Renata Spanicciati

Tavole di moltiplicazione ridotte di un gruppo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.1, p. 86–89.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_1_86_0>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Tavole di moltiplicazione ridotte di un gruppo

RENATA SPANICCIATI (Roma) (*)

Sunto. - *Nella presente nota si espone un nuovo metodo dovuto al Tamari di rappresentazione dei gruppi mediante tavole di moltiplicazione ridotte. Nel n. 1 si accenna alla teoria generale sulla eliminazione di righe e colonne in un quadrato latino. Nel n. 2 si applicano i risultati di tale teoria alle tavole di moltiplicazione dei gruppi e si ottengono così le particolari tabelle ridotte, di cui si dà un esempio nel n. 3.*

Premessa. - Dato un gruppo finito G, indichiamo con $a_1 = e$, $a_2, \ldots, a_n$ i suoi elementi. L'operazione (.) di G può essere definita o rappresentata da una tavola di moltiplicazione, cioè da una tabella quadrata di n^2 elementi, nella quale il prodotto $a_i \cdot a_j$ è scritto nell'intersezione della i — ma riga con la j — ma colonna e si indica con a_{ij}. Si può anche usare la tavola detta di *forma normale* [1] che si costruisce nel modo seguente: si scrivono gli elementi $e, a_2, \ldots, a_n$ di G in questo ordine a partire dal basso nella prima colonna a sinistra della tavola, nella prima riga in basso si pongono non più gli elementi, ma i loro inversi presi nello stesso ordine. Allora nell'intersezione della i — ma colonna con la j — ma riga si ha: $a_{ij} = a_i^{-1} \cdot a_j$. Ebbene, sviluppando alcune premesse del TAMARI e del GINZBURG [2], [3], si arriva a costruire delle tavole di moltiplicazione con un minor numero di caselle (ridotte), che prendono il nome di tavole di moltiplicazione generalizzate normali. Esse sono degli estratti sufficienti di una tavola di gruppo normale, nella quale si sono soppresse in un dato modo delle righe e delle colonne.

(*) Lavoro svolto nell'ambito del gruppo di ricerca n. 17.

1. - Sia S_n un quadrato latino (1) arbitrario relativo ad n elementi $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Una riga ed una colonna di questo quadrato si dicono *corrispondenti* quando si intersecano nella diagonale principale (cioè la diagonale che inizia dall'angolo sinistro più basso).

Dopo aver cancellato $n - b$ righe arbitrarie e le corrispondenti colonne, rimane un quadrato T_b con $b \cdot b = b^2$. Un tale quadrato è chiamato minore principale.

Si indichi con $K_{i_1, \ldots, i_q}(i_1, i_2, \ldots, i_q = 1, 2, \ldots, n$ tutti diversi) il numero delle colonne che contengono contemporaneamente in T_b gli elementi $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_q}$: sia $K^{(q)}$ il minimo fra i $K_{i_1, \ldots, i_q}$. Dati i due numeri $K^{(q)}$ ed n (interi positivi) ci si chiede: qual è il minimo numero b, tale che da un arbitrario S_n si possa estrarre un T_b con il prescritto $K^{(q)}$?

Erdös e Ginzburg hanno ottenuto la seguente disuguaglianza [4]:

$$\binom{b}{q} b \geq K^{(q)} \binom{n}{q} \tag{1}$$

Se si vuole che la diagonale principale sia occupata da un determinato elemento a_1, la (1) diventa

$$\binom{b-1}{q} b \geq K^{(q)} \binom{n-1}{q} \tag{2}$$

2. - Allora, data una tabella di forma normale S_n, si vuole estrarre da essa una tavola T_b in cui ogni coppia di elementi a_k, a_s del gruppo G compaia in almeno una colonna: questo implica che in T_b esiste $a_k^{-1} \cdot a_s$. Infatti, se a_k e a_s compaiono in una medesima colonna di indice i di T_b, esisteranno bene j ed r tali che:

$$a_i^{-1} \cdot a_j = a_k \qquad a_i^{-1} \cdot a_r = a_s$$

con j ed r indici di righe conservate nel passaggio da S_n a T_b.

Di conseguenza, dato il modo in cui T_b è stato estratto da S_n esistono in T_b anche le colonne j — ma ed r — ma di S. Ne segue che esiste $a_k^{-1} \cdot a_s$, poichè:

$$a_k^{-1} \cdot a_s = (a_j^{-1} \cdot a_i) \qquad (a_i^{-1} \cdot a_r) = a_j^{-1} \cdot a_r.$$

e $a_j^{-1} a_r$ è il prodotto che sta nell'incrocio della colonna j — ma e della riga r — ma.

Nel nostro caso, $q = 2$ e $K^{(q)} = K^{(2)}$, con $K^{(2)} = 1$.

Facendo uso della (1) oppure della (2), ponendo $a_1 = e$ nella diagonale principale, si ottengono facilmente i b per tavole T_b con

(1) Si chiama quadrato latino S_n una tabella quadrata di $n \cdot n$ elementi, in cui ogni elemento compare una e una sola volta in ciascuna riga e in ciascuna colonna.

$q = 2$ e $K^{(2)} = 1$. Così si vede che se l'ordine del gruppo è $n \leq 4$, si avrà $b = 3$, se $n \leq 6$ $b = 4$, ecc.

Le tavole così ottenute prendono il nome di *tavole di moltiplicazione normali generalizzate.*

3. – Per ricostruire il prodotto in tali tavole si può seguire questa via. Se

$$a_k = a_{ij} = a_i^{-1} \cdot a_j \qquad \text{e} \qquad a_s = a_{ir} = a_i^{-1} \cdot a_r$$

allora

$$a_k^{-1} \cdot a_s = a_j^{-1} a_r = a_{jr}.$$

e pertanto il prodotto di $a_k^{\,1}$ per a_s si trova nella casella nella quale si incrociano la colonna corrispondente alla riga nella quale sta a_k e la riga nella quale sta a_s.

Praticamente, dati a_k^{-1} e a_s si trovi una colonna i nella quale stiano $a_k = a_{ij}$ e $a_s = a_{ir}$; si vada da a_k sulla riga fino alla diagonale principale, si percorra la colonna corrispondente fino ad incontrare la riga nella quale sta a_s: così si trova $a_k^{-1} \cdot a_s$.

Per esempio, considerato il gruppo dei quaternioni

$$\{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \}$$

di ordine 8, si scriva la sua tavola in forma normale con 64 caselle

Dalle formule di Erdös e Ginzburg si ha $b = 5$, cioè si possono cancellare tre righe e tre colonne corrispondenti e si ha così la t. m. n. g. di ordine 5.

5	$-k$	k	$-j$	j	1
4	$-i$	i	-1	1	$-j$
3	i	$-i$	1	-1	j
2	-1	1	i	$-i$	$-k$
1	1	-1	$-i$	i	k
	1	2	3	4	5

Allora per ricostruire ad es. il prodotto $i \cdot j$ secondo quanto detto sopra, si cerca una colonna contenente $-i$ e j ed è la 4, poi si va lungo la riga 2 fino alla diagonale principale e poi lungo la colonna 2, all'incrocio di questa con la riga 5 c'è k che è proprio il prodotto $i \cdot j$.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. Dubréil, *Algèbre.*

[2] D. Tamari, *Représentations isomorphes par des systèmes de relations - Systèmes associatifs.* Comptes rendus, 232, 1951, p. 1332.

[3] A. Ginzburg, *A note on cayley loops.* Can. J. Math., vol. 16, p. 77, 1964.

[4] P. Erdös - A. Ginzburg, *On a combinatorial problem in latin squares.* Publ. Math. Inst. Hungarian Academy of Sciences, vol. VIII, Series A, Fasc. 3, 1963.

Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I.
il 2 febbraio 1966.