Bollettino
Unione Matematica Italiana

Mario Pezzana

Un tipo di corrispondenze fra spazi che ammettono in ogni coppia soltanto tre direzioni caratteristiche distinte complanari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.4, p. 471–480.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_4_471_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

Un tipo di corrispondenze fra spazi che ammettono in ogni coppia soltanto tre direzioni caratteristiche distinte complanari

MARIO PEZZANA (Bologna) (*)

Sunto. - *Si studia, in un insieme di regolarità, un tipo di corrispondenze che ammettono in ogni coppia soltanto tre direzioni caratteristiche distinte complanari. Se ne danno alcune proprietà generali. Infine si danno le equazioni di alcune di esse.*

1. - In questa Nota studio le trasformazioni fra spazi proiettivi ordinari che ammettono in ogni coppia di punti corrispondenti tre sole direzioni caratteristiche distinte, tra loro complanari,

Dal punto di vista locale G. MARTINI (1) ha dimostrato che sono possibili solo tre casi:

1) due direzioni triple e una semplice;

2) una quadrupla, una doppia, una semplice;

3) una quintupla e due semplici.

Ho studiato il primo di questi casi che si presenta per i calcoli come il più semplice dei tre ed ho dimostrato che:
Le trasformazioni che ammettono in tutti i punti di una regione finita tre direzioni caratteristiche complanari, di cui una semplice e due triple, sono tutte dotate di due proprietà:

a) la congruenza di curve caratteristiche semplici si riduce ad una stella di rette;

b) ammettono tutte un sistema di superficie caratteristiche che può essere di tre tipi:

1) *un fascio di piani;*

2) *inviluppo di piani aderente ad un cono con il vertice nel centro della stella caratteristica;*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 26 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

(1) G. MARTINI: *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi ordinari in una coppia regolare in cui esistono soltanto tre direzioni caratteristiche distinte e complanari*, Rend. dell'Accademia delle Scienze di Bologna, Ser. XII, Vol. II (1965). Ricordo pure il lavoro: M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*, Nota I, Atti Accad. Naz. Lincei, (8) 4, pp. 55-61 (1948).

3) ∞^1 *coni con il vertice comune nel centro della stella caratteristica.*

Inoltre darò le equazioni della più generale trasformazione di questo tipo, in cui il sistema di superficie caratteristiche si riduce ad un fascio di piani e di una classe di quelle in cui le superficie caratteristiche sono piani che non formano fascio.

2. - Con notazioni già usate da diversi Autori ([2]) si ha

$$
\begin{aligned}
dA &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 \\
dA_i &= \omega_{i0}A + \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2 + \omega_{i3}A_3 \\
dB &= \tau_{00}B + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3 \\
dB_i &= \tau_{i0}B + \tau_{i1}B_1 + \tau_{i2}B_2 + \tau_{i3}B_3
\end{aligned} \tag{1}
$$

dove A e B sono una coppia di punti corrispondenti e A_i e B_i si corrispondono in una omografia tangente.

E inoltre, nel nostro caso, ([3])

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \omega_1\omega_2 + a\omega_1\omega_3 + b\omega_3^2 \\
\Omega_2 &= \omega_1\omega_2 + a\omega_2\omega_3 + c\omega_3^2 \\
\Omega_3 &= a\omega_3^2.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Le (2) ci dicono che $\omega_1 = \omega_2$, $\omega_3 = 0$ rappresenta la direzione caratteristica semplice; $\omega_1 = 0$, $\omega_3 = 0$ e $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ le due direzioni caratteristiche triple.

([2]) Ad es.: E. Čech: *Géometrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces.* I. II. III., « Čas. Pro Pěst. Mat. a Fys.» 74, pp. 32-48; 75, pp. 123-158 (1950).

([3]) Si veda: G. Martini, op. cit. nella ([1]), n. 5.

Dalle (2) con procedimento di derivazione

$$
\begin{aligned}
&\tau_{11} - \omega_{11} - \tau_{00} + \omega_{00} = \frac{1}{2}\,\omega_2 + \frac{1}{2}\,a\omega_3 \\
&\tau_{12} - \omega_{12} = \frac{1}{2}\,\omega_2 \\
&\tau_{13} - \omega_{13} = 0 \\
&\tau_{21} - \omega_{21} = \frac{1}{2}\,\omega_1 \\
&\tau_{22} - \omega_{22} - \tau_{00} + \omega_{00} = \frac{1}{2}\,\omega_1 + \frac{1}{2}\,a\omega_3 \\
&\tau_{23} - \omega_{23} = 0 \\
&\tau_{31} - \omega_{31} = \frac{1}{2}\,a\omega_1 + b\omega_3 \\
&\tau_{32} - \omega_{32} = \frac{1}{2}\,a\omega_2 + c\omega_3 \\
&\tau_{33} - \omega_{33} - \tau_{00} + \omega_{00} = a\omega_3
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Supposto, come è sempre lecito

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0$$

si ha ancora

$$\tau_{00} - \omega_{00} = -\frac{1}{8}\,(\omega_1 + \omega_2 + 4a\omega_3). \tag{4}$$

La differenziazione esterna del sistema (3), (4) ci mostra che il riferimento intrinseco non è completamente individuato e ci dice che possiamo porre $a = 0$. Dell'indeterminazione residua approfitteremo ancora in seguito.

Intanto il sistema diventa

$$
\begin{aligned}
&\tau_{10} - \omega_{10} = -\gamma_1\omega_2 \\
&\omega_{11} - \omega_{00} = (2\beta_2 + \beta_1)\omega_1 + \left(2\beta_4 + \beta_2 - \frac{1}{4}\right)\omega_2 + (2\beta_5 + \beta_3 + 2\gamma_1)\omega_3 \\
&\omega_{12} = \beta_1\omega_1 + \left(\beta_2 - \frac{1}{4}\right)\omega_2 + \beta_3\omega_3 \\
&\omega_{13} = \frac{1}{(b-c)}\left[-\gamma_1\omega_1 + \gamma_1\omega_2 + \left(\frac{2}{3}\zeta_3 + \frac{1}{3}\lambda_6 - \frac{2}{3}\beta_6 - \frac{1}{3}c\right)\omega_3\right] \\
&\tau_{20} - \omega_{20} = \gamma_1\omega_3
\end{aligned}
$$

$$\omega_{21}=\left(\beta_4-\frac{1}{4}\right)\omega_1+\delta_4\omega_2+\delta_5\omega_3$$

$$\omega_{22}-\omega_{00}=\left(2\beta_2+\beta_4-\frac{1}{4}\right)\omega_1+(2\beta_4+\delta_4)\omega_2+(2\beta_5+\delta_5+2\gamma_1)\omega_3$$

(5) $$\omega_{23}=-\frac{1}{b-c}\left[-\gamma_1\omega_1+\gamma_1\omega_2+\left(\frac{2}{3}\zeta_3-\frac{1}{3}\lambda_6-\frac{2}{3}\beta_6-\frac{1}{3}c\right)\omega_3\right]$$

$$\tau_{30}-\omega_{30}=-\gamma_1\omega_1+\gamma_1\omega_2+\left(\frac{1}{3}\zeta_3+\frac{1}{3}\lambda_6-\frac{1}{3}\beta_6-\frac{1}{6}c\right)\omega_3$$

$$\omega_{31}=\frac{2b}{b-c}\left[\left(\frac{(b-c)(\beta_5+2\gamma_1)}{b}-\gamma_1\right)\omega_1+\left(\frac{\delta_5(b-c)}{b}+\gamma_1\right)\omega_2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\delta_6(b-c)}{b}+\frac{2}{3}\zeta_3-\frac{1}{3}\lambda_6-\frac{2}{3}\beta_6-\frac{1}{3}c\right)\omega_3\right]$$

$$\omega_{32}=\frac{2c}{b-c}\left[\left(\frac{(b-c)\beta_3}{c}+\gamma_1\right)\omega_1+\left(\frac{\beta_5(b-c)}{c}-\gamma_1\right)\omega_2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\beta_6(b-c)}{c}-\frac{2}{3}\zeta_3+\frac{1}{3}\lambda_6+\frac{2}{3}\beta_6+\frac{1}{3}c\right)\omega_3\right]$$

$$2b(\omega_{22}-\omega_{00})-db=\left(\zeta_3+2b\beta_2+b\beta_1+c\beta_4-\frac{1}{4}c\right)\omega_1+$$
$$+\left(\delta_6+2b\beta_4+b\beta_2+c\delta_4+\frac{1}{4}b\right)\omega_2+(\zeta_6+2b\beta_5+b\beta_3+2b\gamma_1+c\delta_5)\omega_3$$

$$2c(\omega_{33}-\omega_{00})-dc=\left(\beta_6+2c\beta_2+c\beta_4+b\beta_1+\frac{1}{4}c\right)\omega_1+\left(\zeta_3-\beta_6+\delta_6+\right.$$
$$\left.+2c\beta_4+c\delta_4+b\beta_2+\frac{1}{4}b-\frac{1}{2}c\right)\omega_2+(\theta_6+2c\beta_5+c\delta_5+2c\gamma_1+b\beta_3)\omega_3$$

da cui si ottiene

(6) $$\omega_{23}+\omega_{13}=0$$

(7) $$\tau_{20}-\omega_{20}+\tau_{10}-\omega_{10}=0$$

(8) $$\omega_{22}+\omega_{12}=\omega_{11}+\omega_{21}.$$

Differenziando la (7) e la (8) e confrontando i risultati si ha

(9) $$\omega_{20}+\omega_{10}=0.$$

Tenendo conto delle (3) e (5) si ha pure

$$(6') \qquad \tau_{13} + \tau_{23} = 0$$

$$(7') \qquad \tau_{11} + \tau_{21} - \tau_{22} - \tau_{12} = 0$$

$$(8') \qquad \tau_{10} + \tau_{20} = 0.$$

Dalle (1) si ha

$$(10) \qquad d(A_1+A_2)=(\omega_{10}+\omega_{20})A+(\omega_{11}+\omega_{21})A_1+(\omega_{12}+\omega_{22})A_2+(\omega_{13}+\omega_{23})A_3$$

che per le (6), (7), (8) diviene

$$(11) \qquad d(A_1 + A_2) = (\omega_{11} + \omega_{21})(A_1 + A_2).$$

Sempre dalle (1) si ha per le (6'), (7'), (8')

$$(11') \qquad d(B_1 + B_2) = (\tau_{11} + \tau_{21})(B_1 + B_2).$$

Le (11) e (11') ci dicono che in ciascuno dei due spazi di A e di B, la direzione caratteristica semplice passa per un punto fisso al variare della coppia di punti corrispondenti.

Ciò intanto permette di trarre una prima conclusione:

Per ogni trasformazione di questo tipo la congruenza delle curve caratteristiche semplici si riduce ad una stella di rette.

3. – Inoltre, poichè in ogni coppia di punti corrispondenti ci sono tre direzioni caratteristiche complanari, ogni coppia di punti corrispondenti individua una coppia di giaciture caratteristiche. Con le notazioni usate la coppia è quella individuata da $\omega_3 = 0$.

Poichè per le (5) si ha

$$(12) \qquad [d\omega_3] \wedge \omega_3 = 0.$$

Per il teorema di FROBENIUS *le giaciture caratteristiche inviluppano superficie.*

Si conclude allora:

Esiste per questo tipo di trasformazioni un sistema ∞^1 di superficie caratteristiche.

4. – L'equazione delle asintotiche delle superficie caratteristiche è

$$(13) \qquad \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = 0$$

che per le (5) diviene

$$\gamma_1(\omega_1 - \omega_2)^2 = 0. \tag{14}$$

Le superficie caratteristiche sono perciò rigate sviluppabili le cui generatrici sono le rette caratteristiche semplici appartenenti, come si è detto, ad una stella.

Perciò le superficie caratteristiche sono sempre coni con il vertice in comune.

5. - Per differenziazione esterna della prima delle (5) si vede che γ_1 è un invariante relativo. Possiamo perciò porre $\gamma_1 = 0$ oppure $\gamma_1 = 1$. Per $\gamma_1 = 0$ l'equazione (14) delle asintotiche diviene identica, *perciò i coni caratteristici si riducono a piani per un punto.*

Per $\gamma_1 = 0$ si può porre, ancora per le (5), $\omega_{13} = k\omega_3$, $\omega_{23} = -k\omega_3$ e differenziandole esternamente si vede che si può porre $k = 0$; perciò

$$\omega_{13} = \omega_{23} = 0. \tag{15}$$

Differenziando le (15) si ottiene

$$\omega_{10} = \rho\omega_3; \ \omega_{20} = -\rho\omega_3. \tag{16}$$

Differenziando le (16) si vede che anche ρ è un invariante relativo; si può perciò porre $\rho = 0$ oppure $\rho = 1$.

Per $\rho = 0$ si ha

$$dA_1 = \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2$$

$$dA_2 = \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2$$

e

$$dB_1 = \tau_{11}B_1 + \tau_{12}B_2$$

$$dB_2 = \tau_{21}B_1 + \tau_{22}B_2.$$

Perciò le rette A_1A_2 e B_1B_2 restano fisse al variare della coppia A, B.

I piani caratteristici formano fascio.

Se $\rho = 1$ si ha

$$dA_1 = \omega_3 A + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2$$

$$dA_2 = -\omega_3 A + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2$$

e analoghe per lo spazio di B.

In definitiva si conclude col risultato esposto nel n. 1.

6. – Come è evidente dalla mancanza quasi completa di simmetria e di possibilità di scrivere sinteticamente le (5), la risoluzione del sistema differenziale non mi pare affrontabile.

Ho cercato di caratterizzare analiticamente almeno quel tipo di trasformazioni in cui il sistema di superficie caratteristiche è un fascio di piani.

Le equazioni più generali di una trasformazione di questo tipo tra due spazi S e S', a meno di omografie, si possono scrivere, scegliendo opportunamente il sistema di riferimento proiettivo:

$$x' = f(x, y, z)$$

$$y' = \varphi(y, z)$$

$$z' = \psi(z).$$

Fissato un punto $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ dello spazio S e scritte le equazioni di una retta per esso

$$x = \bar{x} + lt$$

$$y = \bar{y} + mt$$

$$z = \bar{z} + nt,$$

essa sarà caratteristica se

$$\left\| \begin{matrix} lf_x + mf_y + nf_z & \varphi_y m + \varphi_z n & \psi_z n \\ l^2 f_{xx} + 2lmf_{xy} + m^2 f_{yy} + & \varphi_{yy} m^2 + 2\varphi_{yz} mn + \varphi_{zz} n^2 & \psi_{zz} n^2 \\ + 2lnf_{xz} + 2mnf_{yz} + n^2 f_{zz} & & \end{matrix} \right\| = 0$$

dove le derivate s'intendono calcolate nel punto $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

I minori estratti dalla matrice e uguagliati a zero rappresentano tre cubiche di un piano le cui coordinate proiettive omogenee sono l, m, n.

La prima delle tre cubiche del sistema si spezza ed è:

$$n[m^2 \psi_z \varphi_{yy} + mn(2\psi_z \varphi_{yz} - \varphi_y \psi_{zz}) + n^2(\psi_z \varphi_{zz} - \varphi_z \psi_{zz})] = 0. \tag{17}$$

La (17) deve ridursi a $n^3 = 0$ perchè si spezza in tre rette per l'origine e le altre cubiche non possono avere la $n = 0$ per tangente nei punti rappresentativi delle direzioni caratteristiche.

Perciò $\varphi_{yy} = 0$, non potendo essere $\psi_z = 0$.

Si ha

$$\varphi = yh(z) + q(z).$$

Inoltre

$$2\psi_z\varphi_{yz} - \varphi_y\psi_{zz} = 0,$$

cioè

$$\psi_z = ch^2(z)$$

da cui

$$\psi = c\int h^2(z)dz.$$

La trasformazione diviene allora del tipo

$$(18) \qquad \begin{cases} x' = f(x,\ y,\ z) \\ y' = yh(z) + q(z) \\ z' = h^2(z)dz. \end{cases}$$

È subito visto che le (18) rappresentano la più generale trasformazione del tipo voluto con cui il sistema di superficie caratteristiche è un fascio di piani, e che ogni trasformazione del tipo (18), che non abbia coni di direzioni caratteristiche, è del tipo voluto.

Ciò si deduce dalle seguenti considerazioni:

1) tutte le direzioni caratteristiche devono stare sui piani del fascio per la forma della (17);

2) su di una coppia di piani corrispondenti non ci possono essere più di tre direzioni caratteristiche;

3) una direzione caratteristica deve sempre essere semplice, per i risultati citati della Martini;

4) tale direzione caratteristica nel nostro caso dà sempre una congruenza di rette che formano stella;

5) ogni direzione non può essere contata più di tre volte per la (17).

7. - Nel caso che i piani non formino fascio, ma inviluppino un cono, si può supporre che il centro della stella sia il punto improprio dell'asse z e che i piani caratteristici siano dati da

$$y = \lambda x + f(\lambda). \tag{19}$$

Il cono sarà l'inviluppo di tali piani.

La trasformazione sarà del tipo

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(\lambda)F(x,\ y,\ \lambda) + H(\lambda) \\ y' &= \psi(\lambda)F(x,\ y,\ \lambda) + G(\lambda) \\ z' &= L(x,\ y,\ z). \end{aligned} \tag{20}$$

Per la biunivocità di questa trasformazione occorrerà limitare opportunamente il dominio sul piano x, y e ciò supporremo implicitamente nel seguito. Tali trasformazioni risultano perciò definite in un conveniente dominio, che nei due spazi risulterà un cilindro.

Con le notazioni del numero precedente, una delle cubiche indicatrici delle direzioni caratteristiche sarà data, tenendo conto anche della (19) da

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 0 \tag{21}$$

dove

$$A = \varphi'(m - l\lambda)F + \varphi[(F_x l - F_y m)(x + f') + F_\lambda(m - l\lambda)] + H'(m - l\lambda)$$

$$B = \psi'(m - l\lambda)F + \psi[(F_x l - F_y m)(x + f') + F_\lambda(m - l\lambda)] + G'(m - l\lambda)$$

$$\begin{aligned} C = {} & (m-l\lambda)^2(x+f')(\varphi''F + 2\varphi'F_\lambda + F_{\lambda\lambda}+H'') - f''(m - l\lambda)(\varphi'+F_\lambda-H')+ \\ & + 2(x + f')^2(m - l\lambda)[\varphi'(F_x l + F_y m) + \varphi(F_{\lambda x}l + F_{\lambda y}m)] + \\ & + 2(x+f')(m - l\lambda)l(\varphi+F_\lambda - H')+\varphi(x+f')^3(F_{xx}l+2F_{xy}lm+F_{yy}m^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = {} & (m - l\lambda)^2(x+f')(\psi''F+ 2\psi'F_\lambda+F_{\lambda\lambda}+G'') - f''(m - l\lambda)(\psi'+F_\lambda - G')+ \\ & + 2(x + f')^2(m - l\lambda)[\psi'(F_x l + F_y m) + \psi(F_{\lambda x}l + F_{\lambda y}m)] + \\ & + 2(x+f')(m - l\lambda)l(\psi'+F_\lambda - G')+\psi(x+f')^3(F_{xx}l+2F_{xy}lm+F_{yy}m^2). \end{aligned}$$

È subito visto che se

$$
\begin{aligned}
&F_x l + m F_y = 0 \\
&F_{\lambda x} l + F_{\lambda y} m = 0 \\
(22) \qquad &F_{xx} l^2 + 2F_{xy} lm + F_{yy} m^2 = 0 \\
&H' = F_\lambda + \varphi' \\
&G' = F_\lambda + \psi',
\end{aligned}
$$

la (21) si riduce alla retta $m - l\lambda = 0$ contata tre volte.

Le prime tre delle (22) danno

$$F = kx - y + h(\lambda).$$

Perciò le altre due danno

$$H(\lambda) = h(\lambda) + \varphi(\lambda)$$

$$G(\lambda) = h(\lambda) + \psi(\lambda)$$

con k costante e $h(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ funzioni arbitrarie.

Con lo stesso ragionamento del numero precedente si vede allora che le trasformazioni

$$
\begin{cases}
x' = \varphi(\lambda)[kx - y + h(\lambda)] + h(\lambda) + \varphi(\lambda) \\
y' = \psi(\lambda)[kx - y + h(\lambda)] + h(\lambda) + \psi(\lambda) \\
z' = L(x, y, z)
\end{cases}
$$

sono del tipo voluto, anche se questa volta non sono le più generali.

Il caso delle superficie caratteristiche non piane porta ad un sistema differenziale la cui integrazione presenta gravi difficoltà anche per trovare soluzioni particolari.

Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I.
il 5 gennaio 1966.