
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO PEZZANA

**Una costruzione delle trasformazioni
puntuali piane in un loro insieme di
regolarità e sue applicazioni.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 20
(1965), n.4, p. 481–485.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_4_481_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_4_481_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Una costruzione delle trasformazioni puntuali piane in un loro insieme di regolarità e sue applicazioni

MARIO PEZZANA (Bologna) (*)

Sunto. - *Si dà una costruzione, valida per tutte le trasformazioni puntuali fra piani, che può essere usata per lo studio delle trasformazioni stesse. Si conclude applicando la costruzione allo studio di alcuni problemi di contatto.*

1. - In questa Nota studio una costruzione delle trasformazioni puntuali fra piani attraverso proiezioni opportune dei punti di due superficie (¹).

Suppongo, in un primo tempo, che i piani π e π' , tra i quali si considera la trasformazione, siano sovrapposti: chiamo α il sostegno comune.

Nel caso di trasformazioni generiche occorrerà limitarsi ad un dominio Δ (con codominio Δ) di biunivocità.

Supponiamo date le superficie, che indicherò con σ e σ' , di equazioni

$$\sigma) \quad z = f(x, y),$$

$$\sigma') \quad z = \varphi(x, y).$$

Fissati due punti C e C' , chiamerò corrispondenti due punti, di σ e σ' rispettivamente, che si ottengano per proiezione da C e C' di uno stesso punto di α .

Una coppia di punti corrispondenti, proiettati da due nuovi centri S e S' su π e π' rispettivamente danno punti che si corrispondono in una trasformazione puntuale.

Chiamerò le superficie $z = f$ e $z = \varphi$ superficie generatrici della trasformazione.

Orbene:

Qualsiasi trasformazione puntuale fra due piani si può ottenere

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del 26° Gruppo di Ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

(¹) In tutto questo lavoro gli enti andranno considerati nel campo complesso.

nel modo sopra descritto, con scelta opportuna dei centri C, C', S, S' e delle superficie generatrici ⁽²⁾).

Darò nel seguito qualche esempio in casi particolari (omografie, trasformazioni quadratiche e cremoniane); infine indicherò qualche applicazione ai problemi di contatto.

Il risultato più notevole è quello riguardante i contatti analitici tra due trasformazioni: affinchè due trasformazioni abbiano, in una coppia regolare per entrambe, un contatto analitico di ordine n , basterà che le superficie generatrici abbiano lo stesso contatto.

2. - Data una omografia tra due piani sovrapposti π e π' è facile vedere che si può pensare ottenuta con operazione di proiezione e sezione nel modo seguente:

Chiamiamo ancora α il piano sostegno comune di π e π' ; σ e σ' due opportuni piani ausiliari; S, C, S', C' , quattro punti nello spazio pure opportunamente determinati.

.Proiettiamo da S il piano π su σ ; da C, σ su α ; da C', α su σ' ; da S', σ' su π' ⁽³⁾.

Per una particolare omografia il sistema dipende da 10 parametri.

3. - Con metodo analogo si trova che, data una trasformazione quadratica di prima specie tra due piani sovrapposti π e π' , di comune sostegno α , mediante i punti fondamentali e una coppia di punti corrispondenti, è possibile ottenere la corrispondenza come per le omografie solo sostituendo ai piani σ e σ' due quadriche, che chiameremo ancora σ e σ' .

Siano Γ e Γ' le due coniche ottenute segnando σ e σ' con α e G_1 e G_2 due dei loro punti intersezione distinti; C il punto comune a due generatrici di σ passanti per G_1 e G_2 e analogamente C' il punto d'intersezione di due generatrici di σ' passanti per G_1 e G_2 ; A_1 un punto di Γ non appartenente a Γ' e S' l'ulteriore intersezione di $C'A_1$ con σ' ; e analogamente per A'_1 e S ; A_2 e A_3 le due intersezioni con α delle generatrici di σ uscenti da S e analogamente per A'_2 e A'_3 .

⁽²⁾ Per lo sviluppo delle costruzioni e le dimostrazioni si veda: M. PEZZANA, *Una costruzione delle trasformazioni puntuali piane in un loro insieme di regolarità e sue applicazioni*, Atti dell'Accademia Nazionale di Lettere, Scienze e Arti di Modena (1966).

⁽³⁾ Si tratta, come è evidente, della ben nota costruzione dell'omografia per proiezioni e sezioni; il numero delle operazioni di proiezione e sezione è sovrabbondante.

A_1, A_2, A_3 e A'_1, A'_2, A'_3 saranno allora i punti fondamentali della trasformazione quadratica rispettivamente sui piani π e π' .

Una coppia di punti corrispondenti P e P' si otterrà proiettando P da S poi da C su α l'intersezione (diversa da S) di PS con σ e sia $\bar{P}$; $\bar{P}$ da C' e da S' su π' l'intersezione (diversa da C') di $\bar{P}C'$ con σ' e si otterrà P' (*).

4. - Passando ora al caso più generale delle trasformazioni cremoniane, è noto che esse si possono sempre ottenere come prodotto di trasformazioni quadratiche.

Perciò una successione di costruzioni proiettive, quali quella esposta, può fornire la costruzione di una trasformazione cremoniana qualsiasi.

Ci limiteremo qui a trattare di quelle trasformazioni cremoniane che si possono ottenere con una sola delle costruzioni sopra accennate, con opportuna scelta delle superficie σ e σ' .

È anzitutto immediato che, per la biunivocità delle trasformazioni cremoniane, sarà necessario che i centri di proiezione S, C e S', C' siano punti di molteplicità $n-1$ rispettivamente di σ e σ' , supposte algebriche e dello stesso ordine n . Ne consegue che σ contiene SC con molteplicità almeno $n-2$; e analogamente per σ' .

Consideriamo due particolari tipi di superficie σ e σ' e chiamiamo θ_1 e θ_2 i tipi di trasformazioni cremoniane che ne risultano.

Per le θ_1 le σ e σ' sono di tipo monoidale. Per la loro costruzione consideriamo sul piano α una curva algebrica razionale di ordine n con un punto di molteplicità $n-1$.

Proiettiamo tale curva da un punto esterno al piano. Otterremo un cono con una generatrice di molteplicità $n-1$. Sommiamo al primo membro dell'equazione di questo cono il primo membro di una equazione che rappresenti $n-1$ piani di un fascio con asse la retta multipla del cono. Le equazioni delle superficie σ e σ' avranno questa forma. S, C e S', C' andranno scelti sulla retta multipla, del resto ad arbitrio.

Risulta immediata per θ_1 la natura di trasformazione algebrica biunovica. È pure immediato che θ_1 e θ_1^{-1} sono dello stesso ordine.

(*) La costruzione esposta non è altro che il prodotto di due proiezioni stereografiche bipolari di quadriche, con la prima delle quali si passa dal piano π al piano α , con la seconda dal piano α al piano π' , con la sola avvertenza che sul piano α due punti fondamentali della prima proiezione devono coincidere con due della seconda. Si veda ad esempio: E. BERTINI. *Complementi di Geometria Proiettiva*, Zanichelli, Bologna, p. 188 (1927).

Per le θ_2 le superficie σ e σ' ad esse relative si possono costruire a partire dagli stessi coni e sostituendo, alle superficie costituite dagli $n-1$ piani, superficie composte di n piani, di cui $n-2$ di un fascio con asse nelle rette multiple dei coni, uno passante per il vertice del cono senza appartenere al fascio e l'ultimo generico.

Bisognerà però ora scegliere S , C e S' , C' nelle uniche coppie di punti di σ e σ' che risulteranno di molteplicità $n-1$, e che saranno i vertici dei coni e i punti in cui l'ultimo piano incontra l'asse dei primi $n-2$.

5. - In tutto il discorso precedente abbiamo supposto che tutti gli enti considerati appartengano ad uno stesso spazio tridimensionale proiettivo.

Se ora pensiamo che gli enti non accentati appartengano ad uno spazio Σ e quelli accentati appartengano ad uno spazio Σ' e chiamiamo α e α' i sostegni di π e π' , riferendo omograficamente α e α' , nulla cambia in quanto sopra detto, e si toglie così la restrizione, che perciò appare non essenziale, che i piani π e π' siano sovrapposti.

6. - Possiamo stabilire la seguente proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due trasformazioni puntuali abbiano tra loro un contatto analitico di ordine n in una coppia regolare di punti corrispondenti è che le superficie generatrici, relative ad una stessa quaterna di centri di proiezione per le due trasformazioni, abbiano tra loro un contatto di ordine n nei punti proiezione.

La proposizione enunciata permette di costruire trasformazioni con contatto analitico voluto.

Le omografie tangenti⁽⁵⁾ si ottengono ovviamente costruendo i piani tangenti a σ e σ' in punti corrispondenti.

Le trasformazioni quadratiche osculatrici⁽⁶⁾ si ottengono analogamente con due quadriche che oscolino le σ e σ' e passino rispettivamente per S e C e per S' e C' e contemporaneamente soddisfino alle condizioni sopra esposte per le trasformazioni quadratiche.

Per le trasformazioni cremoniane con contatto analitico di ordine

(5) M. VILLA, *Lezioni di Geometria*, Vol. II, Cedam, Padova, p. 312 (1963).

(6) Op. cit. nella (5), p. 314.

n con una trasformazione assegnata ⁽⁷⁾ si potranno usare i monoidi che pauno le θ_1 e imporre il contatto voluto alle superficie generatrici.

8. - Con la costruzione esposta si possono ottenere alcuni risultati anche per quanto riguarda il contatto geometrico.

Mi limito qui al caso del contatto geometrico del primo ordine. Si vede facilmente che due trasformazioni T e $\bar{T}$ hanno in una coppia regolare A, A' un contatto geometrico del primo ordine se si può dare una costruzione delle T e $\bar{T}$ in modo che, indicando con le solite notazioni gli elementi relativi a T e soprassegnando gli analoghi relativi a $\bar{T}$, si abbiano le seguenti relazioni:

C e C' coincidono con $\bar{C}$ e $\bar{C}'$ rispettivamente;

$\bar{S}$ sta sulla SA e $\bar{S}'$ sta sulla $S'A'$;

le superficie σ e $\bar{\sigma}$ sono tangenti nel punto in cui sono intersecate dalla SA e analogamente σ' e $\bar{\sigma}'$ nel punto in cui sono intersecate dalla $S'A'$.

È chiaro che il contatto analitico diventa un caso particolare del contatto geometrico e si ha quando $\bar{S}$ coincide con S e $\bar{S}'$ con S' .

*Pervenuto alla Segreteria dell' U.M.I.
il 5 gennaio 1966*

⁽⁷⁾ M. VILLA, *Ricerche locali sulle trasformazioni cremoniane*, Memorie I e II, Accademia delle Scienze di Bologna, Ser. X, Vol. I, pag. 189 (1944). Vol. II, pag. 117 (1945). - M. VILLA, *Transformations ponctuelles et transformations crémoniennes*, Deuxième Colloque de Géométrie algébrique du CBRM, Ed. G. Thone, Liège, pp. 41-68 (1952).