UMI

Recensioni.

* Dario Graffi, Onde Elettromagnetiche, Monografie del C.N.R., Roma, 1965 (Antonio Pignedoli)
* F. V. Atkinson, Discrete and continuous boundary problems, Academic Press, 1964 (Dario Graffi)
* C. Segre, Opere, Vol. II, Edizione Cremonese, 1958 (Mario Villa)
* René Saint-Guilhem, Les principes de l'analyse dimensionelle. Invariance des relations vectorielles dans certains groupes d'affinités, Gauthier-Villars, Paris, 1962 (Dario Graffi)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.4, p. 511–521.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_4_511_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

RECENSIONI

DARIO GRAFFI, *Onde elettromagnetiche*, Monografie del C.N.R., Roma, 1965, di pagine 479, con 134 figure, lire 7.000.

L'opera è suddivisa in sei capitoli ed è preceduta da una prefazione che ne mette in luce l'origine, i criteri seguiti, gli argomenti essenziali trattati. È seguita da tre opportune appendici dedicate, rispettivamente: la prima a richiami di Calcolo vettoriale con particolare riguardo agli operatori classici della teoria dei campi vettoriali ed ai teoremi fondamentali della teoria stessa; la seconda alle equazioni di Maxwell in coordinate cilindriche; la terza al legame fra le equazioni di Maxwell e l'Ottica geometrica. Va notato che il complesso delle tre appendici risulta estremamente utile per la lettura del testo.

Il primo Capitolo della monografia è dedicato alle equazioni di Maxwell e prende le mosse da un paragrafo concernente il vettore « spostamento » ed il vettore « densità » di corrente, giungendo poi, attraverso la considerazione della prima e seconda equazione di Maxwell, al teorema di Poynting, all'espressione del medesimo per campi sinoidali ed alla « resistenza e reattanza di antenna ». Come si vede, l'Autore ha di mira — e ciò costituisce uno dei caratteri essenziali del volume — i problemi radiotecnici, ai quali Egli si dirige sempre con rigorosa forma mentale fisico-matematica. Alla fine del capitolo, si danno teoremi di unicità per le equazioni di Maxwell, dedotti dal teorema di Poynting.

Nel secondo capitolo viene considerata la propagazione libera per onde piane. Il primo paragrafo di tale capitolo è dedicato alle equazioni generali relative alla propagazione elettromagnetica in un mezzo dielettrico. Nel secondo paragrafo, l'Autore passa allo studio della propagazione in un mezzo di assegnata conduttività per un campo sinoidale. Il terzo paragrafo concerne quei mezzi dispersivi, fortemente interessanti le radiocomunicazioni, che sono i gas ionizzati e vi si trattano la velocità di fase, la velocità di gruppo, la velocità dell'energia.

Il quarto paragrafo è dedicato alla propagazione libera nei gas ionizzati soggetti ad un campo magnetico e ad accennare a quella che si ha nei mezzi del tipo della ferrite, mezzi che presentano grande interesse tecnico.

Il quinto paragrafo concerne la propagazione per onde piane in un semispazio occupato da due mezzi diversi.

Si passa così al terzo capitolo dell'opera. Esso è dedicato alla trattazione della propagazione guidate delle onde elettromagnetiche, appunto entro le guide d'onda ed al comportamento del campo elettromagnetico entro le cavità. Il tema del capitolo è di quelli in cui è stato notoriamente intensa ed originale la ricerca scientifica specialistica condotta dall'Autore. Dei sei paragrafi nei quali è articolato il capitolo i primi quattro sono dedicati alle guide d'onda, l'ultimo agli oscillatori a cavità, mentre il quinto tratta delle trombe elettromagnetiche, cioè dei tubi a pareti conduttrici, in cui la sezione del tubo sede della propagazione elettromagnetica va allargandosi con legge assegnata. Nel capitolo si trovano anche cenni sulle guide con dielettrico eterogeneo.

Il capitolo quarto — su quattro paragrafi — è dedicato alla espressione del campo elettromagnetico generato da sorgenti assegnate. Si passa dalle formule per il campo di un dipolo e di un conduttore filiforme alla trattazione del campo elettromagnetico in un semispazio limitato da un piano perfettamente conduttore, alle formule relative ai potenziali ritardati e ai teoremi di equivalenza, cioè a quei teoremi che affermano sostanzialmente come un campo elettromagnetico, acustico, etc., generato da sorgenti racchiuse entro una certa superficie, equivale, all'esterno della superficie, al campo generato da opportune sorgenti disposte sulla superficie stessa.

Anche la materia trattata nel quinto capitolo — la teoria delle antenne — è di quelle in cui l'Autore ha esercitato la propria profonda indagine fisico-matematica. Il capitolo consta di dieci paragrafi: il primo concerne l'espressione del campo di un dipolo; il secondo il campo di una antenna rettilinea; il terzo le antenne a telaio; il quarto i sistemi direttivi con due o più antenne. Nel quinto paragrafo sono esposti il teorema di *sovrapposizione,* che consegue dalla linearità delle equazioni di Maxwell ed il teorema di Lorentz di *reciprocità* del campo elettromagnetico. Si introducono così le nozioni di resistenza e reattanza propria e mutua di antenne; nel sesto sono calcolate queste grandezze in casi particolarmente importanti. Il paragrafo settimo è dedicato a cenni relativi ad alcune teorie concernenti la distribuzione delle correnti in antenna; l'ottavo concerne le antenne a fenditura; il nono la nozione di « guadagno » di un sistema direttivo e di « apertura » di una antenna; il decimo è dedicato alla esposizione di alcune proprietà delle antenne riceventi, specialmente in relazione alla trasmittente. L'Autore si occupa, in particolare, del calcolo della corrente che dall'antenna viene trasmessa al carico e poi utilizzata.

Il capitolo sesto, con cui si conclude il volume, è dedicato allo studio dell'importante problema della propagazione delle onde elettromagnetiche intorno alla terra e prende le mosse proprio dal ricordo delle storiche esperienze di Marconi del 1901. Il capitolo è suddiviso in sei paragrafi, nel primo dei quali ci si occupa del campo di una antenna nell'ipotesi di atmosfera omogenea. Il secondo ed il terzo paragrafo concernono la ionosfera, le sue origini, le sue proprietà e la sua influenza sulla propagazione delle onde della radio. Il quarto paragrafo concerne le misure ionosferiche; il quinto l'influenza del campo magnetico terrestre, con attenzione anche al problema della interazione delle radioonde.

Il sesto paragrafo concerne la propagazione nella troposfera e si conclude con un cenno ai fenomeni di diffusione.

Le note bibliografiche sono inserite di volta in volta nel testo. La veste tipografica è ottima. Le notazioni e le figure sono chiare e nitide.

Il volume è concepito prescindendo dichiaratamente da ogni scopo tecnico e presenta carattere tipicamente fisico-matematico. Vi si notano una continua attenzione al fenomeno fisico ed alla interpretazione dei risultati matematici in senso accessibile alla intuizione; nonchè una felice preoccupazione di tradurre i risultati stessi in valutazioni numeriche.

Vi si nota anche un non disdegnare il problema particolare e l'uso degli speciali algoritmi occorrenti alla costruzione delle soluzioni cercate.

In definitiva, la letteratura, sia fisica che matematica, si arricchisce di un'opera senza dubbio molto notevole ed estremamente utile.

ANTONIO PIGNEDOLI

F. V. Atkinson, *Discrete and continuous boundary problems*, Academic Press, 1964, pagg. VIII-570.

Com'è noto, i movimenti sinusoidali dei punti di una corda, fissata agli estremi, si determinano risolvendo un problema di autovalori per un'equazione differenziale. Se però in alcuni punti della corda si dispongono masse concentrate i loro moti sinusoidali si determinano, qualora si trascuri la massa della corda stessa, risolvendo un problema di autovalori per un sistema di equazioni ricorrenti o, che è lo stesso, per un'equazione alle differenze. Le questioni ora indicate costituiscono, rispettivamente, un'esempio di problema ai limiti continuo e di problema ai limiti discreto; numerosi altri esempi di tali problemi sono offerti dalla fisica e dalla tecnica.

Il libro dell'Atkinson contiene una trattazione organica, ampia e aggiornata dei problemi in discorso, naturalmente con condizioni agli estremi più generali di quelle sovraindicate. Come osserva l'Autore nella prefazione, la trattazione si sviluppa secondo tre indirizzi. Il primo presenta la teoria di alcune relazioni ricorrenti svolta nello spirito dei problemi ai limiti per le equazioni differenziali. Il secondo si riferisce ai problemi ai limiti per alcune equazioni lineari, a coefficienti variabili, considerando anche il caso di coefficienti discontinui o con singolarità rappresentabili mediante funzioni di Dirac. Nel terzo valendosi principalmente delle equazioni integrali si tende a unificare la teoria dei sistemi discreti e continui. Non entreremo, per brevità, in dettagli sul contenuto del libro; ci limiteremo ad osservare che in esso si studiano problemi ad una sola variabile indipendente che perciò, nel caso continuo, si riconducono a un'equazione differenziale ordinaria ed a analoghe equazioni ricorrenti nel caso discreto; però, valendosi del calcolo delle matrici, si considerano anche questioni riconducibili a sistemi di equazioni differenziali o a sistemi di equazioni ricorrenti. Inoltre si trattano anche problemi inversi: ad esempio la costruzione dell'equazione differenziale o alle differenze di cui si conoscono gli autovalori per una o più condizioni assegnate agli estremi.

Il libro è scritto in forma piana ed ogni questione è spesso chiarita con semplici esempi. Per la sua lettura è largamente sufficiente la preparazione dai nostri bienni, tanto più che alcune questioni particolari di analisi sono esposte nelle appendici. Il libro contiene anche, opportunamente collegata con gli argomenti trattati, un'ampia bibliografia in cui però non si considerano i contributi italiani.

Ottima la presentazione tipografica.

Dario Graffi

C. Segre, *Opere*, a cura dell'Unione Matematica italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Volume II, 1958, pp. 438 + XVIII, Roma, Edizioni Cremonese.

L'U.M.I. si è indubbiamente acquistata un merito notevole pubblicando le opere dei matematici italiani che in questi ultimi tempi illustrarono la nostra scienza, sia per ricordare il contributo, talvolta decisivo, portato dagli italiani al progredire della matematica, sia per farlo conoscere di più raccogliendo e rendendo di facile consultazione scritti sparsi in vari periodici non sempre facilmente accessibili. Certo che pubblicando a distanza di molti anni gli scritti di uno scienziato è opportuno accennare, sia pure brevemente, alle ricerche che nel frattempo ne sono più o meno direttamente derivate, anche per meglio mettere in luce l'opera stessa e inquadrarla storicamente.

L'U.M.I. per la redazione di queste *Opere* ha lasciato ampia libertà, direi eccessiva, ai vari Comitati costituiti per ciascuno degli Autori prescelti, i quali hanno seguito criteri molto diversi. La collezione nel suo insieme ne è stata un poco danneggiata in quanto per alcuni Autori si è abbondato, ecceduto forse, nell'illustrare le ricerche successive, derivate da quelle dell'Autore, per altri non si è detto assolutamente nulla o quasi nulla.

Così è per gli scritti contenuti in questo secondo volume delle *Opere* di *C. Segre* (1) che, per un insieme di circostanze, viene recensito soltanto ora.

È stato per me motivo di intimo piacere, non disgiunto da una certa nostalgia, il rileggere questi scritti di *C. Segre* di alcuni dei quali mi sono particolarmente occupato molti anni fa. Gli scritti di *C. Segre*, per me, come per altri matematici italiani, fino a quelli della mia generazione, sono stati un modello da cui spesso è partita l'ispirazione, sicchè abbiamo guardato a Lui come a un Maestro anche se, come nel caso mio, non l'abbiamo conosciuto di persona.

Ma veniamo alla recensione del libro. Precede una nitida presentazione di *A. Terracini* degli scritti del *Segre* contenuti nel volume. Il volume II delle *Opere* di *C. Segre* raccoglie i lavori di Geometria proiettiva differenziale e quelli di Geometria iperalgebrica e sugli enti immaginari. Il primo gruppo comprende 15 lavori, il secondo 4; sono stati scritti in circa un quarantennio, cioè dal 1886 al 1924, ma non esauriscono naturalmente la produzione del Nostro in questo lungo periodo.

Il primo lavoro, appartenente al primo gruppo, è « *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche, e sulla linea parabolica di una superficie* ».

In questo lavoro l'invariante chiamato di Mehmke-Segre o di Smith-Mehmke-Segre, appare probabilmente per la prima volta come limite di un birapporto (dal che segue il carattere proiettivo di esso). In ciò ha origine un procedimento fecondo largamente seguito nella geometria proiettiva differenziale. Molti anni dopo, *C. Segre* ritornava su una questione analoga nello spazio, nel lavoro: « *Sugli elementi curvilinei, che hanno comune la tangente e il piano osculatore* ».

Ma ciò che interessava il *Segre* nel primo dei lavori suddetti era l'applicazione ai punti multipli delle curve piane algebriche (ad es. ai tacnodi simmetrici) e alle condizioni perchè un punto semplice di una superficie algebrica sia multiplo per la sua curva parabolica con particolare riguardo ai tacnodi armonici (o simmetrici) che già si erano presentati nello studio della curva Hessiana di una curva piana e che si presentano, come osserva il *Segre*, anche nello studio della curva parabolica di una superficie algebrica.

Questo risultato rientra in un fatto assai più generale, osservato successivamente dal Recensore (2), riguardante le singolarità dell'Hessiana di una ipersuperficie algebrica dell'S_{r-1} e quelle della varietà parabolica di una ipersuperficie algebrica dell'S_r (3).

(1) Rilevai, a suo tempo, questa opportunità ma era già stato pubblicato il Vol. I delle stesse *Opere* ispirato a tali criteri restrittivi (sebbene per quel primo volume tale lacuna fosse colmata in parte dall'ampia prefazione del *Severi*).

(2) Si veda: M. VILLA, *Sulla varietà parabolica*, Rend. dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LXV, p. 653 (1932). Il problema posto in questa Nota attende ancora una risposta.

(3) Per incidenza ricorderò che nella Nota del *Segre* « *Sulla forma Hessiana* » che appare nel Vol. I di queste *Opere*, la previsione del *Segre* (a pag. 311 di tale Vol.) non si avvera in quanto, come è stato dimostrato successivamente dal Recensore, non esiste una proprietà della Jacobiana di cui quella osservata dal *Segre* sia un caso particolare. Si veda: M. VILLA,

In questo lavoro del *Segre* la geometria proiettiva differenziale appare incidentalmente. Solo circa dieci anni dopo la pubblicazione di questo lavoro, il Segre si rivolge di proposito alla geometria proiettiva differenziale.

Nella Nota « *Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate* » viene indicata la costruzione delle congruenze W a falde focali rigate a partire da una loro falda focale. La Nota « *Sulle congruenze rettilinee W di cui una o ambe le falde focali sono rigate* » contiene, fra l'altro, la costruzione delle congruenze W aventi come falda focale una quadrica.

Nella Nota « *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* » il *Segre* studia le superficie degli iperspazi che soddisfano ad un'equazione di Laplace, cioè le superficie per le quali l'$S_{(2)}$ osculatore generico è un S_4. Il Nostro definisce il sistema delle curve caratteristiche di una tale superficie Ψ e introduce geometricamente la trasformazione di Laplace per la relativa equazione. Si trattiene particolarmente sulle superficie Ψ dell'S_5, sulla V_4 dei piani tangenti di una superficie caratterizzando tali V_4 per una superficie Ψ.

In questa Nota hanno origine concetti e proprietà che si sono rivelati essenziali nei successivi sviluppi della geometria proiettiva differenziale iperspaziale delle varietà.

Nella Nota « *Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti* » si considerano quelle particolari superficie dello spazio ordinario aventi un doppio sistema coniugato di curve tali che le sviluppabili circoscritte lungo ciascuna di esse sono coni.

Nella Nota « *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie* » appare per la prima volta quella particolare terna di rette tangenti in un punto ad una superficie dello spazio ordinario che presero poi il nome di *tangenti di Segre.*

La Memoria « *Preliminari di una teoria delle varietà luogo di spazi* » ha nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi quello stesso carattere fondamentale che ha, come abbiamo già detto, la Nota « *Su una classe delle superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine* ». In tale Memoria vengono studiate quelle varietà di un iperspazio che sono generate da uno spazio (lineare) variabile, con particolare riguardo ai problemi relativi alla distribuzione degli spazi tangenti di quelle varietà nei singoli punti di uno spazio generatore e a quelli sull'eventuale incidenza di spazi generatori infinitamente vicini. Il Nostro determina fra l'altro tutti i sistemi ∞^2 di piani tali che due piani infinitamente vicini siano sempre incidenti. Si tratta dunque di V_4 che si possono considerare una estensione delle ordinarie superficie sviluppabili. Ad un'altra estensione delle superficie sviluppabili il *Segre* perviene considerando le V_k i cui S_k tangenti costituiscono una totalità ∞^{k_1} $(k_1 < k)$. Ma altre ricerche si trovano nella Memoria, oltre a quelle accennate, relative anche a varietà che non sono luogo di spazi.

Nella Nota « *Aggiunta alla Memoria: Preliminari di una teoria delle varietà luogo di spazi* », che è un complemento della Memoria precedente, vengono caratterizzate le V_3 che rappresentano quattro equazioni di Laplace linearmente indipendenti.

Tutte le ricerche della Memoria ora detta hanno dato luogo a molti sviluppi ulteriori. Fra le molte ricerche che ne sono seguite, mi limiterò a ricordare quelle relative alla determinazione delle V_k i cui S_k tan-

Sulla multiplicità d'intersezione della Jacobiana di $r+1$ ipersuperficie dello spazio ad r dimensioni e di una retta in un loro punto comune, Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LXIV, p. 683 (1931). E ciò va sottolineato anche perchè conferisce maggiore interesse allo stesso risultato del *Segre* essendo la proprietà in discorso caratteristica per la Hessiana.

genti costituiscono una totalità ∞^{k_1} ($k_1 < k$) (4). Il problema si connette, come ha osservato il Recensore, con la ricerca di varietà dotate di dati sistemi di elementi di curva quasi-asintotica (5).

Nella Nota « *Su alcune classi particolari di sistemi continui di quadriche, e sui rispettivi inviluppi* » vengono interpretate nella geometria dei *regoli* (ossia schiere di generatrici delle quadriche ordinarie) proprietà proiettive differenziali di alcuni sistemi di piani dell'S_5, mediante l'interpretazione dello spazio rigato sulla quadrica di Klein.

Nella Nota « *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani, e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti* » il Nostro ricerca dapprima il numero (cinque) dei fuochi di 2° ordine esistenti su un piano generico di un sistema ∞^2 di piani di S_4 (si tratta dei punti comuni a tale piano e a due ulteriori piani consecutivi dello stesso sistema); i fuochi del 1° ordine formano invece una conica. Il *Segre* determina i sistemi di piani per cui tutti i fuochi di 1° ordine sono anche di 2° ordine (fra essi vi è il sistema dei piani delle coniche della superficie proiezione della superficie di Veronese). Il *Segre* applica poi il risultato conseguito alla determinazione delle curve degli iperspazi che ammettono ∞^2 piani 6-secanti (e trova che ne esistono soltanto due tipi).

Nella Nota « *Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese* » viene data dapprima una nuova definizione delle cinque tangenti principali esistenti in generale in un punto di una superficie di S_5 (una prima definizione era già stata data nella Memoria « *Preliminari di una teoria delle varietà luogo di spazi* ») e successivamente si dimostra che la superficie di Veronese è l'unica superficie (dell'S_5, non sviluppabile) a tangenti principali indeterminate. Ma nella Nota si trova, fra l'altro, anche la nozione di « ordine di vicinanza » per due piani infinitamente vicini di un sistema ∞^1 di S_5 (e più generalmente per due S_k in S_{2k+1}).

A queste due Note si collegano gli altri due lavori del Nostro relativi alla ricerca delle superficie degli iperspazi che posseggono ∞^2 curve dell'S_3: « *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane o spaziali* » e « *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve spaziali* ».

L'ultima Nota del primo gruppo porta il titolo « *Le curve piane d'ordine n circoscritte a un $(n+1)$-latero completo di tangenti ad una conica, e una classe particolare di superficie con doppio sistema coniugato di coni circoscritti* ». Le superficie considerate sono quelle rappresentate su un piano mediante un sistema lineare contenuto nel sistema delle curve piane di ordine n circoscritte a un $(n+1)$-latero completo di tangenti ad una conica.

Il primo lavoro del secondo gruppo « *Le coppie di elementi immaginari nella geometria sintetica* » ha origini didattiche, in quanto l'Autore si è proposto di fare una trattazione sintetica degli elementi immaginari per un corso propedeutico di geometria proiettiva (corso autonomo che si svolgeva in quei tempi!). Il Nostro semplifica la trattazione dello *Staudt* rinunciando a separare l'uno dall'altro due elementi immaginari coniugati. Definita la coppia come un'involuzione ellittica su una forma di 1ª specie reale, le

(4) A. TERRACINI, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, Note I, II, III, Vol. XCIX, p. 214 (1913-14), Vol. CI, p. 695 (1915-16), Vol. CV, p. 306 (1919-20); L. MURACCHINI, *Le varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore alla ordinaria*, Parte I e Parte II, Rivista Mat. Univ. Parma, Vol. 2, p. 435 (1951) e Vol. 3, p. 75 (1952). Per $k > 5$, il problema di determinare tutte le V_k i cui S_k tangenti ricoprono una varietà di dimensione $< 2k$ non è stato ancora risolto.

(5) M. VILLA, *Ricerche sulle curve quasi-asintotiche*, Note I e II, Rend. dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Ser. 6, Vol. XXVIII, pp. 246, 302 (1938).

coppie armoniche si definiscono mediante le involuzioni permutabili, la coppia di elementi uniti di una proiettività ellittica si definisce mediante l'involuzione permutabile con la proiettività stessa. Si studiano le coppie di elementi immaginari coniugati quali si presentano nella teoria delle coniche e si fanno varie applicazioni.

E veniamo ai lavori: « *Un nuovo campo di ricerche geometriche* » (costituito da quattro Note) e « *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* ». Gli enti iperalgebrici sono stati introdotti sostanzialmente da *C. Segre* appunto in questi due lavori, ma particolari enti iperalgebrici erano stati considerati anche prima da *Staudt, Juel* e dai matematici francesi *Poincaré, Picard, Hermite*. Consideriamo le rappresentazioni dell'S_1 complesso sul piano reale, dell'S_2 complesso sull'S_4 reale, più in generale dell'S_r complesso sull'S_{2r} reale. Orbene una varietà V_d dell'S_r complesso si dice, con *C. Segre*, iperalgebrica quando la sua varietà immagine V_d sull'S_{2r} reale è algebrica (d dimensione reale della varietà, cioè numero dei parametri reali da cui dipende il punto generico sulla varietà, $0 \leq d \leq 2r-1$). E analogamente una trasformazione fra due S_r chiamasi iperalgebrica quando ha per immagine una trasformazione algebrica (reale) fra gli spazi S_{2r} reali rappresentativi.

Col lavoro « *Un nuovo campo di ricerche geometriche* » il *Segre* si propone di porre le basi di una geometria proiettiva degli enti iperalgebrici analoga alla geometria proiettiva degli enti algebrici.

Egli svolge dapprima uno studio di quelle corrispondenze fra rette, piani o spazi ordinari (complessi), che possono definirsi come il prodotto di una proiettività e del coniugio (6). Egli chiama siffatte corrispondenze *antiproiettività* (*anticollineazioni* o *antireciprocità*). Si sofferma specialmente sulle antiproiettività involutorie sulla retta, nel piano, nello spazio (le *antinvoluzioni*) che porgono coi loro elementi uniti (quando ci sono) le *catene* (già considerate dallo *Staudt* nel caso della retta). Le antireciprocità involutorie nel piano o nello spazio danno invece coi loro elementi uniti (se ci sono) le *iperconiche* nel caso del piano o le *iperquadriche* nel caso dello spazio. Rileva le analogie di questi enti con le coniche e le quadriche ordinarie ma anche profonde differenze. Così mentre una conica si genera anche con fasci di rette proiettivi, il luogo dei punti d'incontro dei raggi corrispondenti di due fasci antiproiettivi non è un'iperconica, ma un ente comune ad un *fascio* d'iperconiche (7).

Le catene sulla retta, le iperconiche, le iperquadriche sono rappresentate analiticamente da forme iperalgebriche reali del 1° ordine, dette anche forme d'Hermite (uguagliate a zero), cioè da equazioni del tipo

$$\Sigma\, a_{lm} x_l \bar{x}_m = 0$$

dove $a_{lm} = \bar{a}_{lm}$ (indicando in generale con $\bar{\alpha}$ il numero complesso coniugato di α) e le x coordinate proiettive sulla retta, nel piano, nello spazio.

Il *Segre* osserva che per le forme iperalgebriche reali del 1° ordine sussiste una legge d'inerzia analoga a quella delle forme quadratiche a coefficienti reali.

Si considerano, nell'ultima parte del lavoro, sistemi lineari ed intersezioni d'iperconiche e d'iperquadriche.

Nell'altro lavoro « *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* » il *Segre* si occupa dapprima delle rappresentazioni reali degli spazi lineari complessi, fra l'altro, mediante quelle belle ed importanti varietà algebriche che presero poi il suo nome. E va rilevato che fu la necessità di avere una rappresentazione dell'S_r complesso sopra una varietà

(6) La corrispondenza in cui ad un punto di uno spazio proiettivo si fa corrispondere il punto complesso coniugato era già stata considerata dallo *Staudt*. La denominazione ad essa data di *coniugio* è di *C. Segre*.

(7) Tale ente è stato chiamato dal Recensore *pseudoconica*.

reale, in cui la corrispondenza biunivoca fra punti complessi di S_r e punti reali della varietà non avesse eccezioni, che portò il *Segre* a considerare siffatte varietà. A queste varietà il *Segre* dedicò poi la Nota dal titolo « *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* » contenuta nel Vol. I di queste *Opere* (8) (9). Nel caso della V_{2r} di Segre rappresentativa dell'S_r complesso, gli spazi generatori sono immaginari a due a due coniugati (i punti intersezione di spazi generatori immaginari coniugati sono i punti reali di V_{2r} rappresentativi dei punti dell'S_r complesso).

Successivamente riconsidera le antiproiettività, le antiproiettività involutorie, le catene, le antipolarità, le iperconiche, le iperquadriche (che già aveva considerate nel lavoro « *Un nuovo campo di ricerche geometriche* ») mediante le corrispondenti rappresentazioni reali.

Passa poi ad introdurre alcune nozioni di carattere generale relativamente alle varietà considerate e in particolare alle varietà iperalgebriche, di notevole importanza quella di varietà algebrica minima e di corrispondenza algebrica congiunta ad una varietà iperalgebrica (10). Considera, in particolare, il caso delle varietà iperalgebriche ad una dimensione (fili) e a due dimensioni (tele).

Introduce infine i punti bicomplessi, cioè quegli enti che hanno per immagini i punti complessi delle varietà rappresentative, i punti tricomplessi che hanno per immagini i punti bicomplessi delle varietà rappresentative, ecc. Di qui altre indefinite estensioni di enti e di concetti. I nuovi *punti* introdotti vengono chiariti alla luce della teoria dei numeri complessi a più unità (11).

(8) Il *Segre* considera (a p. 180 del Vol. I) S_7 tangenti alla V_4 di Segre passanti per una quadrica dell'S_3 di V_4, mentre basta dire S_7 passanti per una quadrica dell'S_3 di V_4, in quanto gli S_7 passanti per una quadrica dell'S_3 di V_4 sono senz'altro tangenti a V_4.

(9) L'interesse delle varietà di Segre, prodotto cartesiano di spazi lineari, è sottolineato dal *Severi* nella prefazione del Vol. I. Anche nelle ricerche, di carattere differenziale, sulle trasformazioni puntuali fra due o più spazi lineari, le rappresentazioni sulle varietà di Segre presentano notevole interesse come appare da varie ricerche del Recensore [Ad es.: M. VILLA, *Transformations ponctuelles et transformations crémoniennes,* « Colloque de Géométrie Algébrique du Centre Belge des Récherches Mathématiques (CBRM) », Liège (1952), p. 50; M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali fra tre o più spazi lineari,* Questo Bollettino, Ser. III, Vol. 20, p. 87 (1965)]. Sono state ottenute anche caratterizzazioni, di natura differenziale, delle varietà di Segre. Così la V_4^6 di Segre (relativa a due piani) e certe varietà Φ_4, escludendo due casi banali, sono le uniche varietà a quattro dimensioni che posseggono $\infty^8 E_2$ di $\gamma_{1,3}$ (M. VILLA, *Ricerche sulle varietà V_k che posseggono ∞^δ E_2 di $\gamma_{1,3}$ con particolare riguardo al caso $k=4$, $\delta=8$*, Memorie dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Ser. VI, Vol. VII, p. 373, 1939). Le Φ_4 si definiscono nel modo seguente: Considerati in S_8 un piano S_2 e una superficie di Veronese F_4 (appartenente ad un S_5 sghembo con S_2), Φ_4 è la varietà luogo di ∞^2 superficie appartenenti agli S_3 proiettanti dall'S_2 i punti di F_4.

(10) Il concetto di varietà algebrica minima di una data varietà iperalgebrica, introdotto da *C. Segre* (a p. 368 del Vol. II), deve essere precisato nel modo seguente: Una varietà iperalgebrica V_k (di dimensione reale k) si dice *irriducibile* quand'è irriducibile la varietà algebrica reale immagine, in una delle rappresentazioni reali di V_k. La varietà algebrica minima di una V_k irriducibile è la varietà algebrica irriducibile di dimensione minima, contenente V_k.

(11) Il *Segre* è stato spinto ad introdurre i punti bicomplessi per eliminare nello studio degli enti iperalgebrici le *questioni di realità,* ma va osservato che lo studio degli enti iperalgebrici nello spazio complesso ha un interesse speciale.

Successivamente a queste ricerche del *Segre*, dalle ricerche del Recensore sulle varietà iperalgebriche è apparso come le iperconiche e le iperquadriche siano le varietà essenziali della geometria iperalgebrica.

Il Recensore ha infatti dimostrato che ogni varietà iperalgebrica di dimensione (reale) massima è birazionalmente equivalente ad una varietà ottenuta segando una varietà algebrica (unirazionale) con un'iperquadrica. Le varietà iperalgebriche di S_r di dimensione (reale) massima, cioè $2r-1$, sono state chiamate dal Recensore *ipersuperficie iperalgebriche* e ogni varietà iperalgebrica di S_r è intersezione di ipersuperficie iperalgebriche.

Il Recensore ha dimostrato che una ipersuperficie iperalgebrica V_{2r-1} di S_r individua un sistema lineare Σ di ipersuperficie algebriche e una antipolarità Ω in esso; la dimensione di Σ e la specie di Ω (chiamati dal Recensore *genere* e *specie* della V_{2r-1}) sono invarianti razionali e antirazionali (cioè per le trasformazioni che sono il prodotto di trasformazioni razionali e del coniugio) della V_{2r-1} (12).

Dal punto di vista analitico, le V_{2r-1} sono rappresentate da un'equazione del tipo

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_r; \; \bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r) = 0$$

dove f è una forma iperalgebrica reale, cioè f è un polinomio omogeneo di grado n nelle x_i e un polinomio omogeneo nelle complesse coniugate $\bar{x}_i$, tale che $f \equiv \bar{f}$, $\bar{f}$ essendo la forma complessa coniugata della f (ottenuta cioè dalla f sostituendo ad ogni coefficiente e ad ogni variabile il numero complesso coniugato). Le proprietà suddette si collegano al fatto che la legge d'inerzia stabilita dal *Segre* per le forme iperalgebriche reali del 1° ordine si può estendere, come ha dimostrato il Recensore, ad ogni forma iperalgebrica reale (13).

Come si è già detto, è stato dimostrato dal Recensore, che ogni ipersuperficie iperalgebrica è birazionalmente equivalente ad una varietà ottenuta segando una varietà algebrica (unirazionale) con un'iperquadrica. Questo risultato mette in chiaro l'intima essenza delle varietà iperalgebriche, e, in un certo senso, conclude la loro teoria. Le varietà iperalgebriche essenziali sono, insomma, le iperquadriche (in particolare: le iperconiche), in quanto da esse e dalle varietà algebriche si ottengono tutte le altre varietà iperalgebriche. Le iperquadriche (per $r=2$ iperconiche, per $r=1$ catene rettilinee) sono le V_{2r-1} del 1° ordine, cioè le V_{2r-1} per le quali il sistema associato è un sistema lineare d'iperpiani.

Le catene rettilinee e le iperconiche, prima di *C. Segre*, erano state incontrate da *Picard* e da *Poincaré* nelle loro ricerche sulle funzioni fuchsiane, kleiniane ed iperfuchsiane. Per $r=3$ le iperquadriche furono studiate (dopo *C. Segre*) da *E. Cartan*. Le iperconiche sono state poste dal Recensore in relazione con varietà iperalgebriche più semplici mediante le *trasformazioni pseudocremoniane* (14).

Dopo *C. Segre*, lo studio degli enti iperalgebrici venne ripreso da *E. Cartan*. Nel libro di *E. Cartan* « *Géométrie projective complexe* » (Gauthier-Villars, Paris, 1931) le nozioni fondamentali della geometria proiettiva complessa vengono considerate da un punto di vista che in un certo senso va al di là di questa geometria e le ricollega alla geometria riemanniana.

(12) Si veda: M. VILLA, *Gli enti iperalgebrici di Corrado Segre*. Questo Bollettino, Ser. III, Vol. 14, p. 214 (1959). In questo lavoro trovasi anche un'ampia bibliografia. L'ordine del sistema lineare è l'*ordine* della ipersuperficie iperalgebrica ed è un carattere proiettivo e antiproiettivo di essa.

(13) M. VILLA, *op. cit.* nella (12).

(14) Si veda: M. VILLA, *op. cit.* nella (12). Una particolare trasformazione pseudocremoniana fra due piani complessi (x, y), (x', y') è la seguente $x' = x$, $y' = \bar{y}$, chiamata *pseudoconiugio* ($\bar{y}$ essendo il numero complesso coniugato di y). Si veda: M. VILLA, *op. cit.* nella (12).

Altre ricerche si sono avute in relazione all'introduzione degli elementi bicomplessi di *C. Segre*. Ricordo a tal riguardo i lavori dello *Spampinato* (15).

L'utilità dei concetti introdotti da *C. Segre* è apparsa anche, come *C. Segre* aveva previsto, nelle ricerche sulle funzioni analitiche di due o più variabili complesse, nella geometria pseudoconforme (*Severi, E. Cartan, B. Segre* ed altri) (16).

E non accenno qui ad altri sviluppi (17).

Dopo la produzione scientifica che è seguita a quella di *C. Segre* sugli enti iperalgebrici, l'apprezzamento di *H. F. Baker* sulla teoria degli enti iperalgebrici (18), risalente al 1927 e quindi fra l'altro anteriore alla produzione suddetta, appare sfuocato, superato, e non meritava quindi di essere preso in considerazione dal *Terracini* nella sua prefazione, ove del resto aggiunge « I punti di vista introdotti da *Segre* nei lavori (sugli enti iperalgebrici) sono veramente importanti, e < il nuovo campo > è stato coltivato in seguito con successo, per esempio dal *Villa*. Non è facile spiegarsi il giudizio negativo formulato da *H. F. Baker* — pur fervente ammiratore dell'attività geometrica di *Segre* — nella sua necrologia di *Corrado Segre* ».

Il *Baker* ammira nel *Segre* lo zelo che egli manifestava nel corrispondere cón giovani geometri, la devozione al proprio tema, lo scrittore, la cultura; ma sull'ammirazione del *Baker* per l'opera scientifica del *Segre* mi permetto di fare le mie riserve.

La verità è che il *Baker* non comprese gli enti iperalgebrici di *Segre* come non comprese l'interesse di altri numerosi lavori di *C. Segre*. Ad esempio egli non accenna neppure nel suo necrologio alla « varietà di Segre ».

Del resto nelle prime righe del necrologio il *Baker*, riferendosi all'opera di *C. Segre*, scrive: « Riguardo alla sua opera, il giudizio si basa piuttosto sopra quanto Egli scrisse prima di aver compiuti i venticinque anni, che sulle pubblicazioni da Lui fatte negli altri trentacinque; e in quelle è la straordinaria bellezza e la penetrante perfezione del suo stile che colpisce ancor più che la novità fondamentale dei suoi concetti ».

Ne viene che tutti i lavori di questo secondo volume (19), in particolare tutti i lavori del *Segre* di geometria proiettiva differenziale, scritti tutti appunto in tale trentacinquennio, cadono in quel giudizio!

Ma il *Baker* ha voluto fare dell'« humour »?

C'è da chiedersi se era il caso di tradurre e di pubblicare in questo Bollettino tale necrologio e non si capisce neppure perchè il *Terracini* lo citi proprio in merito agli enti iperalgebrici quando è quasi tutta l'opera scientifica del *Segre* che viene sminuita in quel necrologio.

Chiude il volume la Nota « *La geometria proiettiva nei campi di numeri duali* ». Il *Segre* considera i *punti duali* le cui quattro coordinate omogenee sono cioè numeri duali (con alcune limitazioni in relazione ai divisori dello zero) e trova come immagini nell'S_3 complesso, le proiettività di dato birapporto sulle rette di S_3. Sviluppa inoltre le prime nozioni della geometria proiettiva di tale spazio. Questa Nota si collega a precedenti lavori dello *Staudt* e del *Predella*. Lo *Staudt* identifica i punti immaginari con le involuzioni di punti reali sopra rette (con determinati versi) e il *Predella* aveva considerato come punti di un nuovo spazio le proiettività paraboliche sulle rette di S_3 (20).

(15) M. VILLA, *op. cit.* nella (12).

(16) M. VILLA, *op. cit.* nella (12).

(17) M. VILLA, *op. cit.* nella (12).

(18) H. F. BAKER, *Corrado Segre*, The Journal of the London Mathematical Society, Vol. I. Traduzione italiana (di G. LORIA) in questo Bollettino, Vol. XI, p. 276 (1927).

(19) Ad eccezione del lavoro « *Le coppie di elementi immaginari nella geometria proiettiva sintetica* » che ha carattere didattico.

(20) Prima di *C. Segre*, i numeri duali sono stati considerati da vari

Questa ricerca del *Segre* ha avuto un seguito in lavori dello *Spampinato* (21).

Anche in tutti i lavori di questo secondo volume spicca quello spirito geometrico caratteristico della Scuola italiana, che i geometri italiani debbono preoccuparsi di mantenere pur nel continuo evolversi della nostra Scienza.

MARIO VILLA

SAINT-GUILHEM RENÉ, *Les principes de l'analyse dimensionnelle. Invariance des relations vectorielles dans certains groupes d'affinités*. Mémorial des sciences mathématiques fasc. CLII. Gauthier Villars, Paris, 1962.

La prima parte del Memoriale, conforme del resto al suo titolo, contiene la seguente ricerca d'interesse anche matematico. Si considerano, in uno spazio vettoriale E prodotto di p spazi vettoriali E_i (E_i può avere anche dimensioni infinite), le affinità L che in ogni E_i si riducono a omotetie. Mediante la topologia e la teoria dei gruppi si determina il gruppo G sottoinsieme delle L che conservano una relazione vettoriale di E; viceversa si determina la forma di una relazione conservata da G. Dai predetti risultati si deduce un teorema più generale di quello classico di Vaschy sull'analisi dimensionale, teorema quest'ultimo che, come è noto, permette di conoscere, la struttura delle relazioni, che s'incontrano nella fisica, e che sono invariabili per un cambiamento dell'unità di misura. Da quanto precede s'intuisce come sia possibile svolgere (e a questo argomento è dedicata la seconda parte del Memoriale) una teoria ampia e rigorosa dell'analisi dimensionale e dei modelli.

Però rimango dubbioso che per una esposizione dell'analisi dimensionale, almeno per quanto interessa il fisico e l'ingegnere, siano proprie necessarie le elevate considerazioni matematiche a cui si è accennato. Come si è già detto, è certo che nel presente fascicolo la teoria dell'analisi dimensionale viene svolta in modo sicuro; fra l'altro si eliminano alcuni paradossi come quello di Lord Rayleigh. Ma, in sostanza, agli stessi risultati (in particolare al criterio per costruire una nozione equivalente al gruppo G) è giunto, in modo molto più semplice fin dal 1928, E. Foà in una memoria pressochè sconosciuta. (E. Foà - Sulle basi dell'analisi dimensionale - L'Industria vol. XLII).

Ritengo comunque che le considerazioni usate dal Saint Guilhem siano veramente utili allo studioso che desidera conoscere l'analisi dimensionale inquadrata in una rigorosa e completa teoria matematica.

DARIO GRAFFI

Autori fra i quali va particolarmente ricordato *E. Study*. I punti del piano duale, nel caso parabolico, vennero rappresentati dallo *Study* mediante una certa varietà (*varietà di Study*) che si definisce nel modo seguente: In S_8 siano dati un piano S_2 ed una superficie F_4 di Veronese (appartenente ad un S_5 sghembo con S_2). Si stabilisca una corrispondenza biunivoca tra i punti di F_4 e le rette di S_2 in modo che ai punti di ogni sezione iperpiana di F_4 corrispondano in S_2 le rette di un inviluppo di 2ª classe. Congiungendo i punti di F_4 con le rette corrispondenti di S_2 si ottengono ∞^2 piani il cui luogo è appunto la V_4^6 di Study. Ora, è interessante osservare che la varietà di Study rientra, come caso particolare, nelle varietà Φ_4 considerate dal Recensore e a cui si è accennato nella nota (9).

(21) M. VILLA, *op. cit.* nella (12).