Bollettino Unione Matematica Italiana

Vittoria Zambelli

Gli elementi di periodo infinito di un gruppo e le serie centrali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.1, p. 19–24.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_1_19_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

Gli elementi di periodo infinito di un gruppo e le serie centrali

VITTORIA ZAMBELLI (Milano) (*)

Sunto. - *Sia G un gruppo e H il sottogruppo generato dagli elementi di G di periodo infinito. Si studiano i legami tra il sottogruppo H e i gruppi delle serie centrali, deducendone in particolare delle condizioni, affinchè si abbia $H = G$.*

Summary. - *Let G be a group and H the subgroup of G, generated by the elements of infinite order. Here we study connections between the subgroup H and the groups of the central series, and we get conditions, in order to have $H = G$.*

Premesse.

1. - Sia G un gruppo, che supporremo sempre dotato di qualche elemento di periodo infinito; sia H il sottogruppo di G, generato dagli elementi di periodo infinito.

Escluderemo sempre nel seguito il caso banale, in cui tutti gli elementi di G, diversi dall'unità, hanno periodo infinito; ovviamente in tale caso si ha $H = G$. Osserviamo tuttavia che anche in casi diversi da questo banale il sottogruppo H può coincidere con G, mentre altrove può essere contenuto propriamente in G (è facile trovare esempi in proposito).

A questa nota hanno dato spunto problemi analoghi, considerati in un precedente lavoro [1], in cui si era preso in esame il sottogruppo (di HUGHES), generato dagli elementi di periodo diverso da un numero primo p, in relazione ai gruppi della serie centrale ascendente.

I risultati sono stati facilmente estesi al caso degli elementi a periodo infinito, deducendo in particolare che, se un gruppo nilpotente possiede elementi di periodo infinito, viene da essi generato; si stabilisce quindi una condizione necessaria e sufficiente, affinchè un gruppo sia nilpotente di lunghezza r.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca N. 30 del C.N.R per l'anno 1965-66.

(1) Cf. [4].

Si sono fatte inoltre alcune osservazioni relative ai legami tra il sottogruppo H e alcuni tipi notevoli di successioni di sottogruppi di G, tra le quali rientrano come casi particolari la serie derivata e la serie centrale discendente.

2. – Indichiamo alcune semplici proprietà a proposito del centro, analoghe a quelle stabilite nella nota precedente relativamente al sottogruppo di HUGHES.

TEOREMA 1. – *Se G contiene un elemento normale di periodo infinito, allora si ha $H = G$.*

Infatti se esistesse un elemento g di G, non appartenente ad H, esso avrebbe un periodo finito m; inoltre, detto h un elemento normale di periodo infinito, l'elemento gh non apparterebbe ad H ed avrebbe pertanto periodo finito n. Detto k un multiplo comune di m e n, si avrebbe

$$(gh)^k = g^k h^k = h^k = u,$$

contro l'ipotesi che h abbia periodo infinito.

Si deducono immediatamente i seguenti corollari.

COROLLARIO 2. – *Se H è sottogruppo proprio di G, tutti gli elementi del centro hanno periodo finito.*

COROLLARIO 3. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo G (avente elementi di periodo infinito) sia abeliano, è che il sottogruppo H coincida con il centro C di G.*

Quest'ultimo corollario mostra tra l'altro che un gruppo abeliano, dotato di elementi di periodo infinito, risulta da essi generato.

TEOREMA 4. – *Il sottogruppo H contiene il centro C di G.*

Infatti se esistesse un elemento c di C, non appartenente ad H, esso avrebbe un periodo finito m. Detto h un elemento di H, avente periodo infinito, l'elemento ch non apparterrebbe ad H ed avrebbe pertanto periodo finito n. Detto k un multiplo comune di m e n si avrebbe l'assurdo

$$(ch)^k = c^k h^k = h^k = u.$$

Il sottogruppo H e la serie centrale ascendente. Gruppi nilpotenti.

3. – Nel paragrafo precedente si è dimostrato che in un gruppo G, il quale soddisfi sempre all'ipotesi di ammettere elementi di periodo infinito, il sottogruppo H contiene il centro C di G. In questo paragrafo estendiamo tale risultato, dimostrando che H contiene un qualsiasi gruppo della serie centrale ascendente.

LEMMA 5. - *Se uno dei gruppi della serie centrale ascendente contiene un elemento di periodo infinito, allora si ha* $H = G$.

Supponiamo che i gruppi C_1, C_2, ..., C_i della serie centrale ascendente contengano solo elementi di periodo finito e sia C_{i+1} il primo gruppo della serie, che contiene un elemento di periodo infinito. Consideriamo l'omoformismo naturale ω di G sul gruppo quoziente $\frac{G}{C_i}$. Poichè per ipotesi tutti gli elementi di C_i hanno periodo finito, gli elementi di G aventi periodo infinito sono tutte e sole le controimmagini in ω degli elementi di periodo infinito di $\frac{G}{C_i}$. Ne segue che, se C_{i+1} contiene almeno un elemento avente periodo infinito, anche il centro di $\frac{G}{C_i}$ conterrà almeno un elemento di periodo infinito. Detto allora $H\left(\frac{G}{C_i}\right)$ il sottogruppo di $\frac{G}{C_i}$ generato dagli elementi di periodo infinito, per il Teorema 1 si avrà

$$H\left(\frac{G}{C_i}\right) = \frac{G}{C_i};$$

essendo, per quanto detto sopra, H il sottogruppo controimmagine di $H\left(\frac{G}{C_i}\right)$ nell'omomorfismo ω, si avrà di conseguenza

$$H = G, \text{ c.d.d.}$$

TEOREMA 6. - *Il sottogruppo H contiene tutti i gruppi della serie centrale ascendente.*

Se uno dei centri contiene un elemento di periodo infinito, per il Lemma 5 si ha $H = G$ ed è quindi vero l'asserto.

Supponiamo pertanto che ogni gruppo della serie centrale ascendente contenga solo elementi di periodo finito.

Diamo una dimostrazione per induzione.

Per il teorema 4 il sottogruppo H contiene il centro C_1 di G. Ammettiamo che H contenga il centro i-esimo C_i e dimostriamo che contiene il centro $(i+1)$-esimo C_{i+1}.

Consideriamo l'omomorfismo naturale ω di G sul gruppo quoziente $\frac{G}{C_i}$. Osserviamo che il gruppo quoziente $\frac{G}{C_i}$ contiene certamente elementi di periodo infinito, poichè per ipotesi gli elementi di C_i hanno tutti periodo finito. Detto $H\left(\frac{G}{C_i}\right)$ il sottogruppo di $\frac{G}{C_i}$ generato dagli elementi di periodo infinito, il sottogruppo H risulta controimmagine di $H\left(\frac{G}{C_i}\right)$ nell'omomorfismo ω. Poichè per il Teorema 4, $H\left(\frac{G}{C_i}\right)$ contiene il centro di $\frac{G}{C_i}$, il sottogruppo H contiene il centro C_{i+1}; c.d.d.

TEOREMA 7. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo G sia nilpotente di lunghezza r, è che sia $H = C_r$.*

Se G è nilpotente, uno dei centri successivi dovrà necessaria, mente contenere elementi di periodo infinito. Per il Lemma 5, si ha allora $H = G = C_r$.

Viceversa, se $H = C_r$, allora il centro r-esimo C_r contiene elementi di periodo infinito e quindi, sempre per il Lemma 5, si ha $G = H = C_r$.

Questo teorema estende in particolare ai gruppi nilpotenti una proprietà già vista (cf. n. 2) per i gruppi abeliani: *un gruppo nilpotente, dotato di elementi di periodo infinito, risulta da essi generato.*

4. - In questo ultimo paragrafo prendiamo in esame il sottogruppo H in relazione ad un tipo particolare di successione di sottogruppi di G.

TEOREMA 8. - *Sia.*

$$G \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_i \supset \dots$$

una successione di sottogruppi di G, ognuno normale nel precedente e tale che i fattoriali $\frac{G}{K_1}$. $\frac{K_1}{K_2}$, ..., $\frac{K_i}{K_{i+1}}$, .. siano tutti abeliani. Se il sottogruppo K_i possiede solo elementi di periodo finito, allora si ha $H \supseteq K_{i-1}$ (e ovviamente $H \supseteq K_r$ con $r \geq i$).

Supponiamo dapprima che il sottogruppo K_{i-1} possieda qualche elemento di periodo infinito.

Consideriamo l'omomorfismo naturale ω di K_{i-1} sul gruppo fattoriale $\frac{K_{i-1}}{K_i}$; il gruppo $\frac{K_{i-1}}{K_i}$ contiene certamente qualche elemento di periodo infinito. Essendo esso un gruppo abeliano, il sottogruppo generato dai suoi elementi di periodo infinito coincide con l'intero gruppo e di conseguenza, per l'omomorfismo ω, il sottogruppo $H(K_{i-1})$, generato dagli elementi di periodo infinito di K_{i-1}, coincide con K_{i-1}:

$$H(K_{i-1}) = K_{i-1}.$$

Ma si ha

$$H(K_{i-1}) \subseteq H \cap K_{i-1} \subset H,$$

e quindi

$$K_{i-1} \subseteq H.$$

Se gli elementi di K_{i-1} avessero tutti periodo finito, esisterebbe certamente un sottogruppo K_r della successione (con $0 \leq r \leq i-2$, dove $K_0 = G$), avente elementi di periodo infinito, mentre K_{r+1} contiene solo elementi di periodo finito. Allora per la dimostrazione precedente si avrebbe

$$H \supseteq K_r$$

e quindi a maggior ragione $H \supseteq K_{i-1}$; c.d.d.

Sono, ad esempio, successioni di questo tipo, quella costituita dai *successivi sottogruppi derivati di un gruppo e la serie centrale discendente.*

Si possono pertanto dedurre dal Teorema 8 i seguenti corollari.

COROLLARIO 9. - *Se G è un gruppo risolubile, il sottogruppo H contiene una parte propria della serie derivata.*

Infatti, detti G', G'', ... $G^{(i)}$, ... i successivi sottogruppi derivati di G, se G è risolubile si ha

$$G \supseteq G' \supseteq G'' \supseteq \dots \supseteq G^{(h)} = u;$$

pertanto esiste certamente un sottogruppo derivato $G^{(i)}$, che contiene solo elementi di periodo finito, mentre $G^{(i-1)}$ contiene elementi di periodo infinito. Di conseguenza $H \supseteq G^{(i-1)}$, donde l'asserto.

COROLLARIO 10. - *Se fra i derivati di un gruppo ne esiste uno, che ha tutti gli elementi di periodo finito, allora $\frac{G}{H}$ è risolubile.*

Basta considerare l'omomorfismo naturale di G su $\frac{G}{H}$ e osservare che esso porta sottogruppi derivati in sottogruppi derivati. Ora, se $G^{(i)}$ ha solo elementi di periodo finito, $H \supseteq G^{(i-1)}$ e quindi l'immagine del sottogruppo $G^{(i-1)}$ è l'unità di $\frac{G}{H}$.

COROLLARIO 11. - *Se il derivato di un gruppo G è formato da elementi di periodo finito, allora $H = G$.*

Si ottiene così un'estensione di una proprietà già ricordata per i gruppi abeliani nel n. 2.

COROLLARIO 12. - *Se uno dei sottogruppi interderivati contiene solo elementi di periodo finito, allora H contiene una parte propria della serie centrale discendente.*

BIBLIOGRAFIA

[1] M. HALL, *The theory of groups*, New York 1959.
[2] G. ZAPPA, *Fondamenti di teoria dei gruppi*, Vol. 1; Roma 1965.
[3] D. R. HUGHES, *A problem in group theory*, Bull. Am. Math. Soc. **63** (1957).
[4] V. ZAMBELLI, *Il sottogruppo di Hughes e la serie centrale ascendente*, Bol. U.M.I. **19**, pp. 478-489.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 27 gennaio 1966