Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Speranza

Sui gruppi d'olonomia degli spazi a connessione proiettiva o affine generalizzati.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.1, p. 48–64.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_1_48_0>

Sui gruppi d'olonomia degli spazi a connessione proiettiva o affine generalizzati

FRANCESCO SPERANZA (Bologna)

Sunto. - *Si danno varie proprietà dei gruppi d'olonomia degli spazi a connessione proiettiva o affine generalizzata (spazi di König).*

Summary. - *In this paper are given some properties on holonomy groups of generalized projective or affine connections (König spaces).*

1. Consideriamo qui quegli spazi a connessione che si possono dire a connessione proiettiva, o affine... generalizzati: in essi le fibre non sono necessariamente gli spazi tangenti alla base. Tali spazi sono noti anche come spazi (o varietà) di KÖNIG (1); essi sono stati oggetto di varie recenti ricerche, ed in particolare è stata introdotta la nozione di spazio tangente in un punto [14].

In questo lavoro si studiano gli spazi a connessione generalizzati per i quali il gruppo d'olonomia è di certi tipi. Si vedrà come i gruppi d'olonomia siano strettamente collegati agli spazi tangenti: mentre di solito è apparso naturale limitarsi al caso in cui questi ultimi hanno dimensione massima, si vedrà come questa ipotesi è incompatibile con l'esistenza di numerosi tipi di gruppi d'olonomia. Da questi risultati si possono trarre delle proprietà relative ai gruppi d'olonomia degli ordinari spazi a connessione.

2. Sia dato uno spazio fibroso E, la cui base sia una varietà differenziabile B^r, e la fibra relativa al punto x di B^r sia uno spazio proiettivo reale $P^n_{(x)}$. In E consideriamo lo spazio di KÖNIG proiettivo $\mathfrak{P}^r_n$; dato un ricoprimento di B^r mediante aperti connessi U, ed una sezione locale nel sistema dei riferimenti proiettivi

(1) In [6] ed in [14] questi spazi sono detti spazi di KÖNIG generalizzati: in [6] sono detti spazi di KÖNIG degli spazi a connessione per i quali vi sono certi legami fra base e fibre.

$R_{(x)}$ di $P^n_{(x)}$ $(x \in U)$, esso è definito da $(n+1)^2$ forme differenziali lineari ω^α_β in du^H (u^H sono le coordinate locali in U) (²).

Gli spazi di König affini $\mathfrak{A}^r_n$ o euclidei $\mathfrak{E}^r_n$ si ottengono allorchè le fibre sono spazi affini reali $A^n_{(x)}$ (o, rispettivamente, euclidei $E^n_{(x)}$), ed i riferimenti sono basi adattate a tali spazi: la connessione è data da n^2+n forme ω^i, ω^i_k. Per un $\mathfrak{E}^r_n$, esse soddisfano alla

$$\omega^k_i + \omega^i_k = 0$$

Per il passaggio da una regione ad un'altra, si possono utilizzare le formule di cambiamento dei parametri date in [14], cfr. anche [3], [5], [9].

Tali spazi si potranno anche chiamare spazi a *connessione proiettiva*, o *affine*, ecc., qualora sia chiaro che le connessioni sono definite su un E che non è necessariamente legato al fibrato degli spazi tangenti a B^r. Se in ogni $P^n_{(x)}$ d'un $\mathfrak{P}^r_n$ esiste un iperpiano, tale che la varietà descritta al variare di x sia invariante per trasporti lungo qualsiasi cammino, a $\mathfrak{P}^r_n$ si può canonicamente associare uno spazio a connessione affine $\mathfrak{A}^r_n$.

Un caso particolarmente notevole è quello in cui è assegnata una sezione (anche solo locale) nel fibrato dei $P^p \subset P^n_{(x)}$ (al variare di x in B^r); il $P^p_{(x)}$ relativo ad x si dice *centro* e lo spazio s'indicherà con $\mathfrak{P}^r_{p,n}$, ed $R_{(x)}$ si assumerà in modo che i suoi elementi a_α $(0 \leq \alpha \leq p)$ appartengano a $P^p_{(x)}$. Analogamente si definiscono gli spazi $\mathfrak{A}^r_{p,n}$, $\mathfrak{E}^r_{p,n}$ ([12], [14]).

Si dirà *duale* di $\mathfrak{P}^r_{p,n}$ uno spazio di König definito sulla medesima B^r, avente per fibre gli spazi $\Pi^n_{(x)}$ duali dei $P^n_{(x)}$, per centro un $\Pi^p \subset \Pi^n_{(x)}$ e tale che il trasporto lungo una curva sia dato dall'omografia duale di quella definita da $\mathfrak{P}^r_{p,n}$ [12], [14].

Le forme di curvatura e torsione sono

$$\Omega^\beta_\alpha = d\omega^\beta_\alpha + \sum_\gamma \omega^\beta_\gamma \wedge \omega^\gamma_\alpha \qquad (\text{per } \mathfrak{P}^r_n),$$

$$\Omega^i = d\omega^i + \sum_j \omega^i_j \wedge \omega^j, \qquad \Omega^i_k = d\omega^i_k + \sum_j \omega^i_j \wedge \omega^j_k \quad (\text{per } \mathfrak{A}^r_n \text{ ed } \mathfrak{E}^r_n).$$

(²) Qui e nel seguito,
$i, j, k, \ldots$ sono indici variabili da 1 ad n;
$\alpha, \beta, \ldots$ sono indici variabili da 0 ad n;
$H, K, \ldots$ sono indici variabili da 1 ad r.
Altri tipi più particolari di indici verranno introdotti nel seguito, quando se ne presenterá l'opportunità.

Dato un $\mathfrak{P}_n^r$, per effetto d'un opportuno ciclo infinitesimo γ della base, a $P_{(x)}^n$ viene applicata l'omografia ·

$$K(\gamma): x^\alpha \to x^\alpha + \Delta x^\alpha = \sum_\beta (\delta_\beta^\alpha \mu - \tilde{\Omega}_\beta^\alpha) x^\beta,$$

mentre per $\mathfrak{A}_n^r$ o un $\mathfrak{E}_n^r$ si ha

$$K(\gamma): X^i \to X^i + \Delta X^i = -\tilde{\Omega}^i + \sum_k (\delta_k^i - \tilde{\Omega}_k^i) X^k,$$

essendo $\tilde{\Omega}_\alpha^\beta$, $\tilde{\Omega}^i$, $\tilde{\Omega}_k^i$ le forme bilineari associate ad Ω_α^β, Ω^i, Ω_k^i; le x^α sono coordinate omogenee, e le X^i non omogenee.

Il gruppo d'olonomia Φ_x e quello d'olonomia ristretto ρ_x si definiscono al solito modo. Supporremo sempre che la base sia connessa per archi differenziabili a tratti, ed allora, qualunque siano i punti x, y della base, Φ_x e Φ_y, come pure ρ_x e ρ_y, sono omografici (in $\mathfrak{A}_n^r$ affini, in $\mathfrak{E}_n^r$ isometrici). Se ρ_x si riduce all'identità e, la connessione si dirà *integrabile*.

Nel seguito, si dovranno frequentemente considerare le condizioni imposte alle forme di curvatura (o di torsione) dal fatto che il gruppo d'olonomia è d'un certo tipo: si potranno allora utilizzare le relazioni fra le forme di curvatura e l'algebra di LIE del gruppo d'olonomia ([9], p. 119 e segg.), o imporre che le $K(\gamma)$ siano di quel tipo. Ovviamente se tutte le applicazioni di Φ_x sono d'un certo tipo, altrettanto accade per quelle di ρ_x: i teoremi 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 7.1, 8.1 restano validi se, nella sola ipotesi, si sostituisce Φ_x a ρ_x.

Sarà assai utile la nozione di *spazio tangente* (relativo alla scelta, in ciascun $P_{(x)}^n$, d'un centro). Quando in $P_{(x)}^n$ è dato un punto $a_{(x)}$, lo spazio tangente è lo spazio proiettivo $< a_{(x)} >$ subordinato a $P_{(x)}^n$, congiungente le tangenti alle curve immagini delle curve differenziabili di B^r uscenti da x. Posto $a_{(x)} = a_0$, la dimensione $\delta[a_{(x)}]$ di $< a_x >$ è uguale al numero delle ω_0^k linearmente indipendenti; $\delta[a_{(x)}]$ non può superare né n né r. Nel caso d'un $\mathfrak{P}_{p,n}^r$ ($p > 0$), per spazio tangente relativo ad x s'intende lo spazio d'appartenenza degli spazi tangenti a tutti i $\mathfrak{P}_{0,n}^r$ corrispondenti (almeno localmente) al medesimo $\mathfrak{P}_n^r$ e tali che $a_{(x)} \in P_{(x)}^p$ [14].

Per un $\mathfrak{A}_n^r$ o un $\mathfrak{E}_n^r$ si possono dare delle definizioni in tutto analoghe. Conviene osservare che. a volte, si considererà, accanto alla sezione dei centri espressamente definita come tale, un'altra sezione, della quale si potrà ancora studiare lo spazio tangente. Nel caso d'un $\mathfrak{A}_n^r$, supporremo, a tale riguardo, gli $A_{(x)}^n$ completati con gli elementi impropri; allora, mentre il centro, definito come tale, s'intenderà sempre proprio, si considereranno anche spazi tangenti relativi a sezioni costituite da elementi impropri (per entrambe le questioni, cfr. i teor. 6.3 e 6.4).

3. Sia dato un $\mathfrak{P}^r_n$: se a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al secondo $K(\gamma)$ è, per ogni x ed ogni γ infinitesimo, un'omologia, $\mathfrak{P}^r_n$ s'indicherà con il simbolo $\underset{M}{\mathfrak{P}^r_n}$; quando poi $K(\gamma)$ è un'omologia speciale (sempre, s'intende, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al secondo) lo spazio si dirà un $\underset{N}{\mathfrak{P}^r_n}$ [3]. S'indicherà con $\underset{M}{\mathfrak{P}^r_{p,n}}$ un $\underset{M}{\mathfrak{P}^r_n}$ tale che il centro dell'omologia appartenga al centro $P^p_{(x)}$, e con $\underset{N}{\mathfrak{P}^r_{p,n}}$ un $\underset{N}{\mathfrak{P}^r_n}$ tale che il centro e l'asse (cioè l'iperpiano d'omologia) appartengano a $P^p_{(x)}$. In [12] un $\underset{M}{\mathfrak{P}^r_{0,n}}$ è indicato con ∇_M, ed un $\underset{N}{\mathfrak{P}^r_{0,n}}$ con ∇_N: essi si hanno per

$$\Omega^i_\alpha - \delta^i_\alpha\Omega^1_1 = 0 \quad \text{e} \quad \Omega^i_\alpha - \delta^i_\alpha\Omega^0_0 = 0 \tag{1}$$

rispettivamente. Accade che ([12], p. 101):

In $\underset{M}{\mathfrak{P}^r_{0,n}}$, *per ogni* $x \in B^r$, *si ha* $\delta[a_{(x)}] \leq 2$, *oppure la connessione è integrabile* (cioè ρ_x si riduce all'identità).

Dimostriamo che:

TEOR. 3.1. - *In un* $\underset{M}{\mathfrak{P}^r_{0,n}}$ $(n \geq 3)$, *se, in un* $P^n_{(x)}$, $\delta[a_{(x)}]=2$, *l'asse delle omologie* $K(\gamma)$ *è indipendente da* γ.

$K(\gamma)$ applica infatti il punto x^α nel punto $(\mu - \Omega^0_0)x^0 - \sum_i \Omega^0_i x^i$, $(\mu - \Omega^1_1)x^k$ $(1 \leq k \leq n)$, l'iperpiano d'omologia è quindi $(\Omega^0_0 - \Omega^1_1)x^0 + \sum_i \Omega^0_i x^i = 0$. D'altra parte, dalle (1_1) si trae [12]

$$(\Omega^1_1 - \Omega^0_0)\wedge\omega^k_0 = 0, \qquad \Omega^0_k\wedge\omega^j_0 - \delta^j_k\Omega^0_1\wedge\omega^1_0 = 0. \tag{2}$$

Essendo $\delta[a_{(x)}] = 2$, vi sono esattamente due ω^i_0 linearmente indipendenti: siano esse ω^1_0, ω^2_0. Si ha allora da (2_1) e da (2_2) (per $k \geq 3$)

$$\Omega^0_0 - \Omega^1_1 = a\omega^1_0\wedge\omega^2_0, \qquad \Omega^0_h = a_h\omega^1_0\wedge\omega^2_0 \qquad (h \geq 3)$$

[3] Per $n = 1$, s'intende che in un $\underset{N}{\mathfrak{P}^r_1}$ $K(\gamma)$ dev'essere una proiettività parabolica con A unito. Comunque, in tutti questi casi, può accadere che $K(\gamma)$ sia l'identità.

rispettivamente, mentre, per $k=1$, $j=2$ e per $k=2$, $j=1$,

$$\Omega_1^0 = \mu \wedge \omega_0^2, \qquad \Omega_2^0 = \nu \wedge \omega_0^1 \qquad (\mu,\ \nu \text{ forme lineari}).$$

Sostituendo queste ultime in (2_2), per $k=j=3$, $k=j=2$,

$$a_3\omega_0^1 \wedge \omega_0^2 \wedge \omega_0^3 - \mu \wedge \omega_0^2 \wedge \omega_0^1 = \nu \wedge \omega_0^1 \wedge \omega_0^2 - \mu \wedge \omega_0^2 \wedge \omega_0^1 = 0:$$

ma, per ipotesi, $\omega_0^1 \wedge \omega_0^2 \wedge \omega_0^3 = 0$, e dalle uguaglianze precedenti segue che μ, ν sono forme lineari in ω_0^1, ω_0^2. Quindi si può senz'altro porre

$$\Omega_k^0 = a_k\omega_0^1 \wedge \omega_0^2,$$

e l'asse dell'omologia $K(\gamma)$ risulta $ax^0 + \sum_k a_k x^k = 0$, e non dipende quindi da γ (c.v.d.). Inoltre:

Teor. 3.2. - *In un* $\underset{N}{\mathbb{P}}{}^r_{0,n}$, *se, in* x, $\delta[a_{(x)}] = 2$, *l'asse delle omologie* $K(\gamma)$ *è indipendente da* γ (anche per $n=2$).

Infatti, tale iperpiano è $\Sigma\Omega_i^0 x^i = 0$; dalle (1_2) si trae

$$\Omega_k^0 \wedge \omega_0^j = 0,$$

e quindi, poichè vi sono due ω_0^j linearmente indipendenti, ogni Ω_k^0 si esprime per mezzo di queste e l'iperpiano non dipende da γ (c.v.d.).

Sussistono pure le proprietà analoghe riferite agli spazi duali; riunendo queste e quelle, si può affermare che:

Teor. 3.3. - *Dati due spazi duali* $\mathbb{P}_n^r$, $\tilde{\mathbb{P}}_n^r$ $(n \geq 3)$ *se, rispetto ad una scelta dei centri* $a_{(x)}$ *uno di essi è un* $\underset{M}{\mathbb{P}}{}^r_{0,n}$, *senz'essere integrabile, e se* $\delta[a_{(x)}]$ *ha il valore massimo possibile, anche l'altro è un* $\underset{M}{\mathbb{P}}{}^r_{0,n}$ *rispetto ad una sezione opportuna.*

Dati due spazi duali $\mathbb{P}_n^r$, $\tilde{\mathbb{P}}_n^r$, *se, rispetto ad una scelta dei centri* $a_{(x)}$, *uno di essi è un* $\underset{N}{\mathbb{P}}{}^r_{0,n}$ *senz'essere integrabile, e se* $\delta[a_{(x)}]$ *ha il massimo valore possibile, anche l'altro è un* $\underset{N}{\mathbb{P}}{}^r_{0,n}$ *rispetto ad una sezione opportuna.*

Infatti, dato un $\underset{M}{\mathbb{P}}{}^r_{0,n}$, nelle attuali ipotesi l'iperpiano dell'omologia $K(\gamma)$ non dipende da γ; assunto questo come centro nello spazio duale si ha ancora un $\underset{M}{\mathbb{P}}{}^r_{0,n}$ (analogamente per $\underset{N}{\mathbb{P}}{}^r_{0,n}$) (c.v.d.).

Parlando di «gruppo d'omologie», intenderemo che le biiezioni del gruppo, salvo l'identità, sono omologie, escludendo che il gruppo si riduca all'identità.

TEOR. 3.4. – *Se il gruppo d'olonomia* ρ_x *d'un* $\mathbb{P}_n^r$ *è un gruppo d'omologie, v'è una sezione locale dello spazio o del suo duale tale che il relativo spazio tangente abbia in un punto generico dimensione* ≤ 2. *I punti, o gli iperpiani, che costituiscono la sezione sono allora i centri, o rispettivamente gli assi, delle omologie di* ρ_x.

Per $n = 2$, la proposizione è ovvia. Se $n \geq 3$, si osservi che, in un gruppo d'omologie in P^n, o il centro o l'asse sono fissi ([4]). Sia, ad esempio, fisso il centro: assumiamolo come centro $a_{(x)}$ di $P_{(x)}^n$. Anche le $K(\gamma)$ sono omologie di centro $a_{(x)}$, quindi lo spazio è del tipo $\underset{M}{\mathbb{P}_{0,n}^r}$; non essendo integrabile, si ha $\delta[a_{(x)}] \leq 2$. (Analogamente nel caso in cui sia fisso l'asse) (c.v.d.).

Segue che:

Se il gruppo d'olonomia Φ_x *d'un* $\mathbb{P}_n^r$ *non integrabile è costituito da omologie, v'è una sezione di* $\mathbb{P}_n^r$ *o del suo duale tale che la dimensione del relativo spazio tangente sia ovunque* ≤ 2. I punti, o gli iperpiani, che costituiscono la sezione sono i centri, o rispettivamente gli assi, delle omologie di Φ_x.

([4]) Il prodotto di due omologie in P^n $(n \geq 3)$ è infatti un'omologia solo se coincidono i centri o gli assi. Supponiamo, ad esempio, che questi ultimi siano distinti, ed assumiamoli come iperpiani $x^0 = 0$, $x^1 = 0$; le due omologie si possono scrivere

Ω_1) $y^0 = ax^0$, $y^i = a^i x^0 + cx^i$ di centro C_1 $(a - c, a^1, \ldots, a^n)$

Ω_2) $y^1 = \alpha x^1$, $y^m = \alpha^m x^1 + \gamma x^m$ $(m = 0, 2, \ldots, n)$ di centro C_2 $(\alpha^0, \alpha - \gamma, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$.

Il prodotto $\Omega_2 \circ \Omega_1$ è $y^0 = (\alpha^0 a^1 + \gamma a)x^0 + \alpha^0 cx^1$, $y^1 = \alpha a^1 x^0 + \alpha cx^1$, $y^p = (\alpha^p a^1 + \gamma a^p)x^0 + \alpha^p cx^1 + \gamma cx^p$ $(p, q = 2, \ldots, n)$. Nel determinante caratteristico, la radice caratteristica γc fa sì ch'esso abbia al più rango 2; perchè si abbia un'omologia debbono valere le

$$a^q \alpha^p - a^p \alpha^q = 0, \qquad a\alpha - a\gamma - \alpha c + c\gamma - \alpha^0 a^1 = 0,$$

e quindi C_1 e C_2 coincidono. La coincidenza dei centri e degli assi è sufficiente affinchè $\Omega_2 \circ \Omega_1$ sia un'omologia.

In P^2 v'è invece il gruppo costruito dall'identità e dalle tre omologie aventi per centri i vertici d'un dato triangolo, per assi i lati opposti, con la stessa caratteristica.

In [12] (pag. 116) sono date delle classi di $\mathfrak{A}_n^r$ per le quali ρ_x è un gruppo d'omologie.

Si ha poi che:

TEOR. 3.5. - *In una connessione proiettiva regolare su una* V_n $(n \geq 3)$, *non integrabile, il gruppo d'olonomia* Φ_x *non può essere un gruppo d'omologie con centro nel punto identificato con* x ($h(x)$ in [7], O_0 in [5]).

Infatti, in una connessione proiettiva regolare le ω_0^i sono linearmente indipendenti [5], e quindi $\delta[a_x] = n \geq 3$.

4. Nel seguito ci saranno utili due proprietà delle forme quadratiche esterne. Siano date in uno spazio vettoriale delle forme quadratiche esterne Φ, Φ', ... e delle forme lineari φ_i linearmente indipendenti. Allora

A) *Se valgono le relazioni*

$$\Phi \wedge \varphi_1 + \Phi' \wedge \varphi_2 = 0, \qquad \Phi \wedge \varphi_3 + \Phi' \wedge \varphi_4 = 0, \tag{3}$$

Φ *e* Φ' *sono del tipo*

$$\begin{aligned} \Phi &= (m\varphi_3 + n\varphi_4) \wedge \varphi_1 + (n\varphi_3 + p\varphi_4) \wedge \varphi_2, \\ \Phi' &= (n\varphi_3 + p\varphi_4) \wedge \varphi_1 + (p\varphi_3 + q\varphi_4) \wedge \varphi_2. \end{aligned} \tag{4}$$

B) *Se valgono le relazioni*

$$\begin{aligned} &\Phi \wedge \varphi_2 + \Phi' \wedge \varphi_3 = 0, \qquad \Phi \wedge \varphi_1 - \Phi'' \wedge \varphi_3 = 0, \\ &\Phi' \wedge \varphi_1 + \Phi'' \wedge \varphi_2 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

Φ, Φ', Φ'' *sono del tipo*

$$\begin{aligned} \Phi &= a\varphi_1 \wedge \varphi_2 + b\varphi_3 \wedge \varphi_2 + f\varphi_1 \wedge \varphi_3, \\ \Phi' &= f\varphi_1 \wedge \varphi_2 + g\varphi_1 \wedge \varphi_3 + h\varphi_2 \wedge \varphi_3, \\ \Phi'' &= b\varphi_2 \wedge \varphi_1 + h\varphi_1 \wedge \varphi_3 + k\varphi_2 \wedge \varphi_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Dalle (3) si trae che $\Phi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 = 0 = \Phi \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$, perciò Φ appartiene tanto all'ideale di φ_1, φ_2 che a quello di φ_3, φ_4 [11] ([5]): perciò

$$\Phi = (a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4) \wedge \varphi_1 + (b_3\varphi_3 + b_4\varphi_4) \wedge \varphi_2,$$

([5]) Cfr. pag. 91. E. CARTAN [4] indica tale sistema col nome di *anello* determinato dalle forme φ_1, φ_2 (o φ_3, φ_4): cfr. pag. 26.

ed analogamente per Φ'. Sostituendo nelle (3) si ha per Φ, Φ' una espressione del tipo (4). Analogamente si provano le (6).

5. TEOR. 5.1. - *Se il gruppo d'olonomia ρ_x d'un $\mathbb{P}_n^r$ $(n \geq 3)$ non integrabile lascia fissi i punti e gli iperpiani appartenenti ad una retta r_x, $\delta[r_x]$ è inferiore alla massima* $(2n-2)$.

Le omografie di ρ_x non identiche sono del tipo $[n-2, 1]$, oppure del tipo $[(n-2, 1)]$, o $[(n-1, 0)]$ (secondo le notazioni di PREDELLA).

In questo numero, l, m sono indici che prendono i valori 0, 1; t, u, v,... indici che prendono i valori 2, ..., n. Assumiamo r_x come retta $[a_0, a_1]$ del sistema di riferimento in $P^n_{(x)}$: avendosi

$$d[a_0 a_1] = \sum_t (\omega_0^t[a_t a_1] + \omega_1^t[a_0 a_t]) + (\cdot)[a_0 a_1],$$

$\delta[r_x]$ è uguale al numero delle forme ω_l^t linearmente indipendenti. Se i punti e gl'iperpiani appartenenti ad r_x, cioè a $x^2 = ... = x^n = 0$, sono uniti nelle omografie di ρ_x, si deve avere

$$\Omega_l^t = 0, \quad \text{e} \quad \Omega_l^m = \delta_l^m \Omega_0^0, \qquad \Omega_u^t = \delta_u^t \Omega_2^2. \tag{7}$$

Proviamo intanto che: *Se $\delta[r_x]$ è* (per un generico $x \in B^r$) ≥ 3, *$K(\gamma)$ è d'uno dei tipi* $[(n-2, 1)]$, $[(n-1, 0)]$ (vale a dire è speciale). Infatti, differenziando la (7_1), otteniamo

$$\Omega_t^t \wedge \omega_l^t - \omega_l^t \wedge \Omega_l^l = 0, \qquad \text{cioè } (\Omega_2^2 - \Omega_0^0) \wedge \omega_l^t = 0.$$

$\Omega_2^2 - \Omega_0^0$ deve appartenere all'ideale di ciascuna ω_l^t non nulla; se ve ne sono almeno tre linearmente indipendenti, essa è nulla. Quindi coincidono le radici caratteristiche $\mu - \Omega_0^0$, $\mu - \Omega_2^2$ di $K(\gamma)$, e l'asserto è provato. Supponiamo ora che $\delta[r_x] = 2n-2$ (e quindi ≥ 3); abbiamo le

$$\Omega_l^t = 0, \qquad \Omega_l^m = \delta_l^m \Omega_0^0, \qquad \Omega_t^u = \delta_t^u \Omega_0^0. \tag{8}$$

Differenziandole, si ottiene

$$\sum_u \Omega_u^m \wedge \omega_l^u = \delta_l^m \sum_u \Omega_u^0 \wedge \omega_0^u \tag{9_l^m}$$

$$\sum_l \Omega_t^l \wedge \omega_l^u = -\delta_t^u \sum_v \Omega_v^0 \wedge \omega_0^v. \tag{10_t^u}$$

Se $n \geq 4$, per ogni valore di t si possono trovare due valori u, v diversi da t. Applicando ad (10_t^u), (10_t^v) la proposizione A) del n. 4, si ottiene

$$(11) \qquad \begin{aligned} \Omega_t^0 &= (m_t \omega_0^u + n_t \omega_1^u) \wedge \omega_0^v + (n_t \omega_0^u + p_t \omega_1^u) \wedge \omega_1^v \\ \Omega_t^1 &= (n_t \omega_0^u + p_t \omega_1^u) \wedge \omega_0^v + (p_t \omega_0^u + q_t \omega_1^u) \wedge \omega_1^v. \end{aligned}$$

Se $n \geq 5$, si può trovare un valore w diverso da u, v, t: da (10_t^w) si ha $\sum_l \Omega_t^l \wedge \omega_l^w = 0$; se $\delta[r_x]$ ha il valore massimo, le ω_l^t sono linearmente indipendenti, e quindi $m_t = n_t = p_t = q_t = 0$, cioè

$$\Omega_t^l = 0.$$

Se $n = 4$, sostituendo le (11) in (9_1^0), (9_0^1) si ha ancora, se le ω_l^t sono linearmente indipendenti

$$\Omega_t^l = 0.$$

Resta da esaminare il caso $n = 3$: sommando (9_1^1) e (10_2^2) moltiplicando per 3, e sottraendo (10_3^3) otteniamo

$$(12) \qquad \Omega_2^0 \wedge \omega_0^2 + \Omega_2^1 \wedge \omega_1^2 = 0;$$

ed analogamente, sommando (9_1^1) con (10_3^3) moltiplicata per 3, e sottraendo (10_2^2)

$$(13) \qquad \Omega_3^0 \wedge \omega_0^3 + \Omega_3^1 \wedge \omega_1^3 = 0.$$

In virtù della proposizione A) del n. 4, da (12) e da (10_2^3) si trae

$$\begin{aligned} \Omega_2^0 &= (m\omega_0^2 + n\omega_1^2) \wedge \omega_0^3 + (n\omega_0^2 + p\omega_1^2) \wedge \omega_1^3, \\ \Omega_2^1 &= (n\omega_0^2 + p\omega_1^2) \wedge \omega_0^3 + (p\omega_0^2 + q\omega_1^2) \wedge \omega_1^3 \end{aligned}$$

e da (13) e da (10_3^2)

$$(14) \qquad \begin{aligned} \Omega_3^0 &= (\bar{m}\omega_0^2 + \bar{n}\omega_1^2) \wedge \omega_0^3 + (\bar{n}\omega_0^2 + \bar{p}\omega_1^2) \wedge \omega_1^3, \\ \Omega_3^1 &= (\bar{n}\omega_0^2 + \bar{p}\omega_1^2) \wedge \omega_0^3 + (\bar{p}\omega_0^2 + \bar{q}\omega_1^2) \wedge \omega_1^3. \end{aligned}$$

Si sostituisca in (9_1^0) ed il (9_0^1): se le ω_l^t fossero linearmente indipendenti, si avrebbe ancora $\Omega_t^l = 0$.

Se $\delta[r_x]$ fosse uguale a $2n - 2$, si avrebbe dunque $\Omega_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta \Omega_0^0$; ma ciò è in contrasto con la supposta non integrabilità di $\mathfrak{P}_n^r$. Quindi $\delta[r_x] \leq 2n - 3$.

OSSERVAZIONE. – Il più ampio gruppo connesso $\mathfrak{G}$ d'omografie di P^n che lasciano fissi i punti e gli iperpiani appartenenti ad una retta è (a meno d'una omografia) il seguente

$$x^{l\prime} = x^l + \sum_t a_t^l x^t, \qquad x^{t\prime} = bx^t \qquad (b > 0),$$

e dipende quindi da $2n - 1$ parametri. Non ci si può però riferire, nell'enunciato del teorema or ora dimostrato, ad «un gruppo d'omografie di tipo $[n-2, 1]$» (come s'è fatto nel numero precedente); infatti, intanto, in $\mathfrak{G}$ vi sono delle omografie di tipo più particolare, ed inoltre vi sono dei gruppi d'omografie nei quali un elemento generico è del tipo $[n-2, 1]$, senza che alcuno degli spazi fondamentali sia fisso: si pensi, ad esempio, al gruppo delle omografie di P^3 che conservano le rette d'una assegnata schiera rigata.

6. Consideriamo ora degli $\mathfrak{A}_n^r$. In A^n diremo «gruppo di similitudini» e «gruppo di movimenti» dei gruppi che si possono trasformare con un'affinità, rispettivamente, in un gruppo di similitudini o in uno di movimenti.

Dato un $\mathfrak{A}_n^r$, sui vettori degli $A_{(x)}^n$ viene definita in modo naturale una connessione lineare $\mathfrak{L}_n^r(\mathfrak{A})$ cioè a gruppo fondamentale $GL(n, R)$), le cui forme sono le ω_i^k. Definite le direzioni non orientate di $A_{(x)}^n$ come i punti dello spazio $P^{n-1}(A_{(x)})$ ([1], § 3, n. 1), sul sistema di tali P^{n-1} viene indotta una connessione proiettiva $\mathfrak{P}_{n-1}^r(\mathfrak{A})$, le cui forme sono ancora le ω_i^k (o più precisamente $\omega_i^k - \frac{\delta_i^k}{n} \Sigma\, \omega_j^j$).

Data una connessione λ, con $\Phi_x(\lambda)$ $[\rho_x(\lambda)]$ s'indicherà il gruppo $\Phi_x[\rho_x]$ di λ.

TEOR. 6.1. – *Se e solo se* $\Phi_x(\mathfrak{P}_{n-1}^r(\mathfrak{A})) = \{e\}$, $\Phi_x(\mathfrak{A}_n^r)$ *è costituito da omotetie e traslazioni* [*e* $\Phi_x(\mathfrak{L}_n^r(\mathfrak{A}))$ *da omotetie*]; *se e solo se* $\mathfrak{P}_{n-1}^r(\mathfrak{A})$ *è integrabile*, $\rho_x(\mathfrak{A}_n^r)$ *è costituito da omotetie a rapporto positivo e da traslazioni* [*e* $\rho_x(\mathfrak{L}_n^r(\mathfrak{A}))$ *da omotetie a rapporto positivo*]. *Se e solo se* $\Phi_x(\mathfrak{L}_n^r(\mathfrak{A})) = \{e\}$, $\Phi_x(\mathfrak{A}_n^r)$ *è costituito da traslazioni: se e solo se* $\rho_x(\mathfrak{L}_n^r(\mathfrak{A})) = \{e\}$, $\rho_x(\mathfrak{A}_n^r)$ *è il gruppo delle traslazioni, o si riduce all'identità.*

Infatti, $\Phi_x(\mathfrak{P}_{n-1}^r(\mathfrak{A}))$ e $\rho_x(\mathfrak{P}_{n-1}^r(\mathfrak{A}))$ sono costituiti dalle omografie indotte in $P^{n-1}(A_{(x)})$ dalle affinità di $\Phi_x(\mathfrak{A}_n^r)$ e $\rho_x(\mathfrak{A}_n^r)$ rispettivamente. Affinchè tali omografie siano identiche, occorre e basta che le affinità siano omotetie o traslazioni. Le eventuali omotetie di ρ_x sono a rapporto positivo, poichè ρ_x è connesso per archi [9].

I gruppi $\Phi_x(\mathfrak{L}_n^r(\mathfrak{A}))$ $\rho_x(\mathfrak{L}_n^r(\mathfrak{A}))$ sono costituiti dagli isomorfismi indotti, nello spazio dei vettori di $A_{(x)}^n$, dalle affinità di $\Phi_x(\mathfrak{A}_n^r)$, $\rho_x(\mathfrak{A}_n^r)$: se tali isomorfismi sono identici, le affinità sono traslazioni (e viceversa). Se $\mathfrak{L}_n^r(\mathfrak{A})$ è integrabile, si può applicare al nostro caso il ragionamento seguito in [9] (n. 68): σ_x è qui $\rho_x(\mathfrak{L}_n^r)$, e, tenendo conto che esso si riduce all'identità, si conclude che ρ_x è il gruppo di tutte le traslazioni, o si riduce all'identità.

Se $\mathfrak{P}_{n-1}^r(\mathfrak{A})$ è integrabile, per effetto di $\mathfrak{L}_n^r$ un vettore di $A_{(x)}^n$ viene trasportato, lungo due cammini omotopi, in due vettori ugualmente orientati: $\mathfrak{A}_n^r$ si può dire, quindi, *a parallelismo assoluto ristretto* (o *locale*) [12].

TEOR. 6.2. - *Consideriamo un* $\mathfrak{A}_n^r$ $(n \geq 3)$ *il cui gruppo* ρ_x *sia un gruppo di similitudini che lasciano invariate* $n-2$ *direzioni indipendenti; detta* Γ_x *la giacitura da esse individuata, se* $\delta[\Gamma_x] \geq 3$, *la connessione è a parallelismo assoluto ristretto.*

In questo numero p, q saranno indici che prendono i valori 1, 2; ξ, η, ... indici variabili da 3 ad n. In ogni $A_{(x)}^n$ si può assumere il riferimento in modo che ρ_x sia rappresentato da equazioni di similitudini, ed i vettori $\vec{e}_\xi$ della base siano paralleli a $\Gamma_{(x)}$. Tutte le direzioni di Γ_x sono unite, e si ha

$$\Omega_i^k + \Omega_k^i = 2\delta_i^k\Omega, \qquad \Omega_\xi^p = 0, \qquad \Omega_\xi^\eta = \delta_\xi^\eta\Omega. \tag{15}$$

Avendosi

$$d[\vec{e}_\xi] = \Sigma \{ \omega_3^p[\vec{e}_p\vec{e}_4 \dots] + \omega_4^p[\vec{e}_3\vec{e}_p \dots] + \dots \} + (\cdot)[\vec{e}_3\vec{e}_4 \dots]$$

$\delta[\Gamma_x]$ è uguale al numero delle forme ω_ξ^p linearmente indipendenti. Differenziando le (15) si ha, fra l'altro

$$\Omega_1^2 \wedge \omega_\xi^1 = \Omega_1^2 \wedge \omega_\xi^2 = 0. \tag{16}$$

Ω_1^2 deve perciò appartenere all'ideale di ciascuna forma ω_ξ^p non nulla: se ve ne sono almeno tre linearmente indipendenti, segue $\Omega_1^2 = 0$, e quindi $\Omega_i^k = \delta_i^k\Omega$. $\mathfrak{P}_{n-1}^r(\mathfrak{A})$ è quindi integrabile, ed il gruppo ρ_x di $\mathfrak{A}_n^r$ è un gruppo d'omotetie e traslazioni.

Il teorema precedente si completa con questo:

TEOR. 6.3. - *Consideriamo un* $\mathfrak{B}^r_{0,n}$ $(n \geq 3)$, *a torsione nulla, il cui gruppo d'olonomia* ρ_x *sia un gruppo di similitudini che lasciano invariate* $n-2$ *direzioni indipendenti: sia* Γ_x *la giacitura da esse individuata. Se* $\delta[a_x] \geq 3$, ρ_x *è costituito da movimenti, e la connessione è localmente identificabile ad una connessione riemanniana; se* $\delta[a_x] \geq 3 \leq \delta[\Gamma_x]$, *la connessione è integrabile.*

Analogamente a quanto s'è visto nel n. 3, $\delta[a_x]$ è uguale al numero delle forme ω^i linearmente indipendenti. Oltre alle (15), (16) si ha, per l'assenza di torsione

$$\Omega^i = 0, \tag{17}$$

dalla quale, per differenziazione esterna, e tenendo conto delle relazioni valide

$$\Omega \wedge \omega^1 - \Omega_1^2 \wedge \omega^2 = 0, \qquad \Omega \wedge \omega^2 + \Omega_1^2 \wedge \omega^1 = 0, \qquad \Omega \wedge \omega^\xi = 0. \tag{18}$$

Dalle prime due, $\Omega \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0$. Supponiamo che $\delta[a_x] \geq 3$: se ω^1, ω^2 sono linearmente indipendenti, si ha $\Omega = g\omega^1 \wedge \omega^2$ (v. sopra), e, sostituendo in (18_3), $g\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^\xi = 0$. Poichè vi sono almeno tre ω^i linearmente indipendenti, almeno un'ω^ξ non è combinazione lineare di ω^1, ω^2, e quindi $g = 0$, da cui $\Omega = 0$.

Se fra ω^1, ω^2 ve n'è una sola linearmente indipendente (e sia questa ω^1), si potrà scrivere $\omega^2 = m\omega^1$. Allora, sostituendo in (18_1) e (18_2), si trae $\Omega \wedge \omega^1 = 0$. Vi sono necessariamente almeno due ω^ξ tali che esse ed ω^1 siano linearmente indipendenti: Ω deve appartenere all'ideale di ciascuna di esse, e quindi è nullo. Se $\omega^1 = \omega^2 = 0$, vi sono almeno tre ω^ξ linearmente indipendenti, e, ragionando come sopra, si trova $\Omega = 0$.

Le trasformazioni del gruppo ρ_x sono perciò dei movimenti. La restrizione della connessione ad una regione semplicemente connessa di B^r si può identificare ad una connessione euclidea (cfr. per analogia [2]); essendo nulla la torsione, questa risulta riemanniana.

Se fosse contemporaneamente $\delta[a_x] \geq 3$, $\delta[\Gamma_x] \geq 3$, si avrebbe $\Omega = 0$, $\Omega_1^2 = 0$, e la connessione risulterebbe integrabile.

TEOR. 6.4. - *Sia dato un* $\mathfrak{B}^r_{0,n}$ *a torsione nulla, tale che* ρ_x *sia un gruppo di similitudini che lasciano invariate* $n-2$ *direzioni indipendenti; detto* R_x *lo spazio che le proietta dal centro* a_x, *se* $\delta[R_x] \geq 4$, *la connessione è a parallelismo assoluto ristretto.*

Scelto il riferimento come più sopra, $\delta[R_x]$ è dato dal numero di forme ω^p, ω^p_ξ linearmente indipendenti. Valgono ovviamente le (15), (16), (17), (18); se $\delta[R_x] \geq 4$, e le ω^p_ξ linearmente indipendenti sono almeno tre, nel qual caso ρ_x è certo costituito da omotetie e traslazioni (cfr. teor. 6.2): oppure ve n'è due, e, indicatele con σ, σ', abbiamo $\Omega^2_1 = g\sigma \wedge \sigma'$. Sostituendo nelle (18) si ha $g\sigma \wedge \sigma' \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0$: quindi, o $\sigma \wedge \sigma' \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0$, ed allora $\delta[R_x] \leq 3$, oppure $g = 0$, ed anche $\Omega^2_1 = 0$, e ρ_x è costituito da omotetie e traslazioni. Se vi fossero meno di due ω^p_ξ linearmente indipendenti, si avrebbe $\delta[R_x] < 4$.

Dal teor. 6.3 scende la proprietà seguente:

TEOR. 6.5. - *Se, per un* $\mathfrak{A}^r_n$, ρ_x *è un gruppo di similitudini che lasciano fisso un punto* a_x *ed* $n - 2$ *direzioni indipendenti, e* $\delta[a_x] \geq 3$, ρ_x *è costituito da movimenti; se anche* $\delta[\Gamma_x] \geq 3$ (con il medesimo significato per Γ_x), $\mathfrak{A}^r_n$ *è integrabile.*

Infatti, se ρ_x lascia invariato a_x, l'$\mathfrak{A}^r_{0,n}$ corrispondente alla scelta del centro in a_x è a torsione nulla.

7. Diamo ora un teorema nell'ordine d'idee dei precedenti, riferentesi ad una connessione lineare su una V_n differenziabile.

TEOR. 7.1. - *Se il gruppo d'olonomia* ρ_x *d'una connessione lineare a torsione nulla su una* V_n *differenziabile* ($n \geq 3$) *è un gruppo di similitudini con almeno due direzioni unite, esso è un gruppo di movimenti, e la connessione si può localmente identificare ad una connessione riemanniana.*

Se $U, \ldots$ sono gli aperti connessi che ricoprono V_n, di cui alla definizione di connessione lineare [9], assumiamo, per ogni $x \in U$, un coriferimento, cioè un'n-pla di forme θ^i linearmente indipendenti, in modo ρ_x sia rappresentato da equazioni di similitudini: se vi sono delle direzioni unite, sono unite le direzioni della giacitura Γ_x ad esse parallela. Sia k la dimensione di Γ_x; detti p, q degli indici variabili da 1 ad $n - k$, e λ un indice variabile da $n - k + 1$ ad n, possiamo assumere i vettori $[\vec{e}_\lambda]$ della base parallelamente a Γ_x. Abbiamo

$$(19) \qquad \Omega^k_i + \Omega^i_k = 2\delta^k_i\Omega, \qquad \Omega^i_\lambda = \delta^i_\lambda\Omega, \qquad \Omega^i = 0.$$

Differenziando (19_3) si trova

$$(20) \qquad \sum_q \Omega^p_q \wedge \theta^q = 0, \qquad \Omega \wedge \theta^\lambda = 0,$$

dalla prima delle quali, se $n > k$,

$$\Omega \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^{n-k} = 0. \tag{21}$$

Ora, se $k \geq 3$, vi sono almeno tre θ^λ, e da (20_2) segue che Ω, dovendo appartenere all'ideale di ciascuna di esse, è nullo. Se $k=2$, sempre da (20_2) si ottiene $\Omega = g\theta^{n-1} \wedge \theta^n$: ma, essendo $n \geq 3 > k$ sussiste la (21), e sostituendo in questa si trova $g = 0$, cioè $\Omega = 0$. ρ_x è dunque costituito da movimenti, e la restrizione della connessione ad una regione semplicemente connessa di V_n si può considerare, con opportuna scelta dei riferimenti ammissibili in ciascuna fibra, una connessione riemanniana.

Questo teorema vale, più in generale, per un $\mathfrak{A}^n_{0,n}$ con $\delta[a_x] = n$.

8. In questo numero consideriamo due proprietà sugli $\mathfrak{A}^r_n$ per i quali ρ_x è un gruppo di similitudini, con ipotesi più deboli sulle direzioni unite (in questo numero, p, $q = 1, 2, 3$; π, $\rho = 4, \dots, n$).

TEOR. 8.1. - *Consideriamo un* $\mathfrak{A}^r_n$ $(n \geq 5)$ *per il quale* ρ_x *è un gruppo di similitudini che lasciano invariate* $n - 3$ *direzioni indipendenti; detta* Γ_x *la loro giacitura, se* $\delta[\Gamma_x]$ *è massima, la connessione è a parallelismo assoluto ristretto.*

Le direzioni di Γ_x sono tutte unite. Scegliamo in ciascun $A^n_{(x)}$ il riferimento in modo che ρ_x sia rappresentato da equazioni di similitudini, e Γ_x sia parallela ai vettori $\vec{e}_n$. Avremo $\Omega^k_i + \Omega^i_k = 2\delta^k_i \Omega$, $\Omega^k_\pi = \delta^k_\pi \Omega$, dalle quali, per differenziazione esterna

$$\sum_{q \neq p} \Omega^p_q \wedge \omega^q_\pi = 0. \tag{22}$$

Dalle (22) si deduce, grazie alla B) del n. 4, che le forme Ω^2_1, Ω^3_2, Ω^1_3 appartengono all'anello esterno [11] delle forme ω^p_π, per un determinato π. Questo si può ripetere per un valore $\rho \neq \pi$ (in quanto $n \geq 5$); se $\delta[\Gamma_x]$ è massima, le ω^p_π sono linearmente indipendenti, ed allora le Ω^q_p $(p \neq q)$ sono nulle, e la connessione è a parallelismo assoluto ristretto.

Se $n = 4$, l'argomentazione precedente non è più valida. Però, se si aggiunge l'ipotesi che la torsione sia nulla e $\delta[R_x] = 6$ (cfr. teor. 6.4), si deduce che la connessione è integrabile.

Si ha infatti $\Omega^i = 0$, dalle quali, per differenziazione esterna,

$$\sum_q \Omega^p_q \wedge \omega^q = 0, \quad \Omega \wedge \omega^4 = 0, \tag{23}$$

da cui

$$\Omega \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = 0.$$

Per ipotesi, le ω^p sono linearmente indipendenti, e quindi Ω appartiene al loro ideale. Sostituendo tutte le relazioni trovate in (23) si trae che $\Omega = \Omega_q^p = 0$, e la connessione è integrabile.

OSSERVAZIONE. - Se nei teoremi 6.2, 8.1 si suppone che ρ_x sia un gruppo di movimenti, mantenendo fisse le altre ipotesi, si conclude che ρ_x è costituito da traslazioni. Nel teor. 6.4, se ρ_x è costituito da movimenti e se $\delta[R_x] \geq 3$, la connessione è integrabile.

9. In un $\mathfrak{E}^r_{0,n}$, ciascun $E^n_{(x)}$ è uno spazio euclideo: vedremo ora che la connessione data in $E = \bigcup E^n_{(x)}$ definisce in ogni spazio tangente a B^r una certa struttura metrica.

TEOR. 9.1. - *Un $\mathfrak{E}^r_{0,n}$ definisce una metrica semidefinita positiva sulla base B^r; essa risulta definita positiva se e solo se, per ogni $x \in B^r$. $\delta[a_x] = r$.*

In un $\mathfrak{A}^r_{0,n}$ (o $\mathfrak{E}^r_{0,n}$) sia $\{\theta^H\}$ un coriferimento definito in una regione di B^r. Abbiamo relazioni del tipo

$$\omega^i = \sum \gamma^i_H \theta^H. \tag{24}$$

La connessione definisce, attraverso le ω^i, una proiezione dei tensori covarianti di $A^n_{(x)}$ nei tensori del medesimo tipo sullo spazio tangente in x a B^r. Se $t_{i_1 \dots i_j}$ è un tensore definito in $A^n_{(x)}$, ad esso si associa

$$T_{H_1 \dots H_j} = \sum t_{i_1 \dots i_j} \gamma^{i_1}_{H_1} \cdots \gamma^{i_j}_{H_j}. \tag{25}$$

Analogamente si definisce una proiezione dei tensori controvarianti definiti nello spazio tangente a B^r nei tensori del medesimo tipo definiti in $A^n_{(x)}$:

$$t^{i_1 \dots i_j} = \gamma^{i_1}_{H_1} \cdots \gamma^{i_j}_{H_j} T^{H_1 \dots H_j}. \tag{26}$$

Queste proiezioni sono distinte dall'immagine e dall'immagine reciproca per effetto della proiezione canonica di E su B^r [9], che applicano i tensori controvarianti dello spazio tangente ad E su quelli dello spazio tangente a B^r, ed i tensori covarianti di questo su quelli di E.

Se lo spazio è del tipo $\mathbb{E}_n^r$, in ciascuna fibra è definito un tensore fondameutale $g_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k$, dove $\{ \vec{e}_i \}$ è una base qualsiasi. Allora

la proiezione del tensore fondamentale è un tensore doppio covariante simmetrico

$$G_{HJ} = \Sigma\, g_{hj} \gamma_H^h \gamma_J^j \tag{27}$$

e la metrica individuata da quest'ultimo, $\Sigma\, g_{HJ} \theta^H \theta^J$, *è semidefinita positiva.*

Infatti, $\Sigma G_{HJ} \theta^H \theta^J = \Sigma\, g_{hj} \gamma_H^h \gamma_J^j \theta^H \theta^J = g_{ik} \omega^i \omega^k \geq 0$ per ogni valore di ω^i, ω^k, e quindi per ogni θ^H.

Tale metrica è definita positiva se da

$$\Sigma\, G_{HJ} \theta^H \theta^J = 0 \tag{28}$$

segue $\theta^H = 0$. Ora, essendo la metrica $\Sigma\, g_{hj} \omega^h \omega^j$ definita positiva, da (28) segue $\omega^h \equiv \Sigma\, \gamma_H^h \theta^H = 0$, e da questa segue $\theta^H = 0$ allorchè il rango di $\| \gamma_H^h \|$ è uguale ad r, cioè se $\delta[a_x] = r$.

Se $\delta[a_x] < r$ (altri casi non possono presentarsi), la metrica non è definita positiva.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, cap. VI, Hermann, Paris, 1947.

[2] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

[3] E. Cartan, *Les espaces à connexion projective*, Mem. Sem. Anal. Vectorielle, *4*, 147 (1937).

[4] E. Cartan, *Les systèmes différentielles extérieures et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris, 1945.

[5] I. Cattaneo Gasparini, *Sulle connessioni proiettive*, Ann. di Mat., (4) *50*, 467-473 (1960).

[6] B. Cenkl, *Les variétés des König généralisées*, Czech. Math. Journ., *14* (*89*), 1-21 (1964).

[7] T. Hangan, *Sur les connexions projectives*, Revue de Mathém. pures et appl. de la R.P.R., *3*, 265 276 (1958).

[8] R. KÖNIG, *Beitrage zu einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Jahresb. d. Deutsch. Math. Verein., *28*, 213 228 (1920).

[9] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Roma, 1955.

[10] J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*, Springer, Berlin, 1954.

[11] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, Docet, Roma, 1956.

[12] F. SPERANZA, *Sulle connessioni prospettive*, Atti Acc. Sci. Ist. Bologna, (11) *10*, 91-122 (1963).

[13] A. ŠVEC, *Congruences de droites dans les espaces réglés à connexion projective*, Czech. Math. Journ., 7 (*82*), 96-114 (1957).

[14] A. ŠVEC, *L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géometrie différentielle*, Czech. Math. Journ., *10* (*85*), 523 550 (1960).

[15] A. ŠVEC, *Au sujet de la définition des variétés de König*, Czech. Math. Journ., *14* (*89*) 222-233 (1964).

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U.M.I.
il 30 marzo 1966.