BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GAETANO CARADONNA

Su alcune classi di sistemi di equazioni integrodifferenziali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.1, p. 1–11.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

SEZIONE SCIENTIFICA
BREVI NOTE

Su alcune classi di sistemi di equazioni integrodifferenziali

GAETANO CARADONNA (Bari) (*)

Sunto. - *Si stabiliscono teoremi di esistenza per certi sistemi integrodifferenziali, in ipotesi abbastanza generali per i dati, estendendo alcuni risultati relativi a noti sistemi integrodifferenziali. In particolare vengono estesi anche alcuni noti risultati sull'esistenza di soluzioni per un problema di valori iniziali relativo all'equazione* $s = f(x, y, z, p, q)$.

Consideriamo il seguente problema:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = F\left(x,\ y,\ \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{y} u(x,\ t)dt,\ \int_{\beta(y)}^{x} v(t,\ y)dt,\ u,\ v\right) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = G\left(x,\ y,\ \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{y} u(x,\ t)dt,\ \int_{\beta(y)}^{x} v(t,\ y)dt,\ u,\ v\right) \end{cases} \qquad (x,\ y) \in R$$

$$(2)\qquad \begin{cases} u[\beta(y),\ y] = F_1\left[y,\ \displaystyle\int_{\alpha(\beta(y))}^{y} u(\beta(t),\ t)dt,\ v(\beta(y),\ y)\right], & c \leq y \leq d \\[2ex] v[x,\ \alpha(x)] = G_1\left[x,\ \displaystyle\int_{\beta(\alpha(x))}^{x} v(t,\ \alpha(t))dt\right], & a \leq x \leq b, \end{cases}$$

dove R è il rettangolo definito dalle limitazioni:

$$a \leq x \leq b, \qquad c \leq y \leq d,$$

le funzioni $F(x, y\ z, s, u, v)$ e $G(x, y, z, s, u, v)$ sono definite nello strato

$$S: (x,\ y) \in R,\ |z|,\ |s|,\ |u|,\ |v| < +\infty,$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 13 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1964-65.

le funzioni $F_1(y, z, v)$ e $G_1(x, s)$ sono definite rispettivamente negli strati

$$S_1: c \leq y \leq d, \qquad |z|, \qquad |v| < +\infty,$$

$$S_2: a \leq x \leq b, \qquad |s| < +\infty,$$

e inoltre

$$y = \alpha(x), \qquad a \leq x \leq b,$$

$$x = \beta(y), \qquad c \leq y \leq d$$

sono le equazioni rispettivamente di due archi di curva C_1 e C_2, il primo diagramma rispetto all'asse x e il secondo diagramma rispetto all'asse y ed entrambi interamente contenuti in R, cioè:

$$c \leq \alpha(x) \leq d, \qquad a \leq x \leq b \quad \text{e} \quad a \leq \beta(y) \leq b, \qquad c \leq y \leq d,$$

$\alpha(x)$ e $\beta(y)$ essendo continue con le loro derivate prime.

Nel caso particolare in cui sia F indipendente da s, G indipendente da z, $\alpha(x) \equiv 0$, $\beta(y) \equiv 0$, $F_1 \equiv 0$ e $G_1 \equiv 0$, sono stati stabiliti abbastanza generali teoremi di esistenza di almeno una soluzione del problema (1), (2) da G. Caradonna [1] e G. Santagati [6], [7]; rimando ai lavori [6], [7] per una storia, a quanto mi consta abbastanza completa, di tale caso.

Scopo di questa Nota è quello di estendere il risultato stabilito in [1] al problema (1), (2), laddove intenderò per soluzione di tale problema una coppia di funzioni $u(x, y)$, $v(x, y)$ continue in R, che siano dotate delle derivate che figurano nelle (1) e verifichino le (1) e (2). Ed invero pervengo nel n. 1 ad un teorema di esistenza per il problema (1), (2), in ipotesi per F e G del tipo di quelle fatte in [1] nel caso in cui esse siano indipendenti rispettivamente da s e da z. La dimostrazione di tale teorema è in sostanza ricondotta a quella della esistenza di almeno un punto unito di una certa trasformazione funzionale.

Un teorema della stessa natura si può poi stabilire, come è riportato nel n. 2, per il seguente problema:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = F(x, y, U(x, y), u, v) \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = G(x, y, U(x, y), u, v) \end{cases} \qquad (x, y) \in R$$

$$(4) \qquad \begin{cases} u[\beta(y), y] = F_1[y, U(\beta(y), y), v(\beta(y), y)] & c \leq y \leq d \\ v[x, \alpha(x)] = G_1[x, U(x, \alpha(x))] & a \leq x \leq b \end{cases}$$

con

$$U(x, y) = \int_{\alpha(x)}^{y} u(x, t)dt + \int_{x_0}^{x} [v(t, \alpha(t)) + u(t, \alpha(t))\alpha'(t)]dt + \int_{y_0}^{\alpha(x_0)} u(x_0, t)dt + z_0,$$

dove $(x_0, y_0) \in R$ e z_0 è un numero reale assegnato.

Da tale teorema si ricava poi facilmente, nel n. 3, un abbastanza generale teorema d'esistenza per un caso particolare di un problema relativo all'equazione $s = f(x, y, t, p, q)$, posto da Z. SZMYDT [8] (1).

1. – Consideriamo lo spazio Σ i cui elementi sono le coppie ordinate $W \equiv [z(x, y), v(x, y)]$, con $z(x, y)$ e $v(x, y)$ appartenenti allo spazio $C^{(0)}$ delle funzioni continue in R. Tale spazio è lineare, normale e completo con norma

$$\| W \| = \max_R | z | + \max_R | v | .$$

Facciamo la seguente ipotesi:

A) Siano $F(x, y, z, s, u, v)$ e $G(x, y, z, s, u, v)$ due funzioni continue e limitate in S, $F_1(y, z, v)$ e $G_1(x, s)$ due funzioni continue e limitate rispettivamente in S_1 ed. S_2. Poniamo: $\overline{F} = \sup\limits_S | F(x, y, z, s, u, v) |$, $\overline{G} = \sup\limits_S | G(x, y, z, s, u, v) |$, $\overline{F}_1 = \sup\limits_{S_1} | F_1(y, z, v) |$, $\overline{G}_1 = \sup\limits_{S_2} | G_1(x, s) |$.

B) Indicato con I l'insieme delle coppie $[z, v] \in \Sigma$ tali che

$$| z | \leq (\overline{F}L + \overline{F}_1)L, \quad | z(x, y) - z(\overline{x}, y) | \leq [(\overline{F}L + \overline{F}_1)D + \overline{F}L] \, | x - \overline{x} | ,$$

$$| z(x, y) - z(x, \overline{y}) | \leq (\overline{F}L + \overline{F}_1) \, | y - \overline{y} | ,$$

$$| v | \leq \overline{G}L + \overline{G}_1, \quad | v(x, y) - v(x, \overline{y}) | \leq \overline{G} \, | y - \overline{y} | ,$$

dove $L = \max \{ b - a, d - c \}$ e $D = \max\limits_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} \{ | \alpha'(x) | , | \beta'(y) | \}$, per ogni fissato $W \in I$ e per ogni fissato $y \in [c, d]$, il problema differenziale ordinario

$$(5)_{z, v} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = F(x, y, z(x, y), s(x, y), u, v(x, y)) & (x, y) \in R \\ u[\beta(y), y] = F_1[y, z(\beta(y), y), v(\beta(y), y)] & c \leq y \leq d \end{cases}$$

(1) Teoremi di esistenza per tale problema, nel caso generale, sono stati stabiliti, oltre quello ottenuto dalla SZMYDT in [8], anche da J. KISYNSKI, e per questo rinvio al lavoro [5] e alla bibliografia ad esso unita.

dove

$$s(x,\ y)=\int_{\beta(y)}^{x} v(t,\ y)dt, \tag{6}$$

non ammetta più di una soluzione ([2]).

C) Comunque si assegnino un $x_0 \in [a,\ b]$, due funzioni $z(y)$ ed $s(y)$ continue in $[c,\ d]$ e tali che $|\ z(y)\ | \leq (\overline{F}L + \overline{F}_1)L$, $|\ s(y)\ | \leq \leq (\overline{G}L + \overline{G}_1)L$, e una successione $\{ u_n(y) \}$ di funzioni continue in $[c,\ d]$ e tali che $|\ u_n(y)\ | \leq \overline{F}L + \overline{F}_1$, l'equazione

$$V(y)=\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha(x_0)}^{y} G(x_0,\ \tau,\ z(\tau),\ s(\tau),\ u(\tau),\ V(\tau))d\tau + G_1[x_0,\ s(\alpha(x_0))], \qquad c\leq y\leq d$$

non abbia più di una soluzione (assolutamente) continua $V(y)$ ([3]).

Dimostriamo il seguente teorema:

I. - *Nelle ipotesi A), B) e C) il problema* (1), (2) *ammette almeno una soluzione.*

([2]) L'ipotesi *A*) assicura, come è noto, l'esistenza di una soluzione $u(x,\ y)$ per il problema $(5)_{z,\ v}$ la quale, essendo unica per l'ipotesi *B*) stessa, risulta continua in base ad un noto teorema di E. Pini (cfr. Nota: ***Sulla continuità degli integrali dell'equazione** $y' = f(x,\ y,\ \gamma)$ **rispetto ai valori iniziali,*** Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett. (2), 63 (1930), 531-534).

([3]) In base a quanto ha mostrato recentemente R. Fiorenza (cfr. n. 5 di [4]), alla ipotesi *C*) si può sostituire la seguente ad essa equivalente:

C_1) *Per ogni* $x_0 \in [a,\ b]$ *e comunque si assegnino tre funzioni* $z(y)$, $s(y)$ *ed* $u(y)$ *continue in* $[c,\ d]$ *e tali che* $|\ z(y)\ | \leq (\overline{F}L + \overline{F}_1)L$, $|\ s(y)\ | \leq \leq (\overline{G}L + \overline{G}_1)L$, $|\ u(y)\ | \leq \overline{F}L + \overline{F}_1$, *il problema differenziale ordinario*

$$(*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = G(x_0,\ y,\ z(y),\ s(y),\ u(y),\ v) & c\leq y\leq d \\ v[x_0\ ,\ \alpha(x_0)] = G_1[x_0,\ s(\alpha(x_0))] \end{cases}$$

ammetta in $[c,\ d]$ *una sola soluzione, l'unicità essendo uniforme rispetto ad* u, *per ogni fissata coppia* $(s,\ z)$.

Dire che l'unicità per il sistema $(*)$ è uniforme rispetto ad u, per ogni fissata coppia $(s,\ z)$, significa che per ogni fissata $(z,\ s)$, tale che $|\ z(y)\ | \leq |\ \overline{F}L + \overline{F}_1)L$ e $|\ s(y)\ | \leq (\overline{G}L + \overline{G}_1)L$, e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, qualunque sia u continua e tale che $|\ u\ | \leq \overline{F}L + \overline{F}_1$ e qualunque sia la funzione v continua in $[c,\ d]$ tale che

$$|\ v(y) - G_1[x_0,\ s(\alpha(x_0))] - \int_{\alpha(x_0)}^{y} G(x_0,\ t,\ z(t),\ s(t),\ u(t),\ v(t))dt\ | < \delta$$

Fissiamo $W \equiv [z, v] \in I$ e sia $u(x, y)$ la corrispondente soluzione del problema $(5)_{z, v}$. Detta $v'(x, y)$ la soluzione del problema (4):

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = G(x, y, z(x, y), s(x, y), u(x, y), v) & (x, y) \in R \\ v[x, \alpha(x)] = G_1[x, s(x, \alpha(x))] & a \leq x \leq b, \end{cases}$$

e posto

$$(8) \qquad z'(x, y) = \int_{\alpha(x)}^{y} u(x, t)dt,$$

a $W \equiv [z, v]$ facciamo corrispondere $W' \equiv [z', v']$, che appartiene a Σ, perchè $z'(x, y)$ e $v'(x, y)$ risultano continue in R (5) Resta così definita in I una trasformazione funzionale:

$$W' = T(W).$$

Si vede facilmente che l'esistenza di un punto unito per la T equivale all'esistenza di una soluzione per il problema (1), (2); per cui per dimostrare l'esistenza di almeno una soluzione per il detto problema, basterà far vedere che la trasformazione T ammette almeno un punto unito nell'insieme I, che è limitato, chiuso e convesso. E per fare ciò, proveremo che la T è completamente continua, cioè che è continua in I e trasforma I in un insieme compatto.

Proviamo che la T è continua in I, cioè che, essendo $\{ W_n \}$, con $W_n \equiv [z_n, v_n]$, una successione di elementi di I e $W \equiv [z, v] \in I$, da

$$(9) \qquad \lim_{n \to \infty} \| W_n - W \| = 0$$

per ogni $y \in [c, d]$, si abbia

$$| v(y) - V(y) | < \varepsilon$$

per ogni $y \in [c, d]$, dove $V(y)$ è la soluzione del sistema $(*)$. In proposito cfr. [4], n. 2. Rileviamo che si possono assegnare condizioni sufficienti affinchè siano verificate l'ipotesi $C)$ e l'ipotesi C_1). A proposito cfr. [9] (n. 2, 248-251, nn. 4, 5, 254-258), [10] n. 3, 30-32 e [4] n. 2, 75-81.

(4) L'esistenza e l'unicità della soluzione di questo problema sono assicurate rispettivamente dall'ipotesi $A)$ e dall'ipotesi $C)$, nella quale sia stato posto $x_0 = x$, $z(y) = z(x, y)$, $s(y) = s(x, y)$, $u_n(y) = u(x, y)$, tenuto presente che, come facilmente si vede, risulta $|s(x, y)| \leq (\overline{G}L + \overline{G}_1)L$, $|u(x, y)| \leq \overline{F}L + \overline{F}_1$. La $v'(x, y)$ risulta continua in R a norma del teorema di Pini citato in (2).

(5) In proposito tenere conto delle (2), (4) e della (8).

segue

$$\lim_{n\to\infty} \| W'_n - W' \| = 0, \tag{10}$$

essendo $\{ W'_n \}$ la successione degli elementi $W'_n \equiv [z'_n, v'_n]$, corrispondenti degli elementi W_n, e $W' \equiv [z', v']$ il corrispondente di W.

Per questo si ragiona come si è fatto in [1] per provare che dalla (8) segue la (9), con le opportune varianti che il caso richiede. All'uopo basta dimostrare che da

$$\lim_{n\to\infty} \| v_n - v \| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \| z_n - z \| = 0 \tag{11}$$

segue

$$\lim_{n\to\infty} \| v'_n - v' \| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \| z'_n - z' \| = 0. \tag{12}$$

Anzitutto proviamo che, se sono verificate le (11), si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \| = 0, \tag{13}$$

dalla cui validità segue ovviamente la seconda delle (12), tenuta presente la (8). Per verificare la (13) ammettiamo che essa sia falsa Allora esistono un $\varepsilon > 0$ ed una successione $\{u_{n_k}\}$ estratta da $\{u_n\}$ tale che

$$\| u_{n_k} - u \| \geq \varepsilon . \tag{14}$$

D'altra parte, tenuto conto della (6), dalla prima delle (11) segue

$$\lim_{n\to\infty} \| s_n - s \| = 0, \tag{15}$$

e da questa, dalla prima e dalla seconda delle (11) segue rispettivamente che le s_n, le v_n e le z_n sono equilimitate ed equicontinue. Ciò implica, tenuta presente la B), che la $\{u_n\}$ è compatta rispetto alla convergenza uniforme, come facilmente si vede con ragionamenti analoghi a quelli svolti da CILIBERTO in [2] per stabilire il teorema I [6]. Segue che anche la $\{u_{n_k}\}$ è compatta rispetto alla

[6] Rileviamo che la compattezza della $\{u_n\}$ è una immediata conseguenza del seguente teorema:

(A). - *Siano $F(x, y, z, s, u, v)$ e $F_1(y, z, v)$ funzioni verificanti la ipotesi A), e $\beta(y)$ una funzione continua con la sua derivata prima in $[c, d]$. Considerate tre successioni $\{ \varphi_{1,n}(x, y) \}$, $\{ \varphi_{2,n}(x, y) \}$, $\{\varphi_{3,n}(x, y) \}$ di fun-*

convergenza uniforme. Perciò si può trovare una successione estratta dalla $\{u_{n_k}\}$ convergente uniformemente in R verso una funzione $u'(x,y)$, la quale, come subito si vede, è soluzione del problema $(5)_{z,v}$. Ma tale problema ha soluzione unica, per cui $u' \equiv u$ in R. E ciò è in contrasto con il fatto che dalla (14) segue: $\| u' - u \| \geq \varepsilon$. Dunque è vera la (13).

Tenuto poi conto della seconda delle (12), della (13) e della (15), analogamente si dimostra la prima delle (12), facendo però ora uso dell'ipotesi C).

Che l'insieme I è trasformato dalla T in un insieme compatto lo si mostra con ragionamenti del tutto simili a quelli svolti in [1] per provare un analogo fatto ([7]), e per brevità ci esimiamo dal riprodurli. E così il teorema risulta provato.

zioni definite in R, equilimitate ed equicontinue in R, per ogni $n \in N$ e per ogni $y \in [c, d]$, il problema differenziale ordinario

$$(**) \qquad \begin{cases} u_x = F[x, y, \varphi_{1,n}(x,y), \varphi_{2,n}(x,y), u, \varphi_{3,n}(x,y)] \\ u[\beta(y\ y),] = F_1[y, \varphi_{1,n}(\beta(y), y), \varphi_{3,n}(\beta(y), y)] \end{cases}$$

non abbia più di una soluzione.. Inoltre se $\{\varphi_{1,n_k}(x,y)\}$, $\{\varphi_{2,n_k}(x,y)\}$, $\{\varphi_{3,n_k}(x,y)\}$ sono tre successioni estratte rispettivamente dalle tre su considerate, e convergenti uniformemente in R, detti $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, $\varphi_3(x,y)$ i loro limiti, il problema differenziale ordinario

$$\begin{cases} u_x = F[x, y, \varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), u, \varphi_3(x,y)] \\ u[\beta(y). \ y] = F_1[y, \varphi_1(\beta(y), y), \varphi_3(\beta(y), y)] \end{cases}$$

abbia, per ogni y, una sola soluzione in $[a, b]$.

In tali ipotesi la successione $\{u_n(x,y)\}$ delle funzioni continue soluzioni (univocamente determinate) del problema (**) è compatta rispetto alla convergenza uniforme.

Tale teorema costituisce una generalizzazione di un teorema di compattezza stabilito da CILIBERTO in [3] (in proposito cfr. teorema 1, pag. 385) e la dimostrazione si consegue appunto svolgendo gli stessi ragionamenti fatti da CILIBERTO per pervenire al citato suo risultato (cfr. teorema I di [2], pagg. 19-21).

Una generalizzazione del teorema (A) è stata stabilita da G. ARNESE in *Sul problema di Darboux in ipotesi di Carathéodory*, Ricerche di Matematica, vol. XII, 1963; in proposito vedasi l'Osservazione al teorema VI a pag. 32.

Cogliamo l'occasione per correggere una inesattezza in cui siamo incorsi in [1]. Invero, con riferimento a tale lavoro, la compattezza della $\{u_n\}$ (cfr. pag. 403) consegue non da un teorema di C. CILIBERTO, ivi citato, ma dal teorema (A), che ne è una generalizzazione, laddove si consideri F indipendente da s, $\beta(y) \equiv 0$, $F_1 \equiv 0$, $c = 0$, $d = 1$.

([7]) Cfr. [1] pagg. 403-404, dimostrazione del fatto che l'insieme I è trasformato dalla T ivi considerata in un insieme compatto.

2. – Consideriamo ora il problema (3), (4), dove le funzioni $F(x, y, z, u, v)$ e $G(x, y, z, u, v)$ sono definite nello strato

$$\bar{S} : (x, y) \in R, \qquad |z|, |u|, |v| < +\infty,$$

e la funzione $G_1(x, z)$ è definita nello strato

$$\bar{S}_2 : a \leq x \leq b, \qquad |z| < +\infty.$$

Anche qui intendiamo per soluzione di tale problema una coppia di funzioni $u(x, y)$, $v(x, y)$ continue in R, che siano dotate delle derivate che figurano nelle (3) e verifichino le (3) e (4). Facciamo le seguenti ipotesi:

A') Siano $F(x, y, z, u, v)$ e $G(x, y, z, u, v)$ due funzioni continue e limitate in $\bar{S}$, $F_1(y, z, v)$ e $G_1(x, z)$ due funzioni continue e limitate rispettivamente in S_1 ed $\bar{S}_2$. Poniamo: $\bar{F} = \sup_{\bar{S}} |F|$, $\bar{G} = \sup_{\bar{S}} |G|$, $\bar{F}_1 = \sup_{S_1} |F_1|$, $\bar{G}_1 = \sup_{\bar{S}_2} |G_1|$.

B') Indicato con I' l'insieme delle $W \equiv [z, v] \in \Sigma$ tali che

$$|z| \leq L(\bar{F}L + \bar{F}_1)(2 + D) + (\bar{G}L + \bar{G}_1)L + |z_0|,$$

$$|z(x, y) - z(\bar{x}, y)| \leq [2(\bar{F}L + \bar{F}_1)D + \bar{F}L + \bar{G}L + \bar{G}_1] |x - \bar{x}|,$$

$$|z(x, y) - z(x, \bar{y})| \leq (\bar{F}L + \bar{F}_1) |y - \bar{y}|,$$

$$|v| \leq \bar{G}L + \bar{G}_1, \qquad |v(x, y) - v(x, \bar{y})| \leq \bar{G} |y - \bar{y}|,$$

per ogni $W \in I'$ e per ogni fissato $y \in [c, d]$, il problema differenziale ordinario

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = F(x, y, z(x, y), u, v(x, y)) & (x, y) \in R \\ u[\beta(y), y] = F_1[y, z(\beta(y), y), v(\beta(y), y)] & c \leq y \leq d, \end{cases}$$

non ammetta più di una soluzione.

C') Comunque si assegnino un $\overline{x}_0 \in [a, b]$, una funzione $z(y)$ continua in $[c, d]$ e tale che $|z(y)| \leq L(\bar{F}L + \bar{F}_1)(2 + D) + (\bar{G}L + \bar{G}_1)L + |z_0|$, e una successione $\{u_n(y)\}$ di funzioni continue in $[c, d]$ e tali che $|u_n(y)| \leq \bar{F}L + \bar{F}_1$, l'equazione

$$V(y) = \lim_{n \to \infty} \int_{\alpha(\bar{x}_0)}^{y} G(\bar{x}_0,\ \tau,\ z(\tau),\ u_n(\tau),\ V(\tau))d\tau + G_1[\bar{x}_0,\ z(\alpha(\bar{x}_0))], \qquad c \leq y \leq d$$

non abbia più di una soluzione (assolutamente) continua $V(y)$ [8].

Vale il teorema:

II. *Nelle ipotesi* A'), B') *e* C') *il problema* (3), (4) *ammette almeno una soluzione.*

Definiamo in I' una trasformazione $W' = T(W)$ nel modo seguente: Fissato $W \equiv [z, v] \in I'$, sia $u(x, y)$ la soluzione del problema

$$(16)_{z,v} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = F(x, y, z(x, y), u, v(x, y)) & (x, y) \in R \\ u[\beta(y), y] = F_1[y, z(\beta(y), y), v(\beta(y), y)] & c \leq y \leq d. \end{cases}$$

Consideriamo poi il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = G(x, y, z(x, y), u(x, y), v) & (x, y) \in R \\ v[x, \alpha(x)] = G_1[x, z(x, \alpha(x))] & a \leq x \leq b, \end{cases}$$

essendo $u(x, y)$ la soluzione del problema $(16)_{z,v}$, e sia $v'(x, y)$ la sua soluzione. Posto:

$$z'(x, y) = \int_{\alpha(x)}^{y} u(x, t)dt + \int_{x_0}^{x} [v'(t, \alpha(t)) + u(t, \alpha(t))\alpha'(t)]dt + \int_{y_0}^{\alpha(x_0)} u(x_0, t)dt + z_0,$$

a $W \equiv [z, v]$ facciamo corrispondere $W' \equiv [z', v']$.

Con procedimenti analoghi a quelli seguiti nel caso del teorema I, si dimostra che T ammette almeno un punto unito in I', il che, come subito si constata, equivale a provare l'esistenza di una soluzione del problema (3), (4).

(8) Anche qui, all'ipotesi C') se ne può sostituire una ad essa equivalente, del tipo di quella fatta in C_1); in proposito cfr. nota (3).

3. – Se il problema (3), (4) ammette una soluzione, è risolubile anche il problema:

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = F(x, y, U, U_y, V) \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y} = G(x, y, U, U_y, V) \end{cases} \qquad (x, y) \in R$$

$$(18)\qquad \begin{cases} U_y[\beta(y), y] = F_1[y, U(\beta(y), y), V(\beta(y), y)] & c \leq y \leq d \\ U(x_0, y_0) = z_0 \\ V[x, \alpha(x)] = G_1[x, U(x, \alpha(x))] & a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Infatti, se $[u(x, y), v(x, y)]$ è soluzione del problema (3), (4), posto $V(x, y) = v(x, y)$, si vede subito che $U(x, y)$ e $V(x, y)$ forniscono una soluzione del problema (17), (18).

Se in particolare è $F = G = f$, si ha dalle (17), (18):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_x}{\partial y} = f(x, y, U, U_y, V) \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y} = f(x, y, U, U_y, V), \end{cases} \qquad (x, y) \in R$$

da cui, tenendo presente che

$$U_x(x, y) = \int_{\alpha(x)}^{y} u_x(x, t)\, dt - u(x, \alpha(x))\alpha'(x) + V(x, \alpha(x)) + u(x, \alpha(x))\alpha'(x),$$
$$U_x[x, \alpha(x)] = V(x, \alpha(x)]$$

si ha $U_x(x, y) = V(x, y)$, e quindi:

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = f(x, y, U, U_x, U_y) & (x, y) \in R \\ U_x[x, \alpha(x)] = G_1[x, U(x, \alpha(x))] & a \leq x \leq b \\ U_y[\beta(y), y] = F_1[y, U(\beta(y), y), U_x(\beta(y), y)] & c \leq y \leq d \\ U(x_0, y_0) = z_0, \end{cases}$$

che è un caso particolare del problema considerato dalla SZMYDT in [8] (9).

Allora, nel caso in cui $F = G = f$, se il problema (3), (4) ammette una soluzione, è risolubile anche il problema (19). Il teorema II assicura, quindi, l'esistenza di soluzione anche per il problema (19).

BIBLIOGRAFIA

[1] G. CARADONNA, *Sull'esistenza delle soluzioni per alcuni sistemi di equazioni integrodifferenziali*, Boll. Un. Mat. Ital., (III), 16 (1961), 398-407.

[2] C. CILIBERTO, *Il problema di Darboux per una equazione di tipo iperbolico in due variabili*, Ricerche di Mat., 4 (1955), 15-29.

[3] — —, *Su alcuni problemi relativi ad una equazione di tipo iperbolico in due variabili*, Boll. Un. Mat. Ital., serie III, anno XI, 383-393.

[4] R. FIORENZA, *Sulla unicità uniforme per una famiglia di equazioni differenziali del primo ordine. Applicazioni a un sistema iperbolico di equazioni a derivate parziali*, Ricerche di Mat., 14 (1965), 71-91.

[5] J. KISYNSKI, *Sur l'existence des solutions de l'equation* $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A, XV, 7 (1961), 85-95.

[6] G. SANTAGATI, *Su alcuni sistemi di equazioni integrodifferenziali*, Ann. Mat. Pura ed Appl., (IV), 63 (1963), 71-122.

[7] — —, *Su alcuni sistemi di equazioni integrodifferenziali, in ipotesi di Carathéodory*, Ann. Mat. Pura ed Appl., (IV), 67 (1965), 235-299.

[8] Z. SZMYDT, *Sur un nouveau type des problèmes pour un systeme d'equations differenzielles hyperboliques du second ordre à deux variables independantes*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 4, 2 (1956), 67-72.

[9] A. ZITAROSA, *Su alcuni sistemi iperbolici di equazioni a derivate parziali del primo ordine*, Ricerche di Mat., 8 (1959), 240-269.

[10] — —, *Alcune osservazioni su certi teoremi di compattezza e sul problema di Darboux*, « Rend. dell'Acc. Sc. Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, Serie 4, Vol. XXVII (1960), 25-35.

(9) La particolarità di tale problema consiste nel fatto che nel problema di SZMYDT invece di $G_1[x, U(x, \alpha(x))]$ c'è $G_1[x, U(x, \alpha(x)), U_y(x, \alpha(x))]$.

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 27 settembre 1965