Delfina Roux

Una osservazione sulle serie di Dirichlet a coefficienti positivi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.2, p. 119–123.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_2_119_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Una osservazione sulle serie di Dirichlet a coefficienti positivi

DELFINA ROUX (Torino) (*)

Summary. - *Let* $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ *be a Dirichlet series with positive coefficients, convergent all over the complex plane* (s). *In this Note we assign a formula giving the Ritt order of* $f(s)$ *through the behaviour of the sequences* $\{a_n\}$ *and* $\{\lambda_n\}$: *the validity of this result does not depend upon any hypothesis on the sequence* $\{\lambda_n\}$.

In addition, we deduce, improving a previous result due to A. G. Azpeitia, an upper bound for the Ritt order of any series $f(s)$ *absolutely convergent for all values of s.*

1. - Introduzione.

Sia $\mathcal{A}$ la classe delle serie di DIRICHLET

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + i\tau) \tag{1.1}$$

$$0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \qquad \lambda_n \to +\infty$$

assolutamente convergenti in tutto il piano complesso (s) e sia $\rho = \rho(f)$ l'ordine (secondo J. F. RITT) di $f(s)$, cioè

$$\rho(f) = \overline{\lim_{\sigma \to -\infty}} \frac{\log_2 M(\sigma, f)}{-\sigma} (^1), \qquad (M(\sigma, f) = \sup_{-\infty<\tau<+\infty} | f(\sigma + i\tau) |).$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

([1]) $\log_2 x = \log \log x$.

È ben noto (J. F. RITT [3]) che ρ soddisfa la disuguaglianza

$$\frac{1}{\rho} \leqq \varliminf_{n \to +\infty} \frac{\log |1/a_n|}{\lambda_n \log \lambda_n} \tag{1.2}$$

e che inoltre, se è soddisfatta la condizione

$$\varlimsup_{n \to +\infty} \log n / \lambda_n < +\infty \ , \tag{1.3}$$

vale in (1.2) il segno $=$.

Recentemente, A. G. AZPEITIA [1] ha dimostrato che « Se $f(s) \in \mathfrak{A}$ e inoltre $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\log n}{\lambda_n \log \lambda_n} = 0$, allora

$$\frac{1}{\rho(f)} = \varliminf_{n \to +\infty} \frac{\log |1/a_n|}{\lambda_n \log \lambda_n} \text{ »}$$

e poi, più in generale, ha assegnato (A. G. AZPEITIA [2]) la seguente limitazione dal di sotto per $1/\rho(f)$ $(f \in \mathfrak{A})$:

$$\frac{1}{\rho(f)} \geqq \varliminf_{n \to +\infty} \frac{\log |1/a_n|}{\lambda_n \log \lambda_n} - \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{\log n}{\lambda_n \log \lambda_n} \text{ (2)}. \tag{1.4}$$

Essa è valida qualunque sia l'andamento della successione $\{\lambda_n\}$ ma, ovviamente, è significativa solo quando il suo secondo membro non è negativo (3).

In questa nota si perviene, come immediata conseguenza del teorema di J. F. RITT, all'espressione dell'ordine ρ per le serie (1.1) a coefficienti positivi: ne segue una limitazione dal di sopra per l'ordine ρ di qualunque $f(s) \in \mathfrak{A}$ che migliora (1.4).

2. - I risultati.

Sia $\{n_h\}$: $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ una successione crescente di

(2) Tale limitazione viene qui enunciata in una forma equivalente a quella data ad essa dall' *A.*

(3) Qualora sia $\varlimsup\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\log n}{\lambda_n \log \lambda_n} = D > 0$, può realmente accadere che il secondo membro di (1.4) sia negativo: basta che esista $\{n_h\}$ (rada quanto si vuole) per la quale risulti $\lim\limits_{h \to +\infty} \dfrac{\log |1/a_{n_h}|}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_h}} < D$.

numeri interi non negativi, soddisfacente le condizioni

$$(2.1) \qquad \lim_{h \to +\infty} \frac{\lambda_{n_{h+1}-1}}{\lambda_{n_h}} = 1, \qquad \overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log h}{\lambda_{n_h}} < +\infty .$$

Poniamo

$$(2.2) \qquad A_h = \sum_{n=n_h}^{n=n_{h+1}-1} | a_n | , \qquad h = 1, 2, \ldots$$

Sussiste il

TEOREMA I. - *Se* $f(s)$ *converge per qualunque valore di* s *e* $a_n > 0$ *per ogni* n, *allora*

$$(2.3) \qquad \frac{1}{\rho(f)} = \lim_{h \to +\infty} \frac{\log 1/A_h}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_h}}$$

(*con la convenzione abituale* $1/\rho = +\infty$ *se* $\rho = 0$, $1/\rho = 0$ *se* $\rho = +\infty$).

Consideriamo ora una qualunque funzione $f(s) \in \mathcal{A}$ e poniamo $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} | a_n | e^{-\lambda_n s}$. Essendo ovviamente $M(\sigma, f) \leq M(\sigma, F)$ per ogni σ, risulta $\rho(f) \leq \rho(F)$. Si ottiene allora, come immediato corollario del Teorema I, il seguente

TEOREMA II. - *Se* $f(s) \in \mathcal{A}$, *vale la limitazione*

$$(2.4) \qquad \frac{1}{\rho(f)} \geq \lim_{h \to +\infty} \frac{\log 1/A_h}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_h}} .$$

OSSERVAZIONI. - 1) Il valore limite a secondo membro (essendo eguale a $1/\rho(F)$) è non negativo ed è indipendente dalla particolare successione $\{n_h\}$ (soddisfacente le (2.1)) prescelta (come del resto si potrebbe vedere direttamente).

2) Essendo

$$A_h \leq (n_{h+1} - 1) \max_{n_h \leq n < n_{h+1}} | a_n | = (n_{h+1} - 1)\alpha_h$$

risulta

$$\underline{\lim}_{h\to+\infty}\frac{\log 1/A_h}{\lambda_{n_h}\log\lambda_{n_h}}\geqq \underline{\lim}_{h\to+\infty}\frac{\log 1/\alpha_h}{\lambda_{n_h}\log\lambda_{n_h}}-\overline{\lim}_{h\to+\infty}\frac{\log(n_{h+1}-1)}{\lambda_{n_h}\log\lambda_{n_h}}$$

da cui, per le (2.1)

$$\underline{\lim}_{h\to+\infty}\frac{\log 1/A_h}{\lambda_{n_h}\log\lambda_{n_h}}\geqq \underline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{\log|1/a_n|}{\lambda_n\log\lambda_n}-\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{\log n}{\lambda_n\log\lambda_n}$$

quindi (2.4) migliora (1.4).

3. - Dimostrazione del Teorema I.

Poniamo

$$\Phi(s)=\sum_{h=0}^{\infty}A_h\,e^{-\lambda_{n_h}s}\,.$$

Per ogni $\sigma<0$ è

$$\sum_{h=0}^{\infty}|A_h\,e^{-\lambda_{n_h}s}|=\sum_{h=0}^{\infty}A_h\,e^{-\lambda_{n_h}\sigma}\leqq\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n\sigma}=f(\sigma)$$

quindi $\Phi(s)\in\mathfrak{A}$ e, essendo soddisfatta (1.3) in forza della seconda delle (2.1), si ottiene dal teorema di Ritt

$$\frac{1}{\rho(\Phi)}=\underline{\lim}_{h\to+\infty}\frac{\log 1/A_h}{\lambda_{n_h}\log\lambda_{n_h}}\,. \tag{3.1}$$

Dalla relazione $M(\sigma,\,\Phi)=\Phi(\sigma)\leqq f(\sigma)=M(\sigma,\,f)$ (valida per ogni $\sigma<0$) si ricava

$$\rho(f)\geqq\rho(\Phi)\,. \tag{3.2}$$

Se $\rho(\Phi)=+\infty$, da (3.2) e (3.1) segue (2.3).

Se $\rho(\Phi)<+\infty$, consideriamo la serie

$$\Psi(s)=\sum_{h=0}^{\infty}A_h\,e^{-\lambda_{n_{h+1}-1}s}\,.$$

Da (3.1) e (2.1) si deduce facilmente che $\Psi(s) \in \mathfrak{A}$ e che vale (1 3); per il teorema di RITT e le (2.1) e (3.1) si ha allora

$$\frac{1}{\rho(\Psi)} = \lim_{h \to +\infty} \frac{\log 1/A_h}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_h}} = \frac{1}{\rho(\Phi)} . \tag{3.3}$$

Essendo infine, per ogni $\sigma < 0$, $M(\sigma, f) = f(\sigma) \leqq \Psi(\sigma) = M(\sigma, \Psi)$, da (3.2) e (3 3) segue (2.4) e il Teorema I è dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. G. AZPEITIA, *A remark on the Ritt order of entire functions defined by Dirichlet series*, « Proc. Amer. Math. Soc. » *12*, pp. 722-723 (1961).

[2] — —, *On the Ritt order of entire Dirichlet series*, « Quart. J. Math. » (2) *15*, pp. 275-277 (1964).

[3] J. F. RITT, *On certain points in the theory of Dirichlet series*, « Am. J. Math. » *50*, pp. 73-86 (1928).

Pervenuto alla Segreteria dell' U. M. I.
il 14 marzo 1966