenti in $|z| < 1$. In relazione alla nota congettura di BIEBERBACH $|a_n| \leq n$, ha interesse studiare il comportamento dei coefficienti di queste funzioni quando $a_2 \to 2$. Infatti è una semplice conseguenza del Teorema dell'Area che $a_2 \to 2$ implica $a_n \to n$, e viceversa.

Ci occuperemo qui del problema di studiare la rapidità con cui $a_n \to n$ rispetto alle quantità $|2 - a_2|$ e $2 - \mathrm{Re}(a_2)$.

In questo ordine di idee, è stato risolto il problema

$$\liminf_{\mathrm{Re}(a_2) \to 2} \frac{n - \mathrm{Re}(a_n)}{2 - \mathrm{Re}(a_2)} = \rho_n$$

(vedasi [1] e [2]), facendo uso opportuno del metodo parametrico di LÖWNER.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerche matematiche N. 31 del C.N.R.

Un esame accurato della dimostrazione in [1] mostra che il metodo seguito porta a maggiorazioni troppo elevate (valide in tutta la famiglia S) per $|n - \mathrm{Re}(a_n)| / (2 - \mathrm{Re}(a_2))$, del tipo $\exp(n^a)$ per qualche $a > 0$; in questa Nota ci occuperemo del problema di ottenere una maggiorazione di $|n - \mathrm{Re}(a_n)| / (2 - \mathrm{Re}(a_2))$ valida in tutta la famiglia S, e dell'ordine di grandezza $0(n^a)$. Come vedremo, questa maggiorazione, a parte il valore della costante a, è la migliore possibile.

Come conseguenza del nostro procedimento dimostrativo otterremo anche una maggiorazione di $|n - a_n|^2 / |2 - a_2|$, anch'essa del giusto ordine di grandezza.

In questo ordine di idee, il problema analogo $|n - |a_n|| / (2 - |a_2|) = 0(n^a)$ non è ancora risolto, e i metodi di questa Nota non sembrano adatti al suo studio.

Infine, sarebbe interessante stabilire i risultati ottenuti in questo lavoro anche per classi più estese di funzioni, quali le funzioni, arealmente univalenti [3].

Il procedimento di questa Nota si basa, come in [1], su uno studio dell'equazione differenziale (non lineare) di LÖWNER da un punto di vista variazionale, con la differenza che le stime ottenute in [1] soltanto "localmente„ sono, nel nostro caso, valide in generale.

Ci sembra inoltre interessante osservare che fà parte della nostra dimostrazione l'approssimazione dei funzionali discontinui in S, $|n - \mathrm{Re}(a_n)| / (2 - \mathrm{Re}(a_2))$ e $|n - a_n|^2 / |2 - a_2|$, mediante funzionali continui per i quali si può garantire l'esistenza del massimo (vedasi p. 9 e segg.); ciò permette una notevole semplificazione delle dimostrazioni.

1. – Dimostreremo i due seguenti teoremi.

TEOREMA 1. – *Esiste* α *finito tale che per ogni* $f(z) \in S$ *sia*

$$\frac{|n - \mathrm{Re}(a_n)|}{2 - \mathrm{Re}(a_2)} = 0(n^\alpha). \tag{1}$$

Se α *è l'estremo inferiore delle costanti per cui vale la* (1), *allora è*

$$3 \leq \alpha \leq 21. \tag{2}$$

Più precisamente, *per ogni* $\varepsilon > 0$ *e* $\delta > 0$ *piccoli a piacere, esi-*

stono funzioni $f(z) \in S$ *per le quali è*

$$\frac{n - \mathrm{Re}\,(a_n)}{2 - \mathrm{Re}\,(a_2)} > \frac{1}{2}\, n\,(n-1)^2 - \varepsilon$$

$$2 - \mathrm{Re}\,(a_2) < \delta\,.$$

TEOREMA 2. - *Esiste* $\beta \leq 20$ *tale che per ogni* $f(z) \in S$ *sia*

$$\frac{|\, n - a_n \,|^2}{|\, 2 - a_2 \,|} = 0\,(n^\beta)\,. \tag{3}$$

Se β *é l'estremo inferiore delle costanti per cui vale la* (3), *allora è*

$$4 \leq \beta \leq 20\,. \tag{4}$$

Più precisamente, *per ogni* $\varepsilon > 0$ *e* $\delta > 0$ *piccoli a piacere esistono funzioni* $f(z) \in S$ *per le quali*

$$\frac{|\, n - a_n \,|^2}{|\, 2 - a_2 \,|} > \frac{1}{3}\,(n-1)^2\,(n-2)^2 - \varepsilon$$

e

$$|\, 2 - a_2 \,| < \delta\,.$$

2. - Il metodo che seguiremo farà uso del Teorema di LÖWNER, così come in [1].

Il Teorema di LÖWNER si può enunciare nella seguente forma.

TEOREMA A. - *Sia* $f(z, u)$, $|\, z \,| < 1, 0 \leq u \leq 1$, *la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{2k(u)f^2}{1 + uk(u)f} = 0 \tag{5}$$

con la condizione al contorno

$$f(z, 1) = z \qquad \text{in} \quad |\, z \,| < 1\,, \tag{6}$$

dove $k(u)$ (il parametro di LÖWNER) *è una funzione continua in* $0 \leq u \leq 1$ *tale che*

$$|\, k(u) \,| = 1\,. \tag{7}$$

Allora

(i) $f(z, u) \in S$ per $0 \leq u \leq 1$;

(ii) $u \,|\, f(z, u) \,| \leq |\, z \,|$ in $|\, z \,| < 1$;

(iii) *assegnata comunque la funzione* $f(z) \in S$, un $\varepsilon > 0$ *piccolo a piacere*, e un $r_0 < 1$, *esiste un parametro di Löwner* $k(u)$ ed u_0, $0 \leq u_0 \leq 1$, *tale che*

$$|\, f(z) - f(z, u_0) \,| < \varepsilon \quad \text{in} \quad |\, z \,| \leq r_0 . \tag{8}$$

In particolare, *la famiglia delle funzioni di Löwner* $f(z, u)$ *è densa nella famiglia* S.

3. – Per dimostrare il Teorema 1 premettiamo 3 lemmi.

LEMMA 1. – *Sia* f_0 *la soluzione dell'equazione* (5) *quando* $k(u) = 1$. *Allora*

$$f_0 \,/\, (1 - u f_0)^2 = z \,/\, (1 - z)^2 . \tag{9}$$

Dimostrazione. È un risultato ben noto e, d'altra parte, la verifica diretta è assai facile.

LEMMA 2. – *Sia* $\varphi = 1 - f / f_0$. *Allora* φ *soddisfa all'equazione*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{2 f_0}{(1 + u f_0)^2} (\varphi + T(z, u)) = 0 \tag{10}$$

dove $T(z, u)$ *ha le due espressioni equivalenti*

$$(11_1) \quad T(z, u) = (1 - k) \frac{1 + uf}{1 + ukf} - 2(1 - k) \frac{\varphi}{1 + ukf} - k \frac{\varphi^2}{1 + ukf}$$

$$(11_2) \quad T(z, u) = (1 - k) \frac{1 + uf_0}{1 + ukf_0} -$$

$$- \frac{1}{1 + ukf} \left\{ \frac{uf_0}{1 + ukf_0} (1 - k)^2 \varphi + 2(1 - k) \varphi + k \varphi^2 \right\},$$

con la condizione iniziale

$$\varphi (z, 1) = 0 \quad \text{in} \quad |\, z \,| < 1 . \tag{12}$$

Osservazione. - È utile osservare che le funzioni φ, $2f_0/(1+uf_0)^2$, $T(z, u)$ sono olomorfe in $|z| < 1$. Per la φ ciò è ovvio perchè $\varphi(0, u) = 0$ e $f_0(z, u) \neq 0$ per $z \neq 0$ poichè $f_0 \in S$. Per quanto riguarda le altre due funzioni la verità dell'asserzione consegue dalla (ii) del Teo. A, che mostra che

$$|1 + ukf| \geq 1 - |z|, \ |1 + uf_0| \geq 1 - |z|, \ |1 + ukf_0| \geq 1 - |z|, \text{ in } |z| < 1.$$

Dimostrazione del Lemma 2. - Si ha per la (5)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{f}{f_0^2}\frac{\partial f_0}{\partial u} =$$

$$= \frac{2kf^2}{f_0(1 + ukf)} - \frac{2f}{1 + uf_0}.$$

La verifica delle (10)-(11$_1$) e (10)-(11$_2$) si riduce allora a un semplice, anche se lungo, calcolo di algebra elementare.

Il seguente Lemma è per noi fondamentale.

LEMMA 3. - *Per $0 \leq u \leq 1$ e $|z| = r$ vale la disuguaglianza*

$$|\varphi(z, u)| < \frac{A}{(1 - r)^8}\int_u^1 |1 - k(v)|\, dv$$

con A costante.

Dimostrazione. Posto

$$K = z/(1 - z)^2, \tag{13}$$

dal Lemma 1 si ricava

$$2f_0/(1 + uf_0)^2 = 2K/(1 + 4uK)$$

e integrando l'equazione differenziale (10) si ha, tenendo presente la condizione $\varphi(z, 1) = 0$:

$$\varphi(z, u) = \int_u^1 \frac{2K}{1 + 4vK}\, T(z, v) \exp\left(\int_u^v \frac{2K}{1 + 4Kt}\, dt\right) dv = \tag{14}$$

$$= \int_u^1 \frac{2K}{(1 + 4uK)^{1/2}(1 + 4vK)^{1/2}}\, T(z, v)\, dv.$$

La funzione

$$\frac{K}{(1+4uK)^{1/2}\,(1+4vK)^{1/2}} \in S$$

e quindi è

$$|K/[(1+4uK)^{1/2}\,(1+4vK)^{1/2}]| \leq r/(1-r)^2\,;$$

pertanto dalla (14) e la (ii) del Teo. A, presa per $T(z, u)$ l'espressione (11_1), segue

$$|T(z, u)| \leq \frac{1}{|1+ukf|}\{2|1-k|+2|1-k||\varphi|+|\varphi^2|\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{1-r}\{4|1-k|+2|\varphi|^2\}$$

da cui

$$\text{(15)}\qquad |\varphi(z, u)| \leq \frac{A'}{(1-r)^3}\left(\int_u^1 |1-k|\,dv + \int_u^1 |\varphi|^2\,dv\right).$$

Mostriamo che è

$$\text{(16)}\qquad |\varphi(u)| \leq \frac{A'+\varepsilon}{(1-r)^3}\int_u^1 |1-k|\,dv$$

per $1-\delta \leq u \leq 1$, $(\delta = \delta(\varepsilon) > 0)$.

Sia $M_u = \max\limits_{(u,1)} |\varphi|$; segue dalla (15)

$$M_u \leq \frac{A'}{(1-r)^3}\left(\int_u^1 |1-k|\,dv + (1-u)\,M_u^2\right)$$

poichè se u' è tale che $|\varphi(u')| = M_u$, e $u \leq u' \leq 1$, allora:

$$|\varphi(u)| \leq |\varphi(u')|,$$

$$\int_{u'}^1 |1-k|\,dv \leq \int_u^1 |1-k|\,dv,$$

$$\int_{u'}^1 |\varphi|^2\,dv \leq \int_u^1 |\varphi|^2\,dv \leq (1-u)\,M_u^2.$$

Preso $\delta > 0$ così piccolo tale per $1 - \delta \leq u \leq 1$

$$\frac{A'}{(1-r)^3}(1-u)\,M_u \leq \frac{A'}{(1-r)^3}\,\delta\,M_{1-\delta} < \varepsilon',$$

avremo

$$M_u \leq \frac{A'}{(1-r)^3}\int_u^1 |1-k|\,dv + \varepsilon' M_u$$

e quindi la (16) ponendo $A'/(1-\varepsilon') = A' + \varepsilon$.

Prendiamo $\bar{A}$ con $\bar{A} > A'$; dalla (16) vediamo che esiste $0 \leq u_0 \leq 1$ tale che

(17) $$\varphi(u) \leq \frac{\bar{A}}{(1-r)^3}\int_u^1 |1-k|\,dv \qquad \text{in} \quad u_0 \leq u \leq 1,$$

(18) $$\varphi(u_0) = \frac{\bar{A}}{(1-r)^3}\int_{u_0}^1 |1-k|\,dv.$$

Ne segue per la (15)

$$|\varphi(u_0)| \leq \frac{A'}{(1-r)^3}\int_{u_0}^1 |1-k|\,dv + \frac{A'}{(1-r)^3}\int_{u_0}^1 |\varphi(v)|^2\,dv \leq$$

$$\leq \frac{A'}{(1-r)^3}\int_{u_0}^1 |1-k|\,dv + \frac{A'}{(1-r)^3}\max_{(u_0,1)} |\varphi(u)|^2 \leq$$

$$\leq \frac{A'}{(1-r)^3}\int_{u_0}^1 |1-k|\,dv + \frac{\bar{A}^2 A'}{(1-r)^9}\left(\int_{u_0}^1 |1-k|\,dv\right)^2$$

e se

$$\int_{u_0}^1 |1-k|\,dv < (1-r)^6\,\frac{\bar{A}-A'}{\bar{A}^2 A'}$$

avremo

$$|\varphi(u_0)| < \int_{u_0}^1 |1-k|\,dv\left(\frac{A'}{(1-r)^3} + \frac{\bar{A}^2 A'}{(1-r)^9}\cdot\frac{\bar{A}-A'}{\bar{A}^2 A'}(1-r)^6\right) =$$

$$= \frac{\bar{A}}{(1-r)^3}\int_{u_0}^1 |1-k|\,dv;$$

ciò è impossibile per la (18).

Quindi

$$(1-r)^6 \frac{\bar{A}-A'}{\bar{A}^2 A'} \leq \int_{u_0}^{1} |1-k|\, dv .$$

Pertanto se $\bar{A} > A'$ e se

$$\int_{u}^{1} |1-k|\, dv < (1-r)^6 \frac{\bar{A}-A'}{\bar{A}^2 A'}$$

allora

$$|\varphi(u)| < \frac{\bar{A}}{(1-r)^3} \int_{u}^{1} |1-k|\, dv .$$

Posto $\bar{A} = 2A'$, è

$$|\varphi(u)| < \frac{2A'}{(1-r)^3} \int_{u}^{1} |1-k|\, dv$$

quando

$$\int_{u}^{1} |1-k|\, dv < (2A')^{-2} (1-r)^6 .$$

Infine se

$$\int_{u}^{1} |1-k|\, dv \geq (2A')^{-2} (1-r)^6$$

allora, poichè $f, f_0 \in S$, si ha

$$|\varphi| = |1 - f/f_0| \leq 1 + |f|/|f_0| <$$

$$< \frac{C}{(1-r)^2} = \frac{(2A')^2 C}{(1-r)^8} (2A')^{-2} (1-r)^6 \leq \frac{(2A')^2 C}{(1-r)^8} \int_{u}^{1} |1-k|\, dv =$$

$$= \frac{A}{(1-r)^8} \int_{u}^{1} |1-k|\, dv$$

e la dimostrazione del Lemma 3 è completa.

4. - Per dimostrare il Teo. 1 faremo uso della formula

$$n - a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{z/(1-z)^2 - f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

dove C è il cerchio $|z| = r$. Daremo una maggiorazione di $z/(1-z)^2 - f(z)$, approssimando la $f(z)$ con una funzione di Löwner $f(z, u)$ e usando il Lemma 3.

Il nostro problema, scrivendo $a_n = x_n + iy_n$, $x_2 = x_2 + iy_2$, consiste nel trovare l'estremo superiore M_n in S del funzionale

$$F\{f\} = \frac{|n - x_n|}{2 - x_2}.$$

Poichè il funzionale F non ha gradiente finito in S non potremo garantire l'esistenza di una funzione estremale. Consideriamo allora il funzionale

$$F_\alpha\{f\} = \frac{|n - x_n|}{2 + \alpha - x_2}, \qquad \text{con} \quad \alpha > 0.$$

Questo funzionale è continuo con le sue derivate e ha gradiente positivo nella famiglia S (dato che $x_2 \leq 2$) e quindi esisterà ([4], Lemma VII) una funzione $f_\alpha \in S$ estremale per il problema

$$M_n(\alpha) = \max_S F_\alpha\{f\},$$

tale che, perso $r < 1$ e $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, esistono funzioni di Löwner $f(z, 0)$ per le quali è

$$|f_\alpha(z) - f(z, 0)| < \varepsilon \qquad \text{in} \quad |z| < r.$$

Infatti, da [4], Lemma VII vediamo che (nella notazione di [4]) $f_\alpha(z)$ è una $\mathfrak{D}_n$-funzione, dunque per [4], Teo. VI si ha che: "esiste una funzione $v(z, u) = u\{z + b_2(u)z^2 + \dots\}$, $0 \leq u \leq 1$, regolare e univalente in $|z| < 1$, continua rispetto a u, derivabile rispetto a u eccetto che in un numero finito di punti, tale che

$$(19) \qquad u\frac{\partial v}{\partial u} = v(1 + e^{i\alpha}v)/(1 - e^{i\alpha}v)$$

dove $\alpha = \alpha(u)$ è reale, continua a tratti, e tale che

$$v(z, 1) = z,$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{v(z, u)}{u} f_\alpha(z) \text{"}.$$

Ponendo $f(z, u) = v(z, u)/u$, e $k(u) = -e^{i\alpha}$, allora per la (19), $f(z, u)$ soddisfa all'equazione differenziale di Löwner

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{2k(u)f^2}{1 + uk(u)f} = 0 \\ f(z, 1) = z \end{array}\right. \tag{20}$$

con $|k(u)| = 1$, e si ha in $|z| < 1$

$$f_\alpha(z) = \lim_{n \to +0} f(z, u). \tag{21}$$

Potremo adesso approssimare il parametro di Löwner $k(u) = = e^{-i\alpha}$, che può essere discontinuo, con un parametro $k^*(u)$ continuo in $0 \leq u \leq 1$, tale che, detta $f^*(z, u)$ la corrispondente funzione di Löwner, risulti

$$|f(z, u) - f^*(z, u)| < \varepsilon \tag{22}$$

in $0 < u \leq 1$, $|z| < r$. Ciò è evidente se si osserva che la funzione $f(z, u)$ soluzione della (20) soddisfa ancora alle (i) e (ii) del Teo. A.

Dalle (22) e (21) si ricava che

$$|f_\alpha(z) - f^*(z, 0)| < \varepsilon$$

in $|z| < r$, come dovevamo verificare.

Ne segue, se $f_\alpha(z) = z + a_2(\alpha)z^2 + \ldots\ldots + a_n(\alpha)z^n + \ldots\ldots$, che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un parametro di Löwner $k(u)$ per il quale

$$\left| n - a_n(\alpha) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \frac{f_0(z, 0)\,\varphi(z, 0)}{z^{n+1}}\, dz \right| < \varepsilon \tag{23}$$

$$\left| 2 - a_2(\alpha) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \frac{f_0(z, 0)\,\varphi(z, 0)}{z^3}\, dz \right| < \varepsilon. \tag{24}$$

Osserviamo inoltre che

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \frac{f_0(z, 0)\,\varphi(z, 0)}{z^3}\, dz = 2\int_0^1 (1 - k(v))\, dv, \tag{25}$$

come si verifica facilmente dalla (5).

Per esaminare il nostro problema occorre considerare $n -$ Re $(a_n(\alpha))$.

5. - Consideriamo adesso un operatore $\mathfrak{R}$ che agisce nel modo seguente:

se c è una costanto, $\mathfrak{R}(c) = \mathrm{Re}(c)$;

se $g(z) = \Sigma \alpha_n z^n$, $\mathfrak{R}\, g(z) = \Sigma\, \mathrm{Re}(\alpha_n) z^n$.

È chiaro che è

$$\mathfrak{R}\, g(z) = \frac{1}{2}\,[g(z) + \overline{g(\bar{z})}]\,. \tag{26}$$

Dalla (23) si ha

$$\left| n - \mathrm{Re}(a_n(\alpha)) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{\mathfrak{R}[f_0(z, 0)\varphi(z, 0)]}{z^{n+1}}\, dz \right| < \varepsilon\,. \tag{27}$$

Teniamo conto che è

$$\mathfrak{R}[f_0 \varphi] = f_0\, \mathfrak{R}[\varphi]$$

avendo f_0 coefficienti reali.

Per maggiorare $\mathfrak{R}[\varphi]$ usiamo l'equazione differenziale (10) con $T(z, u)$ data dalla (11_2).

Avremo, posto $k = e^{i\theta}$:

$$\mathfrak{R}\left\{(1-k)\frac{1+uf_0}{1+ukf_0}\right\} = \mathfrak{R}\left\{(1-k)(1+\bar{k}uf_0)\frac{1+uf_0}{1+(k+\bar{k})uf_0+u^2f_0^2}\right\} =$$

$$= \frac{1+uf_0}{1+2\cos\theta\; u f_0 + u^2 f_0^2} \cdot \mathfrak{R}(1 - k + \bar{k}uf_0 - uf_0) =$$

$$= (1-\cos\theta)\frac{1-u^2f_0^2}{1+2\cos\theta\; uf_0 + u^2f_0^2} = (1-\cos\theta)\;\frac{1-uf_0}{1+uf_0}\,\cdot$$

$$\frac{1}{1-(1-\cos\theta)\,u\cdot\dfrac{2f_0}{(1+uf_0)^2}}\,.$$

Adesso è

$$\frac{2f_0}{(1+uf_0)^2}=\frac{2K}{1+4uK}$$

$$1-\cos\theta=\frac{1}{2}\,|\,1-k\,|^2,$$

$$\frac{1-uf_0}{1+uf_0}=\frac{1}{(1+4uK)^{1/2}}$$

e in definitiva si ha

$$\mathfrak{R}\left\{(1-k)\frac{1+uf_0}{1+kuf_0}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\,|\,1-k\,|^2(1+4uK)^{-1/2}\left(1-\frac{2u(1-\cos\theta)K}{1+4uK}\right)^{-1}$$

Applichiamo ora l'operatore $\mathfrak{R}$ ai due membri della (10) con $T(z,u)$ dato dalla (11_2). Avremo

$$\mathfrak{R}[\varphi(z,u)]=\int_u^1\frac{2K}{(1+4uK)^{1/2}(1+4vK)^{1/2}}\,\mathfrak{R}[T(z,v)]\,dv. \tag{28}$$

Ora è

$$\mathfrak{R}[T(z,u)]=\frac{1}{2}\,|\,1-k(u)\,|^2(1+4uK)^{1/2}(1+2u(1-\cos\theta)K)^{-1}$$

$$-\,\mathfrak{R}\left\{\frac{1}{1+ukf}\left[\frac{uf_0}{1+ukf_0}(1-k)^2\varphi+2(1-k)\varphi+k\varphi^2\right]\right\}$$

da cui segue, usando il Lemma 3 e tenendo presente la (26), che implica che

$$\max_{|z|<r}|\,\mathfrak{R}g(z)\,|\leq\max_{|z|<r}|\,g(z)\,|\;:$$

$$\left|\,\mathfrak{R}\left\{\frac{1}{1+ukf}\left[\frac{uf_0}{1+ukf_0}(1-k)^2\varphi+2(1-k)\varphi+k\varphi^2\right]\right\}\right|\leq$$

$$\leq\frac{C_1}{(1-r)^{17}}\left(\int_u^1|\,1-k(v)\,|\,dv\right)^2+\frac{C_2}{(1-r)^{10}}\,|\,1-k(u)\,|\cdot\left(\int_u^1|\,1-k(v)\,|\,dv\right).$$

Sostituendo in (28) otteniamo (tenuto presente che

$$\left(\int_u^1 |1-k(v)|\,dv\right)^2 \leq \int_u^1 |1-k(v)|^2\,dv \right):$$

$$|\Re[\varphi(z,u)]| \leq \frac{C_3}{(1-r)^{19}}\int_u^1 |1-k(v)|^2\,dv\,,$$

ricordando che

$$\left|\frac{K}{(1+4uK)^{1/2}(1+4vK)^{1/2}}\right| \leq \frac{r}{(1-r)^2}\,.$$

Moltiplichiamo per $f_0(z,0)=K$. che ha coefficienti reali, si ricava

$$|\Re[f_0(z,0)\varphi(z,0]| \leq \frac{C_3}{(1-r)^{21}}\int_0^1 |1-k(v)|^2\,dv\,,$$

ed infine preso $r=1-1/n$ nella (27) ed usando l'ultima diseguaglianza ora scritta si ricava

$$|n-\mathrm{Re}(a_n(\alpha))| \leq C_4 n^{21}\int_0^1 |1-k(u)|^2\,du+\varepsilon\,.$$

Adesso, poichè $|k(u)|=1$, si ha

(29) $$\int_0^1 |1-k(u)|^2\,du = 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^1 (1-k(u))\,du\right)$$

e dalle (24) e (25) otteniamo

$$\left|2-\mathrm{Re}(a_2(\alpha))-\int_0^1 |1-k(u)|^2\,du\right| < \varepsilon\,.$$

Se ε è sufficientemente piccolo riesce

$$M_n(\alpha) = |n-\mathrm{Re}(a_n(\alpha))|\,/\,(2+\alpha-\mathrm{Re}(a_2(\alpha)) \leq$$

$$\leq \left(C_4 n^{21}\int_0^1 |1-k(u)|^2\,du+\varepsilon\right)\Big/\left(\alpha+\int_0^1 |1-k(u)|^2\,du-\varepsilon\right) \leq C_5 n^{21}\,.$$

Poichè la stima ottenuta è indipendente da α, si ricava

$$M_n = \lim_{\alpha \to +0} M_n(\alpha) \leq C_5 n^{21},$$

cioè la prima parte del Teo. 1.

Per la seconda parte, sia

$$f(z) = z / (1 - e^{i\varepsilon} z)^2,$$

con ε piccolo. Allora è

$$\operatorname{Re}(a_n) = n \text{ ces } (n-1)\varepsilon \quad , \quad \operatorname{Re}(a_2) = 2 \cos \varepsilon,$$

dunque

$$\frac{n - \operatorname{Re}(a_n)}{2 - \operatorname{Re}(a_2)} = \frac{n}{2} \frac{1 - \cos(n-1)\varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \to \frac{n}{2} (n-1)^2 \qquad \text{per} \quad \varepsilon \to 0.$$

6. - Dimostriamo il Teorema 2.

Allo stesso modo del n° 4 si considera il funzionale discontinuo

$$\Phi\{f\} = \frac{(n - x_n)^2 + y_n^2}{2 - x_2} \quad , \quad \Big(| n - a_n |^2 / (2 - \operatorname{Re}(a_2)) \Big)$$

e allo stesso modo si introduce il funzionale continuo

$$\Phi_\alpha\{f\} = \frac{(n - x_n)^2 + y_n^2}{2 + \alpha - x_2}.$$

Per la $f_\alpha(z)$ si ha, come nel n° 4,

$$| n - a_n(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f_0(z, 0)\varphi(z, 0)}{z^{n+1}} dz | < \varepsilon$$

$$| 2 - a_2(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f_0(z, 0)\varphi(z, 0)}{z^3} dz | < \varepsilon .$$

Ora è

$$|n - a_n(\alpha)| \leq \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=r} \frac{|f_0(z, 0)|\,|\varphi(z, 0)|}{z^{n+1}} |dz| \leq$$

$$\leq \varepsilon + \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r}{(1-r)^2} \frac{C}{(1-r)^8} \cdot \int_0^1 |1 - k(u)|\,du$$

e preso $r = 1\text{-}1/n$, si ha (ricordando che

$$\left(\int_0^1 |1 - k(u)|\,du\right)^2 \leq \int_0^1 |1 - k(u)|^2\,du\right):$$

$$|n - a_n(\alpha)|^2 \leq C\left(\varepsilon^2 + n^{20} \int_0^1 |1 - k(u)|^2\,du\right).$$

Infine dalla (29), segue

$$\left|2 + \alpha - \mathrm{Re}(a_2(\alpha)) - \left(\alpha + \int_0^1 |1 - k(u)|^2\,du\right)\right| < \varepsilon$$

quindi (per ε piccolo) si ha

$$|n - a_n(\alpha)|^2 / (2 + \alpha - \mathrm{Re}(a_2(\alpha))) \leq$$

$$\leq C\left(\varepsilon^2 + n^{20} \int_0^1 |1 - k(u)|^2\,du\right) \Big/ \left(\alpha + \int_0^1 |1 - k(u)|^2\,du - \varepsilon\right) \leq C n^{20}$$

e poichè è $2 - \mathrm{Re}(a_2) \leq |2 - a_2|$, riesce provata la prima parte del Teo. 2.

Per dimostrare la seconda parte, facciamo uso del seguente risultato dimostrato in [2]:

TEOREMA B. - *Sia* $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots\ldots \in S$; *esiste un parametro di Löwner* $k(u), 0 \leq u \leq 1$ *tale che*

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} - \int_0^1 H(z, u)[1 - k(u)]\,du + 0([2 - \mathrm{Re}(a_2)]) \tag{30}$$

uniformemente in $|z| \leq 1/2$, *dove*

$$H(z, u) = \frac{2K^2}{\sqrt{1 + 4uK}} \quad , \quad K = \frac{z}{(1-z)^2} \, ,$$

e con

$$a_2 = 2 \int_0^1 k(u)\, du \, . \tag{31}$$

Viceversa, assegnato $k(u)$ *con* $|k(u)| = 1$, *esiste* $f(z) \in S$ *tale che valgono le* (30) *e* (31).

Applichiamo l' ultima parte del Teo. B con

$$k(u) = e^{i\varepsilon(u - 1/2)} \quad , \quad 0 \leq u \leq 1$$

in modo che

$$I_m(a_2) = 2 I_m \int_{-1/2}^{1/2} e^{i\varepsilon t}\, dt = 0 \, ,$$

dunque

$$\mathrm{Re}(a_2) = |a_2| \, .$$

Avremo

$$a_2 = 2 \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\varepsilon t)\; dt = 2 - \frac{\varepsilon^2}{12} + 0(\varepsilon^4) \, . \tag{31_1}$$

Dalle formule (30) e (31_1) si ricava, ponendo $u - 1/2 = t$:

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} - \int_{-1/2}^{1/2} H\left(z, t + \frac{1}{2}\right)(1 - e^{i\varepsilon t})\, dt + 0(\varepsilon^2) =$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2} + i\varepsilon \int_{-1/2}^{1/2} H\left(z, t + \frac{1}{2}\right) t\, dt + 0(\varepsilon^2) =$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{i\varepsilon}{3} \frac{z^3}{(1-z)^3} + 0(\varepsilon^2) \, ,$$

da cui segue

$$a_n = n - i\varepsilon \frac{(n-1)(n-2)}{6} + 0(\varepsilon^2) \, .$$

Confrontando con la (31_1), si ha

$$\frac{|n - a_n|^2}{|2 - a_2|} = \frac{1}{3}(n-1)^2(n-2)^2 + 0(\varepsilon^2)$$

e il Teo 2 è completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Bombieri, *Sul problema di Bieberbach per le funzioni univalenti*, Atti Acc. Lincei (1963), dicembre.

[2] — —, *On the local maximum property of the Koebe function*, in preparazione.

[3] W. K. Hayman, *Multivalent functions*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 48, Cambridge, 1958.

[4] A. C. Schaeffer and D. C. Spencer, *Coefficent regions for schlicht functions*, American Math. Soc. Colloquium publications, vol. XXXV, New-York, 1950.

---

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U. M I.
il 15 marzo 1966