Bollettino Unione Matematica Italiana

Aldo Belleni-Morante

L'equazione della cinetica dei reattori nucleari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.4, p. 486–497.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_4_486_0>

L'equazione della cinetica dei reattori nucleari

ALDO BELLENI-MORANTE (Firenze) (*)

Sunto. - *Si prova che l'equazione della cinetica dei reattori nucleari, dedotta con procedimento rigoroso direttamente dall'equazione del trasporto di Boltzmann, è un'equazione differenziale di ordine infinito.*

Summary. - *We deduced the reactor kinetics equation directly from the Boltzmann transport equation and we proved that it is a differential equation of infinite order.*

1. - Introduzione.

È noto che esistono diversi metodi per ottenere l'equazione della cinetica dei reattori nucleari a partire dall'equazione del trasporto di BOLTZMANN.

Il più elementare è quello che fa uso dell'approssimazione P-1 (o della diffusione) dell'equazione di BOLTZMANN e che consiste nel risolvere l'equazione della diffusione per separazione delle variabili, [1_1].

Un secondo metodo, più rigoroso del precedente, si fonda sull'ipotesi che la densità neutronica, funzione incognita nell'equazione del trasporto, sia esprimibile mediante un prodotto di una funzione del tempo per una funzione di tutte le altre variabili, [1_2].

I due metodi, ora descritti, conducono ad equazioni, che sono conseguenze approssimate dell'equazione di BOLTZMANN e che sono in pratica utilizzabili soltanto quando il reattore in studio funziona in condizioni «quasi critiche», l'errore che si commette essendo in generale difficilmente valutabile. Il procedimento, descritto in [1_2], è stato quindi modificato in [2], introducendo un'opportuna funzione peso: l'equazione della cinetica dei reattori nucleari può allora essere dedotta da quella del trasporto in maniera rigorosa.

Il procedimento [1_2] è stato anche modificato utilizzando le autosoluzioni dell'equazione di BOLTZMANN aggiunta e sviluppando la densità neutronica in serie di tali autofunzioni, [1_3].

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca Matematica n. 6 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Il metodo [2] conduce però ad un'equazione della cinetica che è spesso troppo complicata ai fini pratici, mentre il metodo [1_3] si fonda sulla congettura che le autosoluzioni dell'equazione di BOLTZMANN aggiunta siano un sistema completo.

Nella presente nota ci proponiamo di ricavare l'equazione della cinetica dei reattori nucleari senza fare uso di alcuna ipotesi approssimata ed operando unicamente sulla funzione densità neutronica, soluzione dell'equazione di BOLTZMANN.

2. - L'equazione di Boltzmann.

Prima di dedurre l'equazione della cinetica dei reattori nucleari, è utile accennare ad alcune proprietà dell'equazione del trasporto.

Sia C un mezzo materiale, omogeneo, limitato dalla superficie regolare e non rientrante S, (1), (V. Figura); supposto che i neutroni, che diffondono entro C, abbiano tutti la stessa energia, la equazione integrale di BOLTZMANN ha la forma, [4]:

$$N(P,\ \Omega,\ t) - \exp(-\Sigma\bar{R})N(P - \bar{R}\Omega,\ \Omega,\ t - \bar{R}/v) =$$

$$(1) \qquad = \frac{f}{4\pi}\int_0^{\bar{R}} \exp(-\Sigma R)\left\{\int_{\omega'} N(P - R\Omega,\ \Omega',\ t - R/v)d\omega'\right\} dR +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{\bar{R}} \exp(-\Sigma R) Q(P - R\Omega,\ t - R/v)dR,$$

ove:

$N(P,\ \Omega,\ t)$ è la densità dei neutroni che, all'istante t, sono nell'intorno del punto $P \in C$ ed hanno velocità $\boldsymbol{v} = v\Omega$;

Σ è la sezione macroscopica d'urto totale;

f è una costante che caratterizza i fenomeni della moltiplicazione dei neutroni per fissione e dello «scattering» (che supponiamo isotropo nel sistema L, [3]);

$\int_{\omega'} \dots\, d\omega' = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \dots \operatorname{sen} \vartheta\, d\vartheta$, ove ϑ e ψ sono rispettivamente l'angolo di colatitudine e l'angolo di azimut, che individuano il ver-

(1) Diciamo con [3] che C è limitato da una superficie non rientrante S, quando ogni semiretta, uscente da un qualsiasi $P \in C$, incontra S una sola volta.

sore $\Omega = \Omega(\vartheta, \psi)$ rispetto ad un conveniente sistema di coordinate cartesiani ortogonali;
$Q(P, t)$ è una funzione positiva assegnata, che supponiamo per ora continua e limitata per $P \in C$ e qualunque sia t.

La (1), se in particolare è $\bar{R} = R_S(P, \Omega)$, (Fig.), diviene:

$$(2) \qquad \begin{aligned} N(P, \Omega, t) &= \exp[-\Sigma R_S(P, \Omega)] N_S(P_{\bar{S}}, \Omega, t - R_S(P, \Omega)/v) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{R_S(P, \Omega)} \exp(-\Sigma R) \left\{ f \int_{\omega'} N(P - R\Omega, \Omega', t - R/v) d\omega' + \right. \\ &\left. + Q(P - R\Omega, t - R/v) \right\} dR, \end{aligned}$$

ove:
$N_S(P_{\bar{S}}, \Omega, t)$ è una funzione positiva assegnata, che supponiamo continua, limitata e definita per qualsiasi valore di t, per $P_{\bar{S}} \in S$ e per tutti gli Ω che soddisfano la relazione $\Omega . \boldsymbol{u} \leq 0$, $\boldsymbol{u}$ essendo il versore della normale esterna di S;
$R_S = R_S(P, \Omega)$ è una funzione positiva, continua e limitata e definita per $P \in C$ e qualunque sia Ω.

Viceversa, dalla (2) è possibile risalire alla forma (1).

Non è difficile dedurre dalla (1) l'equazione del trasporto in forma differenziale. Notiamo infatti che il secondo membro della (1) è derivabile rispetto ad $\bar{R}$ e dunque lo è anche il primo. Segue che $N(P - \bar{R}\Omega, \Omega, t - \bar{R}/v)$ è derivabile rispetto ad $\bar{R}$ e quindi rispetto a t ed alle coordinate x, y, z di P e si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{R}} N(P - \bar{R}\Omega, \Omega, t - \bar{R}/v) &= -\Omega \cdot \Delta N(P - \bar{R}\Omega, \Omega, t - \bar{R}/v) - \\ &- \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} N(P - \bar{R}\Omega, \Omega, t - \bar{R}/v), \qquad (\Delta \equiv \mathrm{grad}). \end{aligned}$$

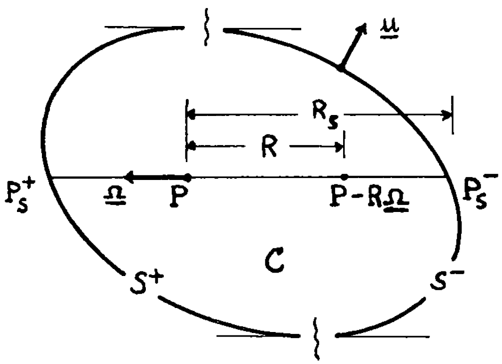
Dalla (1), derivando rispetto ad $\bar{R}$, si ottiene allora:

$$\begin{aligned} &\Sigma \exp(-\Sigma \bar{R}) N(P - \bar{R}\Omega, \Omega, t - \bar{R}/v) + \\ &+ \exp(-\Sigma \bar{R}) \left\{ \Omega \cdot \Delta N(P - \bar{R}\Omega, \Omega, t - \bar{R}/v) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} N(P - \bar{R}\Omega, \Omega, t - \bar{R}/v) \right\} = \frac{f}{4\pi} \exp(-\Sigma \bar{R}) \int_{\omega'} N(P - \bar{R}\Omega, \Omega', t - \bar{R}/v) d\omega' + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \exp(-\Sigma \bar{R}) Q(P - \bar{R}\Omega, t - \bar{R}/v), \end{aligned}$$

dato che le funzioni integrande, al secondo membro della (1), sono continue. Dalla precedente, dividendo ambo i membri per $\exp(-\Sigma\bar{R}$ e sostituendo P a $P - \bar{R}\Omega$ e t a $t - \bar{R}/v$, si ricava:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v\Sigma + v\Omega \cdot \Delta\right] N(P, \Omega, t) = \frac{v}{4\pi} f \int_{\omega'} N(P, \Omega', t) d\omega' + \frac{v}{4\pi} Q(P, t). \tag{3}$$

La (3) è la forma differenziale dell'equazione di BOLTZMANN. Viceversa, dalla (3) è possibile dedurre la (1) e quindi la (2).



$S = S^+ \cup S^-$

Dimostriamo ora che, se le funzioni Q ed N_S ammettono derivate m-esime rispetto a t continue e limitate, la densità neutronica $N(P, \Omega, t)$ risulta derivabile m volte rispetto a t e la $\partial^m N/\partial t^m$ è continua e limitata. Procedendo infatti in maniera analoga a quanto fatto in [5], possiamo risolvere la (2) con il metodo della serie di NEUMANN, ponendo:

$$N(P, \Omega, t) = \sum_{i=0}^{\infty} N_i(P, \Omega, t), \tag{4}$$

ove:

$$\begin{cases} N_0(P, \Omega, t) = \exp[-\Sigma R_S(P, \Omega)] N_S(P_S^-, \Omega, t - R_S(P, \Omega)/v) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_0^{R_S} \exp(-\Sigma R) Q(P - R\Omega, t - R/v) dR, \\ N_i(P, \Omega, t) = \dfrac{f}{4\pi} \displaystyle\int_0^{R_S} \exp(-\Sigma R) \left\{ \int_{\omega'} N_{i-1}(P - R\Omega, \Omega', t - R/v) d\omega' \right\} dR, \\ \qquad\qquad i = 1, 2, 3, \dots . \end{cases} \tag{5}$$

Tenendo presenti le ipotesi fatte all'inizio di questo paragrafo sulle funzioni Q ed N_S, dalla prima delle (5) segue che $N_0(P, \Omega, t)$

è una funzione continua e limitata per $P \in C$ e qualunque siano Ω e t. Indicato allora con H_0 l'estremo superiore dei valori della funzione $N_0(P, \Omega, t)$ per $P \in C$ e qualunque siano Ω e t, dalle (5) si ottiene:

$$0 \leq N_0(P, \Omega, t) \leq H_0; \; 0 \leq N_1(P, \Omega, t) \leq c\{1 - \exp[-\Sigma R_S(P, \Omega)]\} H_0 \leq$$
$$\leq c[1 - \exp(-\Sigma\delta)] H_0,$$

ove $c = f/\Sigma$, $\qquad \delta = \sup_{\substack{P \in C \\ \Omega}} [R_S(P, \Omega)] = \sup_{\substack{P \in C \\ \Omega}} [\overline{PP_S}]$.

E, in generale:

$$0 \leq N_i(P, \Omega, t) \leq \{c[1 - \exp(-\Sigma\delta)]\}^i H_0 = H_0 h^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots. \tag{6}$$

ove $h = c[1 - \exp(-\Sigma\delta)]$.

Dalla (6), supposto che valga $h < 1$, segue che la serie (4) è uniformemente convergente per $P \in C$ e qualunque siano Ω e t; dunque la funzione continua e limitata, somma della serie (4), è l'unica soluzione dell'equazione (2), nelle ipotesi che Q ed N_S siano continue e limitate.

Avvertiamo che, se si suppone di conoscere, come in [5], la funzione $N(P, \Omega, t)$ per $t \leq 0$, l'esistenza e l'unicità della soluzione della (2) possono essere dimostrate senza fare uso della condizione $h < 1$.

Ammettiamo ora che le funzioni Q ed N_S possiedano derivate prime rispetto a t continue e limitate: segue che $N_0(P, \Omega, t)$ è derivabile rispetto a t e che la $\partial N_0/\partial t$ è continua è limitata. Indicato allora con H_1 l'estremo superiore dei valori che la funzione $|\partial N_0/\partial t|$ assume per $P \in C$ e qualunque siano Ω e t. si ha:

$$\left|\frac{\partial N_1}{\partial t}\right| \leq \frac{f}{4\pi}\int_0^{R_S} \exp(-\Sigma R)\left\{\int_{\omega'}\left|\frac{\partial}{\partial t} N_0(P - R\Omega, \Omega', t - R/v)\right| d\omega'\right\} dR \leq$$
$$\leq c[1 - \exp(-\Sigma\delta)] H_1 = hH_1.$$

E, in generale:

$$\left|\frac{\partial N_i}{\partial t}\right| \leq H_1 h^i, \qquad i = 0, 1, 2, \dots. \tag{7}$$

La (7) nell'ipotesi che $h < 1$, permette di affermare che la serie (4) è derivabile rispetto a t termine a termine e che la $\partial N/\partial t$ è una funzione continua dei suoi argomenti, quale somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue.

Osserviamo poi che, dalla (2), dalla (6) e dalla (7), nell'ipotesi

$h < 1$, si ottiene:

$$0 \leq N(P,\ \Omega,\ t) \leq \frac{H_0}{1-h}, \qquad \left|\frac{\partial N}{\partial t}\right| \leq \frac{H_1}{1-h},$$

e, in generale:

$$\left|\frac{\partial^m N}{\partial t^m}\right| \leq \frac{H_m}{1-h}, \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots, \tag{8}$$

ove $\quad H_m = \sup\limits_{P\in C,\ t,\ \Omega}\left[\left|\frac{\partial^m}{\partial t^m} N_0(P,\ \Omega,\ t)\right|\right].$

Riassumendo i risultati precedenti, possiamo enunciare il

TEOREMA 1. - Se le funzioni Q ed N_S, che compaiono al secondo membro della (2), sono funzioni continue e limitate insieme con le loro derivate m-esime rispetto a t e se $h = c[1 - \exp(-\Sigma\delta)] < 1$, l'equazione (2) ammette una ed una sola soluzione $N = N(P,\ \Omega,\ t,)$ funzione continua e limitata insieme con la sua derivata m-esima rispetto a t. La funzione $N(P,\ \Omega,\ t)$ e la sua derivata m-esima rispetto a t soddisfano poi diseguaglianze del tipo (8).

3. - L'equazione della cinetica.

Procedendo come in [6], moltiplichiamo ambo i membri della (3) per sen $\vartheta d\vartheta d\psi dV_P$ e integriamo rispetto a ϑ tra 0 e π, rispetto a ψ tra 0 e 2π e in tutto il volume di C. Si ottiene:

$$\frac{d}{dt} n(t) + v\Sigma n(t) + v\int_\omega d\omega \int_C [\Omega \cdot \Delta N(P,\ \Omega,\ t)]dV_P = vfn(t), \tag{9}$$

ove si é posto:

$$n(t) = \int_\omega d\omega \int_C N(P,\ \Omega,\ t)dV_P. \tag{10}$$

L'integrale, che compare al primo membro della (9), può essere trasformato mediante il teorema di GAUSS:

$$\int_C [\Omega \cdot \Delta N(P,\ \Omega,\ t)]dV_P = \int_S [\boldsymbol{u} \cdot \Omega N(P_S,\ \Omega,\ t)]dS =$$

$$= \int_{S+} [\boldsymbol{u} \cdot \Omega N(P_S^+,\ \Omega,\ t)]dS - \int_{S-} [\,|\,\boldsymbol{u} \cdot \Omega\,|\, N(P_S^-,\ \Omega,\ t)]dS,$$

ove $S+$ é la porzione di S per cui $\Omega.\ \boldsymbol{u} > 0$ ed $S-$ quella per cui $\Omega \cdot \boldsymbol{u} \leq 0$.

Facendo poi uso della (2) (per $P = P_S^+$ e per $P = P_S^-$ rispettivamente), si ottiene:

$$\int_C [\Omega \cdot \Delta N(P,\ \Omega,\ t)] d V_P = - \int_{S-} [\,|\,\boldsymbol{u} \cdot \Omega\,|\, N_S(P_S^-,\ \Omega,\ t)] dS +$$

$$+ \int_{S+} \{\, \boldsymbol{u} \cdot \Omega \exp[-\Sigma R_S(P_S^+,\ \Omega)] N_S(P_S^-,\ \Omega,\ t - R_S(P_S^+,\ \Omega)/v) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{u} \cdot \Omega \int_0^{R_S^+} \exp(-\Sigma R) \Big[f \int_{\omega'} N(P_S^+ - R\Omega,\ \Omega', t - R, v) d\omega' +$$

$$+ Q(P_S^+ - R\Omega,\ t - R/v) \Big] dR \,\}\, dS,$$

ove si è tenuto conto del fatto che $R_S(P_S^-,\ \Omega) = 0$ e si è posto $R_S^+ = R_S(P_S^+,\ \Omega)$. Posto poi:

$$s(\Omega,\ t) = v \int_{S-} [\,|\,\boldsymbol{u} \cdot \Omega\,|\, N_S(P_S^-,\ \Omega,\ t)] dS - v \int_{S+} \Big\{ \boldsymbol{u} \cdot \Omega \exp[-\Sigma R_S(P_S^+,\ \Omega)] \times$$

$$\times N_S(P_S^-, \Omega, t - R_S(P_S^+, \Omega)/v) + \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{u} \cdot \Omega \int_0^{R_S^+} Q(P_S^+ - R\Omega, t - R/v) \exp(-\Sigma R) dR \Big\} dS,$$

si ha:

$$\begin{aligned} &\int_C [\Omega \cdot \Delta N(P,\ \Omega,\ t)] d V_P = -\frac{1}{v} s(\Omega,\ t) + \\ (11) \qquad &+ \frac{f}{4\pi} \int_{S+} \Big\{ \boldsymbol{u} \cdot \Omega \int_0^{R_S^+} \exp(-\Sigma R) \Big[\int_{\omega'} N(P_S^+ - R\Omega, \Omega', t - R/v) d\omega' \Big] dR \Big\} dS. \end{aligned}$$

Dalla (11), con un metodo simile a quello della «distribuzione delle corde» di Dirac, [7], si ricava:

$$\int_C [\Omega \cdot \Delta N(P,\ \Omega,\ t)] d V_P = -\frac{1}{v} s(\Omega,\ t) + \frac{f}{4\pi} \int_C \Big[\exp(-\Sigma \overline{P_S^+ Q}) \times$$

$$\times \int_{\omega'} N(Q,\ \Omega',\ t - \overline{P_S^+ Q}/v) d\omega' \Big] d V_Q,$$

ove si è posto $Q = P_S^{+} - R\Omega$.

Sostituendo la precedente nella (9), si ottiene infine:

$$\tag{12} \frac{d}{dt} n(t) = s(t) + v(f - \Sigma) n(t) -$$

$$- \frac{v}{4\pi} f \int_\omega d\omega \int_C \left[\exp(-\Sigma \overline{P_S^{+} Q}) \int_{\omega'} N(Q, \Omega', t - \overline{P_S^{+} Q}/v) d\omega' \right] dV_Q$$

ove $s(t) = \int_\omega s(\Omega, t) d\omega$.

Sviluppando poi la densità neutronica $N(Q, \Omega', t - \overline{P_S^{+} Q}/v)$ in serie di potenze di $(\overline{P_S^{+} Q}/v)$:

$$\tag{13} N(Q, \Omega', t - \overline{P_S^{+} Q}/v) = N(R, \Omega', t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} (\overline{P_S^{+} Q}/v)^m \frac{\partial^m}{\partial t^m} N(Q, \Omega', t),$$

la (12) può scriversi:

$$\tag{14} \begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= v(f - \Sigma) n(t) - \frac{v}{4\pi} f \int_\omega d\omega \int_C \left[\exp(-\Sigma \overline{P_S^{+} Q}) \int_{\omega'} N(Q, \Omega', t) d\omega' \right] dV_Q + s(t) - \\ &- \frac{v}{4\pi} f \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{dt^m} \int_\omega d\omega \int_C \left[\exp(-\Sigma \overline{P_S^{+} Q}) (\overline{P_S^{+} Q}/v)^m \int_{\omega'} N(Q, \Omega', t) d\omega' \right] dV_Q, \end{aligned}$$

ove si è supposto che la serie, che compare al secondo membro della (13) sia integrabile termine a termine.

Definiamo ora le funzioni:

$$\tag{15} \begin{cases} \bar{p}(t) = \int_\omega d\omega \int_C \left[\exp(-\Sigma \overline{P_S^{+} Q}) \int_{\omega'} N(Q, \Omega', t) d\omega' \right] dV_Q / [4\pi n(t)] \leq 1, \\ [\bar{\tau}_m(t)]^m = \int_\omega d\omega \int_C \left[\exp(-\Sigma \overline{P_S^{+} Q}) (\overline{P_S^{+} Q}/v)^m \int_{\omega'} N(Q, \Omega', t) d\omega' \right] dV_Q / [4\pi n(t)] \leq \\ \leq (\delta/v)^m \bar{p}(t), \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

ove $\delta = \sup_{Q \in C,\, \Omega} [\overline{P_S^{+} Q}]$, $4\pi n(t) = \int_\omega d\omega \int_C \left[\int_{\omega'} N(Q, \Omega', t) d\omega' \right] dV_Q$.

Tenendo presente che $\exp(-\Sigma \overline{P_S^{+} Q})$ è la probabilità che un neutrone percorra il tratto $\overline{P_S^{+} Q}$ senza subire collisioni, [8], non è difficile provare che $\bar{p}(t)$ é la probabilità media che un neutrone, dopo aver subito un urto in un qualunque $Q \in C$, sfugga da C attraverso S; $\bar{\tau}_1(t)$ è il tempo medio che un neutrone impiega a sfuggire da C; e così via.

Vogliamo anche sottolineare il fatto che le funzioni $\bar{p}(t)$ e $\bar{\tau}_m^m(t)$ possono essere determinate sperimentalmente e che, anche senza ricorrere a dati sperimentali, $\bar{p}$ e $\bar{\tau}_m^m$ hanno, in ogni istante t, valori che sono largamente insensibili alla scelta della forma della funzione $\int_{\omega'} N(Q, \Omega', t) d\omega'$, che compare nella (15), [6].

Facendo uso delle (15), la (14) diviene:

$$\frac{dn}{dt} = v(f - \Sigma) n(t) - vf\bar{p}(t) n(t) - vf \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{dt^m} [\bar{\tau}_m^m(t) n(t)] + s(t),$$

o anche:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{c[1 - \bar{p}(t)] - 1}{l_0} n(t) - \frac{c}{l_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{dt^m} [\bar{\tau}_m^m(t) n(t)] + s(t), \tag{16}$$

ove si è posto $c = f/\Sigma$, $l_0 = 1/v\Sigma$.

La (16) é l'equazione della cinetica dei reattori nucleari.

Proviamo infine che le operazioni, che si sono eseguite per ottenere la (16) a partire dalla (12), sono tutte lecite, se si fanno ipotesi opportune sulle funzioni Q ed N_S, che compaiono al secondo membro della (2).

Osserviamo all'uopo che, per il termine generico della serie (13), si ha:

$$\left| \left[\frac{\overline{P_S^+ Q}}{v} \right]^m \frac{\partial^m}{\partial t^m} N(Q, \Omega', t) \right| \leq \left(\frac{\delta}{v} \right)^m \left| \frac{\partial^m}{\partial t^m} N(Q, \Omega', t) \right| \leq \left(\frac{\delta}{v} \right)^m \frac{H_m}{1 - h}, \tag{17}$$

ove si è fatto uso della (8). Se ammettiamo poi che le derivate parziali successive rispetto a t delle funzioni Q ed N_S, oltre che continue e limitate, siano tali che la $\partial^m N_0 / \partial t^m$ soddisfi la diseguaglianza:

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial t^m} N_0(P, \Omega, t) \right| \leq AB^m, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

A e B essendo costanti positive opportune, dalla (17) segue:

$$\left| \left[\frac{\overline{P_S^+ Q}}{v} \right]^m \frac{\partial^m}{\partial t^m} N(Q, \Omega', t) \right| \leq \frac{A}{1 - h} \left(\frac{\delta B}{v} \right)^m, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

dato che, nelle ipotesi fatte, $H_m \leq AB^m$,

La diseguaglianza (19) permette di affermare che la serie (13) è uniformemente convergente per $Q \in C$ e qualunque siano Ω e t e dunque integrabile termine a termine e che la serie degli integrali è ancora uniformemente convergente.

Notiamo poi che, nell'ipotesi (18), la derivata m-esima della funzione $n = n(t)$, definita dalla (10), soddisfa la diseguaglianza seguente:

$$\left| \frac{d^m}{dt^m} n(t) \right| \leq \int_\omega d\omega \int_C \left| \frac{\partial^m}{\partial t^m} N(P, \Omega, t) \right| dV_P \leq \frac{4\pi V_C H_m}{1-h} \leq KB^m, \tag{20}$$

ove $K = 4\pi A V_C/(1-h)$ e V_C è il volume di C.

Riassumendo i risultati precedenti possiamo enunciare il

TEOREMA 2. - « Se le funzioni Q ed N_S, che compaiono al secondo membro della (2), sono assegnate in modo che sia verificata la diseguaglianza (18) e se $h < 1$, valgono i risultati del Teorema 1. e la funzione $n = n(t)$, definita dalla (10), soddisfa l'equazione differenziale di ordine infinito (16) e la $d^m n/dt^m$ soddisfa la diseguaglianza (20). »

4 - L'equazione (16).

All'equazione della cinetica dei reattori nucleari (16) si possono associare le condizioni iniziali:

$$\left\{ \begin{aligned} & n(0) = \int_\omega d\omega \int_C N(P, \Omega, 0) dV_P, \\ & \left[\frac{d^m}{dt^m} n(t) \right]_{t=0} = \left[\int_\omega d\omega \int_C \left\{ \frac{\partial^m}{\partial t^m} N(P, \Omega, t) \right\} dV_P \right]_{t=0}, \qquad m = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \right. \tag{21}$$

i secondi membri delle (21) potendosi ritenere noti in seguito a misure della densità neutronica $N(P, \Omega, t)$, eseguite per valori di t appartenenti ad un conveniente intorno dell'istante $t = 0$.

Notiamo che l'equazione (16) con le condizioni iniziali (21) ammette almeno la soluzione (10), $n(t) = \int_\omega d\omega \int_C N(P, \Omega, t) dV_P$, ove $N(P, \Omega, t)$ è l'unica soluzione della (2).

Dimostriamo che la (10) è anche l'unica soluzione del sistema (16), (21), appartenente alla classe di funzioni, che ammettono derivate rispetto a t di qualsiasi ordine e tali da soddisfare, per $t \geq 0$, diseguaglianze del tipo (20).

Siano infatti $n(t)$ ed $\bar{n}(t)$ due soluzione distinte del sistema (16), (21), appartenenti alla classe di funzioni sopra definita. Posto $\varepsilon(t) = = n(t) - \bar{n}(t)$, si verifica immediatamente che la $\varepsilon(t)$ soddisfa l'equazione, che si ottiene dalla (16) facendovi $s(t) \equiv 0$, e le condizioni iniziali:

$$(22) \qquad \varepsilon(0) = \lim_{t \to 0+} \varepsilon(t) = 0; \left[\frac{d^m}{dt^m}\varepsilon(t)\right]_{t=0} = \lim_{t \to 0+}\left[\frac{d^m}{dt^m}\varepsilon(t)\right] = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots;$$

Si ha poi, per ogni $t \geq 0$:

$$(23) \qquad \left|\frac{d^m}{dt^m}\varepsilon(t)\right| \leq \left|\frac{d^m}{dt^m}n(t)\right| + \left|\frac{d^m}{dt^m}\bar{n}(t)\right| \leq 2KB^m, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

Dalle (23) segue che $\varepsilon = \varepsilon(t)$ é sviluppabile in serie di TAYLOR:

$$(24) \qquad \varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{dt^m}\varepsilon(t)\right]_{t=t_0}(t - t_0)^m \quad t_0 > 0, \ t \geq 0.$$

Sia ora $[0, T]$, $T > 0$, un intervallo di tempo arbitrario prefissato; per $t_0 \in (0, T]$, $t \in [0, T]$, la serie, che compare al secondo membro della (24) è uniformemente convergente a causa della (23). Passando quindi al limite per $t_0 \longrightarrow 0+$, dalla (24) si ottiene:

$$\varepsilon(t) = \lim_{t_0 \to 0+} \varepsilon(t_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \lim_{t_0 \to 0+} \left\{\left[\frac{d^m}{dt^m}\varepsilon(t)\right]_{t=t_0}\right\} \equiv 0,$$

ove si è fatto uso delle condizioni (22).

Si conclude che, nelle ipotesi che hanno permesso di dedurre la (16) dalla (2), l'equazione (16) con le condizioni (21) ammette una ed una sola soluzione, appartenente alla classe delle funzioni, che hanno derivate di qualsiasi ordine e tali che le derivate verificano le diseguaglianze (20).

BIBLIOGRAFIA

[1_1] S. GLASSTONE and M. C. EDLUND, *Nuclear Reactor Theory*. Princeton: Van Nostrand Company 1958.

M. ASH, *Nuclear Reactor Kinetics*. New York: Mc Graw Hill 1965.

[1_2] L. N. USSACHOFF, P/656, *Proceedings of the First International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol. 5, Geneva 1955.

A. F., HENRY, *Nuclear Sci. Eng.* **3**, 52 (1958).

[1_3] E. R. COHEN, P/629, *Proceedings of the Second Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol. 11, Geneva 1958.

S. KAPLAN et al., *A/Conf./P/271*, *Proceedings of the Third Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, Geneva 1964.

[2] J. LEWINS, *Nuclear Sci. Eng.* 9, 399 (1961).

T. GOZANI, *Nukleonik* 5, 55 (1963).

[3] B. DAVISON, *Neutron Transport Theory.* Oxford: Clarendon Press 1958.

[4] J. SALMON, *Théorie cinétique des neutrons rapides.* Paris: Presses Universitaires de France 1961.

[5] K. M. CASE and P. F. ZWEIFEL, *J. of Math. Phys.* 4, 1376 (1963).

[6] A. BELLENI-MORANTE, *in corso di pubblicazione.*

[7] P. A. M. DIRAC, *British Report M.S.D.* 5, Part I, General Theory, 1943.

[8] A. M. WEINBERG and E. P. WIGNER, *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors.* Chicago Press 1958.

---

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U. M. I.
il 13 gennaio 1966