
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIULIO MATTEI

Sulla formulazione intrinseca delle equazioni della magnetofluidodinamica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 20
(1965), n.4, p. 458–470.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_4_458_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla formulazione intrinseca delle equazioni della magnetofluidodinamica (*)

Nota di GIULIO MATTEI (a Pisa) (**)

Sunto. - *Si effettua, nel caso stazionario spaziale, la formulazione intrinseca delle equazioni della Magnetofluidodinamica sulle linee di corrente e sulle linee di forza magnetiche.*

Si applicano poi le equazioni ottenute ad alcuni particolari moti m.f.d. Infine si esamina il caso del fluido viscoso in moto stazionario spaziale.

Summary. - *In this paper the intrinsic formulation of the equations of Magneto-Fluid Dynamics on the streamlines and on the magnetic lines of force is given for three-dimensional steady flows.*

This formulation is then applied to some particular m.f.d. steady flows. Finally viscous three-dimensional steady flow is examined.

Introduzione.

In una breve nota del 1961 R. P. KANWAL [1] ha scritto in forma intrinseca relativa alle linee di corrente ed alle linee di forza magnetiche le equazioni fondamentali magnetofluidodinamiche (m.f.d.) di un fluido non viscoso e non conduttore del calore in moto stazionario spaziale, trascurando l'azione delle forze esterne di origine non elettromagnetica e della corrente di spostamento e ritenendo infinita la conducibilità elettrica. Successivamente nel caso di moto piano e $\mathbf{B}$ (vettore induzione magnetica) giacente nel piano del moto P. KUMAR [2] ha esaminato il comportamento sulle linee di corrente e ortogonalmente ad esse del suddetto fluido e N. A. WARSI [3] ne ha discusso il comportamento relativo alle linee di forza magnetiche. E. GRANDORI GUAGENTI [4] poi ha usato per lo stesso fluido le equazioni intrinseche relative alle linee di corrente ed ha fra l'altro esaminato il caso in cui in ogni punto $\mathbf{B}$ è parallelo a $\mathbf{v}$, soffermandosi inoltre ancora sul caso piano.

(*) Lavoro effettuato nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 7 per la Matematica del C. N. R.

(**) Istituto di Matematiche Applicate Fac. Ingegneria Università, Pisa.

Riprendendo qui la questione si usa un modo di procedere diverso da quelli in [1], [2], [3], [4] nella formulazione intrinseca delle equazioni m.f.d. relativa alle linee di corrente ed alle linee di forza magnetiche nel caso spaziale.

Si applicano poi, deducendone vari risultati, le equazioni ottenute ai seguenti casi:

a) il moto, simmetrico rispetto ad un asse, avviene nei piani meridiani passanti per l'asse e $\mathbf{B}$ giace su tali piani;

b) il moto avviene come nel caso a), ma con un $\mathbf{B}$ tutto trasversale.

In entrambi i casi si escludono dalle nostre considerazioni i punti dell'asse.

Si fanno inoltre alcune osservazioni sul caso in cui $\mathbf{B}$ abbia direzione costante.

Da ultimo si effettua, nel caso spaziale, la decomposizione intrinseca, relativa alle linee di corrente, del vettore $\text{rot rot } \mathbf{v}$, necessaria qualora si debba prendere in esame anche l'effetto della viscosità.

1. - Equazioni fondamentali.

Per il fluido in questione⁽¹⁾ le equazioni fondamentali sono:

$$(1.1) \quad \rho \left(\frac{1}{2} \text{grad } v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} \right) = - \text{grad } p + \frac{1}{4\pi\mu} \text{rot } \mathbf{B} \wedge \mathbf{B},$$

$$(1.2) \quad \text{rot } (\mathbf{B} \wedge \mathbf{v}) = 0, \quad (1.3) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$(1.4) \quad \text{div } (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.5) \quad f(\varepsilon, \eta, \rho) = 0,$$

$$(1.6) \quad \frac{d\eta}{ds} = 0.$$

In esse ε è l'energia specifica interna, η l'entropia specifica, s la coordinata curvilinea sulle linee di corrente e gli altri simboli hanno il significato abituale.

⁽¹⁾ Per quanto concerne le equazioni intrinseche ed il loro uso nella Meccanica dei fluidi ordinari uno studio organico ed approfondito trovasi in C. TRUESDELL [5] (cfr. anche la Bibliografia ivi indicata) e in J. SERRIN [6] Sect. 20, 41, 70.

La (1.6) è la forma che, in assenza di fenomeni dissipativi, assume l'equazione dell'energia (cfr. [5] Eq. (25)₁).

Avendosi per un fluido di cui (1.5) sia l'equazione di stato:

$$(1.7) \quad \text{grad} \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) = T \text{ grad } \eta + \frac{1}{\rho} \text{ grad } p,$$

con T temperatura assoluta, alla (1.1) si può dare la forma:

$$(1.1') \quad \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = T \text{ grad } \eta - \text{grad } H + \frac{1}{4\pi\mu\rho} \text{rot } \mathbf{B} \wedge \mathbf{B},$$

dove $H = \varepsilon + p/\rho + \mathbf{v}^2/2$ è l'entalpia totale; la (1.1') può riguardarsi come l'espressione del teorema di CROCCO-VAZSONYI in m.f.d.

A. - Descrizione intrinseca sulle linee di corrente.

2. - Caso spaziale.

Siano c e τ la curvatura e la torsione delle linee di corrente, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ il triedro intrinseco sinistrorso ad esse relativo e $\frac{d}{ds}$, $\frac{d}{dn}$, $\frac{d}{db}$ le corrispondenti derivate direzionali.

La (1.1) proiettata su $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ dà:

$$(2.1) \quad \rho v \frac{dv}{ds} = - \frac{dp}{ds} + \frac{1}{4\pi\mu} \text{rot } \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \times \mathbf{t},$$

$$(2.2) \quad \rho v^2 c = - \frac{dp}{dn} + \frac{1}{4\pi\mu} \text{rot } \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \times \mathbf{n},$$

$$(2.3) \quad 0 = - \frac{dp}{db} + \frac{1}{4\pi\mu} \text{rot } \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \times \mathbf{b}.$$

Per la (1.2), prendendo spunto dal modo con cui in [6] Sect. 20 si ottiene la decomposizione intrinseca del vortice ⁽²⁾, si ha:

⁽²⁾ Tale decomposizione è stata data per primo da A. MASOTTI [7] p. 869.

$$\operatorname{rot} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{t}_P & \mathbf{n}_P & \mathbf{b}_P \\ \frac{d}{ds} & \frac{d}{dn} & \frac{d}{db} \\ v(B_b \mathbf{n} - B_n \mathbf{b}) \times \mathbf{t}_P & v(B_b \mathbf{n} - B_n \mathbf{b}) \times \mathbf{n}_P & v(B_b \mathbf{n} - B_n \mathbf{b}) \times \mathbf{b}_P \end{vmatrix} = 0,$$

dove P è il punto in cui si desidera calcolare $\operatorname{rot} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{v})$ e s , n , b si comportano come coordinate rettangolari fisse con origine in P .

Effettuando le derivate, valutando il tutto in P e tenendo conto delle formule di FRENET-SERRET si ottiene proiettando successivamente su $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$:

$$(2.4) \quad vB_b \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{n}}{dn} + vB_n \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{b}}{db} - \frac{d(vB_n)}{ds} - \frac{d(vB_b)}{db} = 0,$$

$$(2.5) \quad v\mathbf{t} \times \left(B_b \frac{d\mathbf{n}}{db} - B_n \frac{d\mathbf{b}}{db} \right) + \frac{d(vB_n)}{ds} + v\tau B_b = 0,$$

$$(2.6) \quad v\mathbf{t} \times \left(B_n \frac{d\mathbf{b}}{dn} - B_b \frac{d\mathbf{n}}{dn} \right) + \frac{d(vB_b)}{ds} - v\tau B_n = 0.$$

La (1.3) assume la forma:

$$(2.7) \quad B_t \operatorname{div} \mathbf{t} + B_n \operatorname{div} \mathbf{n} + B_b \operatorname{div} \mathbf{b} + \frac{dB_t}{ds} + \frac{dB_n}{dn} + \frac{dB_b}{db} = 0,$$

e la (1.4):

$$(2.8) \quad \frac{d(\rho v)}{ds} + \rho v \operatorname{div} \mathbf{t} = 0.$$

Il sistema (2.1) - (2.8) dà la cercata espressione intrinseca del sistema (1.1) - (1.4).

3. - Caso a).

Siano x , r , z ($r \neq 0$) coordinate cilindriche ortogonali e $\mathbf{i}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{N}$ la corrispondente terna sinistrorsa di versori. Con tali coordinate il caso è caratterizzato da:

$$\mathbf{v} = v_x(r, x)\mathbf{i} + v_r(r, x)\mathbf{u}, \quad \mathbf{B} = B_x(r, x)\mathbf{i} + B_r(r, x)\mathbf{u}.$$

Detto φ l'angolo che $\mathbf{v}$ forma con $\mathbf{i}$, introdotta la curvatura $K = \frac{d\varphi}{dn}$ delle traiettorie delle normali principali alle linee di corrente si ha:

$$\frac{dn}{ds} = -Kt, \quad \frac{dt}{ds} = cn \quad \left(c = \frac{d\varphi}{ds} \right).$$

Tenendo presente queste e usando il procedimento visto per la (1.2) si trova la seguente espressione intrinseca di $\text{rot } \mathbf{B}$ e quindi anche del vettore densità di corrente:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \left(B_t c + B_n K + \frac{dB_n}{ds} - \frac{dB_t}{dn} \right) \mathbf{b}.$$

Conseguentemente le (2.1) e (2.2) divengono:

$$(3.1) \quad \rho v \frac{dv}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \frac{B_n}{4\pi\mu} \left(B_t c + B_n K + \frac{dB_n}{ds} - \frac{dB_t}{dn} \right),$$

$$(3.2) \quad \rho v^2 c = -\frac{dp}{dn} + \frac{B_t}{4\pi\mu} \left(B_t c + B_n K + \frac{dB_n}{ds} - \frac{dB_t}{dn} \right).$$

Da (3.2) si deduce, in particolare, che le linee di corrente sono rettilinee in una regione se ivi la pressione è costante sulle traiettorie delle normali principali e $B_t = 0$.

La (2.3) indica il fatto ovvio che p nel caso in esame non varia lungo le linee coordinate $\mathfrak{z}$.

Per l'equazione del campo magnetico, tenendo presente che in questo caso è: $\frac{d\mathbf{b}}{db} = -\frac{1}{r}\mathbf{u}$, abbiamo che (2.6) è identicamente soddisfatta e da (2.4) e (2.5):

$$(3.3) \quad \frac{d(rvB_n)}{dn} = 0, \quad (3.4) \quad \frac{d(rvB_n)}{ds} = 0$$

e quindi si ha l'integrale:

$$(3.5) \quad rvB_n = \text{cost.}$$

È appena opportuno far rilevare che l'integrale (3.5) è una conseguenza del tutto generale della equazione del campo magnetico.

La (2.7) essendo ora:

$$\operatorname{div} \mathbf{t} = K + \frac{1}{r} \frac{dr}{ds}, \quad \operatorname{div} \mathbf{n} = -c + \frac{1}{r} \frac{dr}{dn},$$

diventa:

$$(3.6) \quad B_t K - B_n c + \frac{1}{r} \left[\frac{d(rB_t)}{ds} + \frac{d(rB_n)}{dn} \right] = 0;$$

e la (2.8):

$$(3.7) \quad \frac{d(rv\rho)}{ds} + Kr v\rho = 0.$$

Da (3.4) e (3.7) si ha facilmente la notevole espressione per la curvatura delle traiettorie delle normali principali alle linee di corrente:

$$(3.8) \quad K = \frac{d}{ds} [\log (B_n/\rho)].$$

Per esempio se B_n/ρ è costante sulle linee di corrente da (3.8) discende che le traiettorie delle normali principali sono rette e viceversa; etc.

Se è: $\mathbf{B} = B(r, x)\mathbf{n}$ in (3.2) scompare il termine magnetico e (3.1) diventa, introdotta la pressione totale $\bar{p} = p + B^2/8\pi\mu$,

$$(3.9) \quad \rho v \frac{dv}{ds} = -\frac{d\bar{p}}{ds} - \frac{B^2}{4\pi\mu} K$$

e quindi, per (3.8), qualora sia B/ρ costante sulle linee di corrente, (3.9) coincide con la corrispondente fluidodinamica con $\bar{p}$ al posto di p .

Da (1.7) per (1.6) si ha:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = \frac{d}{ds} (\varepsilon + p/\rho);$$

tenendo presente questa e la (3.8), da (3.9) si ricava l'integrale:

$$(3.10) \quad H + B^2/4\pi\mu\rho = E,$$

con E costante sulle linee di corrente, analogo a quello di BERNOULLI per il fluido ordinario.

Si osservi che l'integrale (3.10) non é subordinato ad una forma particolare dell'equazione di stato.

Se poi il fluido é barotropico é costante sulle linee di corrente il trinomio:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{B^2}{4\pi\mu\rho}.$$

Da (3.3) e (3.6) si ricava facilmente:

$$c = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dn}$$

che sostituita in (3.2) dà:

$$(3.11) \quad \rho v \frac{dv}{dn} = \frac{dp}{dn},$$

per cui se in una regione p é costante sulle traiettorie delle normali principali (che in questo caso coincidono con le linee di forza magnetiche) su di esse é pure costante v e viceversa e in quella regione le linee di corrente sono rettilinee.

La (3.11) per (1.7) diventa:

$$\frac{d}{dn} (v^2/2 - \varepsilon - p/\rho) + T \frac{d\eta}{dn} = 0,$$

e nel caso barotropico fornisce l'ulteriore integrale:

$$(3.12) \quad \frac{v^2}{2} - \int \frac{dp}{\rho} = E^*$$

con E^* costante sulle linee di forza magnetiche.

La formulazione intrinseca quindi nel caso in esame ha fornito, fra l'altro, i due integrali (3.10) e (3.12)

4. - Caso b).

Nel sistema di coordinate cilindriche usato in a) questo caso é caratterizzato da:

$$\mathbf{v} = v_x(r, x)\mathbf{i} + v_r(r, x)\mathbf{u}, \quad \mathbf{B} = B(r, x)\mathbf{N}.$$

Abbiamo col solito metodo per l'espressione intrinseca di $\text{rot } \mathbf{B}$:

$$\text{rot. } \mathbf{B} = \frac{1}{r} \left[\frac{d(rB)}{dn} \mathbf{t} - \frac{d(rB)}{ds} \mathbf{n} \right],$$

e per conseguenza le (2.1) e (2.2) diventano:

$$(4.1) \quad \rho v \frac{dv}{ds} = - \frac{dp}{ds} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{B}{r} \frac{d(rB)}{ds},$$

$$(4.2) \quad \rho v^2 c = - \frac{dp}{dn} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{B}{r} \frac{d(rB)}{dn}.$$

La (2.3), anche qui, indica l'indipendenza di p da s .

Le (2.4) e (2.5) sono identicamente soddisfatte e (2.6) fornisce:

$$(4.3) \quad K = - \frac{d \log (vB)}{ds},$$

per cui condizione necessaria e sufficiente affinché siano rettilinee le traiettorie delle normali principali alle linee di corrente è che vB sia costante su quest'ultime.

La (2.7) è ora identicamente soddisfatta e la (2.8) diventa (3.7).

Da (3.7) e (4.3) si ricava con facili calcoli l'integrale:

$$(4.4) \quad B/\rho r = G$$

con G costante sulle linee di corrente.

Da quest'ultima e da (4.1) si deduce che anche in questo caso come nel precedente sussiste l'integrale (3.10) cioè la somma dell'entalpia totale e di $B^2/4\pi\mu\rho$ è costante sulle linee di corrente.

In questo caso quindi la formulazione intrinseca fornisce, fra l'altro, due integrali sulle linee di corrente.

5. - Osservazioni sul caso in cui $\mathbf{B}$ abbia direzione costante.

Questo caso è stato esaminato da E. R. SURYANARAYAN [8].

Osserviamo qui che essendo per (1.3):

$$\frac{1}{4\pi\mu} \text{rot. } \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} = - \text{grad } B^2/8\pi\mu \quad (3)$$

(3) Se è conservativo il vettore $\frac{1}{4\pi\mu\rho} \text{rot } \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}$ sono applicabili i teoremi di HELMHOLTZ sui vortici secondo quanto stabilito da C. AGOSTINELLI in [9] p. 126.

le Eq. (3.8), (3.9), (3.10) di [8]:

$$-\rho v \frac{dv}{ds} = \frac{d\bar{p}}{ds}, \quad -\rho v^2 c = \frac{d\bar{p}}{dn}, \quad 0 = \frac{d\bar{p}}{db},$$

appaiono immediate da (1.1).

Con la semplice sostituzione di $\bar{p}$ a p si trasportano al caso m.f.d. in esame altri noti risultati fluidodinamici: per es. la Eq. (19) ottenuta da R. P. KANWAL in [10], che esprime la curvatura delle linee di corrente in termini del gradiente di pressione, dà subito la Eq. (3.16) di [8]; per l'analoga relativa alla torsione cfr. l'Eq. (21)₂ di [5].

Per quanto riguarda la funzione di BERNOULLI ([8] N. 4) osserviamo che se il fluido è incomprimibile l'accelerazione deriva dal potenziale $\bar{p}/\rho$ per cui le superfici di BERNOULLI esistono ed hanno equazione:

$$\bar{p}/\rho + v^2/2 = \text{cost}$$

e si trasportano in m.f.d. i risultati relativi ai moti che preservano la circolazione (cfr. per questi [5] n. 6).

Se il fluido è comprimibile si trasportano ancora in m.f.d. i teoremi di BERNOULLI e di CROCCO-VAZSONYI se è giustificabile una equazione di stato della forma:

$$\bar{p} = f(\rho, \eta). \quad (4)$$

B. - Descrizione intrinseca sulle linee di forza magnetiche.

6. - Caso spaziale.

Siano c' e τ' la curvatura e la torsione delle linee di forza magnetiche, t' , n' , b' , il triedro intrinseco sinistrorso ad esse relativo e $\frac{d}{ds'}$, $\frac{d}{dn'}$, $\frac{d}{db'}$ le corrispondenti derivate direzionali.

Tenendo presente la decomposizione intrinseca del vortice ([7] p. 869) abbiamo analogamente:

(4) Tale equazione di stato si presenta, come è stato messo in luce da H. GRAD in [11] al N. 4, se, oltre ad avere B direzione costante, il moto avviene nel piano normale a B .

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = B A_B \mathbf{t}' + \frac{dB}{db'} \mathbf{n}' + \left(c'B - \frac{dB}{dn'} \right) \mathbf{b}',$$

dove $A_B = \operatorname{rot} \mathbf{t}' \times \mathbf{t}'$ é l'anormalità delle linee di forza magnetiche, e conseguentemente:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} = \left(c'B^2 - \frac{dB^2/2}{dn'} \right) \mathbf{n}' - \frac{dB^2/2}{db'} \mathbf{b}'. \quad (5)$$

La (1.1) proiettata su $\mathbf{t}'$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{b}'$ dà perciò:

$$(6.1) \quad \rho \left(\frac{dv^2/2}{ds'} + \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{t}' \right) = - \frac{dp}{ds'},$$

$$(6.2) \quad \rho \left(\frac{dv^2/2}{dn'} + \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{n}' \right) = - \frac{d\bar{p}}{dn'} + \frac{c'}{4\pi\mu} B^2,$$

$$(6.3) \quad \rho \left(\frac{dv^2/2}{db'} + \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{b}' \right) = - \frac{d\bar{p}}{db'}.$$

Dette v_1, v_2, v_3 le componenti di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{t}'$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{b}'$, la (1.2) fornisce tre equazioni scalari che si deducono da (2.4), (2.5), (2.6) scambiando s' con s , n' con n , b' con b , τ' con τ , v_1 con B_n , v_3 con B_b e B con v .

La (1.3) diventa:

$$(6.4) \quad \frac{dB}{ds'} + B \operatorname{div} \mathbf{t}' = 0,$$

e la (1.4):

$$(6.5) \quad \frac{d(\rho v_1)}{ds'} + \frac{d(\rho v_2)}{dn'} + \frac{d(\rho v_3)}{db'} + \rho v_1 \operatorname{div} \mathbf{t}' + \rho v_2 \operatorname{div} \mathbf{n}' + \rho v_3 \operatorname{div} \mathbf{b}' = 0.$$

(5) A questa espressione si giunge anche tenendo conto che:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} = (\mathbf{B} \operatorname{grad}) \mathbf{B} - \operatorname{grad} B^2/2 \quad \text{e che}$$

$$(\mathbf{B} \operatorname{grad}) \mathbf{B} = B \frac{d\mathbf{B}}{ds'} = B \frac{dB}{ds'} \mathbf{t}' + B^2 c' \mathbf{n}';$$

essa trovasi ricavata in questo modo in S. LUNDQUIST [12] p. 305 (cfr. anche C. AGOSTINELLI [13] Eq. (1.24)).

7. - Caso a)

Abbiamo, detta K' la curvatura delle traiettorie delle normali principali alle linee di forza magnetiche,:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(v_1 c' + v_2 K' + \frac{dv_2}{ds'} - \frac{dv_1}{dn'} \right) \mathbf{b}',$$

e per conseguenza le (6.1) e (6.2) diventano:

$$(7.1) \quad \rho \left[\frac{dv^2/2}{ds'} - v_2 \left(v_1 c' + v_2 K' + \frac{dv_2}{ds'} - \frac{dv_1}{dn'} \right) \right] = - \frac{dp}{ds'},$$

$$(7.2) \quad \rho \left[\frac{dv^2/2}{dn'} + v_1 \left(v_1 c' + v_2 K' + \frac{dv_2}{ds'} - \frac{dv_1}{dn'} \right) \right] = - \frac{d\bar{p}}{dn'} + \frac{c'}{4\pi\mu} B^2.$$

Da (7.1) si deduce, in particolare, che se v è costante sulle linee di forza magnetiche anche p è costante su di esse qualora il moto sia irrotazionale oppure sia $\mathbf{v}$ parallelo a $\mathbf{B}$; da (7.2) che se v è costante lungo le traiettorie delle normali principali alle linee di forza magnetiche su di esse è pure costante $\bar{p}$ qualora sia $c' = 4\pi\mu\rho|\text{rot } \mathbf{v}|v_1/B^2$.

Per l'equazione del campo magnetico abbiamo (cfr. (3.3) e (3.4)):

$$(7.3) \quad \frac{d(rBv_2)}{ds'} = 0, \quad \frac{d(rBv_1)}{dn'} = 0.$$

La (6.4) dà:

$$(7.4) \quad \frac{1}{r} \frac{d(rB)}{ds'} + BK' = 0,$$

e la (6.5), se ρ non dipende da s (fatto questo che si verifica senz'altro nel caso barotropico essendo $\frac{\partial p}{\partial s} = 0$):

$$(7.5) \quad \frac{d(rp v_1)}{ds'} + \frac{d(rp v_2)}{dn'} + \rho r(v_1 K' - v_2 c') = 0.$$

Da (7.3)₁ e (7.4) discende la notevole espressione della curvatura delle traiettorie delle normali principali alle linee di forza magnetiche:

$$(7.6) \quad K' = \frac{1}{v_2} \frac{dv_2}{ds'}.$$

Da questa discende ad esempio che se v_z è costante sulle linee di forza magnetiche le traiettorie delle normali principali ad esse sono rettilinee e viceversa; etc.

Sostituendo (7.6) in (7.5) abbiamo per c' :

$$c' = \frac{1}{\rho r v_z} \left[\frac{d(\rho r v_z)}{ds'} + \frac{d(\rho r v_z)}{dn'} + \rho r \frac{v_z}{v_z} \frac{dv_z}{ds'} \right].$$

Per quanto riguarda il caso b), avendosi $\mathbf{t}' = \mathbf{N}$, $\mathbf{n}' = -\mathbf{u}$ e $\mathbf{b}' = \mathbf{i}$, la descrizione intrinseca sulle linee di forza magnetiche coincide con quella in coordinate cilindriche; per quest'ultima si rimanda a T. ZEULI [14] dove trovasi trattato il caso più generale: $\mathbf{B} = B_x(r, x)\mathbf{i} + B_r(r, x)\mathbf{u} + B_\theta(r, x)\mathbf{N}$, $\mathbf{v} = v_x(r, x)\mathbf{i} + v_r(r, x)\mathbf{u} + v_\theta(r, x)\mathbf{N}$ con un'equazione di stato adiabatica.

C. - Fluido viscoso.

8. - Qualora non sia trascurabile la viscosità del fluido per la descrizione intrinseca si procede allo stesso modo. Risulta ora, in generale, necessaria la decomposizione su $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ di $\text{grad div } \mathbf{v}$ (immediata) e di $\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{rot } \boldsymbol{\omega}$. Per quest'ultimo vettore, detta A la anormalità delle linee di corrente, svolgendo con lo stesso metodo usato per la (1.2) e tenendo presente che:

$$A = \frac{d\mathbf{t}}{dn} \times \mathbf{b} - \frac{d\mathbf{t}}{db} \times \mathbf{n},$$

si giunge nel caso spaziale all'espressione:

$$\begin{aligned} (8.1) \quad \text{rot } \boldsymbol{\omega} = & \left(\omega_t A + \frac{d\omega_b}{dn} - \frac{d\omega_n}{db} + \omega_n \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{n}}{dn} - \omega_b \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{b}}{db} \right) \mathbf{t} + \\ & + \left(\frac{d\omega_t}{db} - \frac{d\omega_b}{ds} + \omega_n \tau + \omega_n \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{db} + \omega_b \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{b}}{db} \right) \mathbf{n} + \left(c\omega_t + \frac{d\omega_n}{ds} + \right. \\ & \left. + \tau\omega_b - \frac{d\omega_t}{dn} - \omega_n \frac{d\mathbf{n}}{dn} \times \mathbf{t} - \omega_b \frac{d\mathbf{b}}{dn} \times \mathbf{t} \right) \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Da (8.1) si deduce nel caso piano:

$$(8.2) \quad \text{rot } \boldsymbol{\omega} = \frac{d\omega}{dn} \mathbf{t} - \frac{d\omega}{ds} \mathbf{n},$$

e nel caso di simmetria assiale:

$$(8.3) \quad \text{rot } \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{r} \left[\frac{d(r\omega)}{dn} \mathbf{t} - \frac{d(r\omega)}{ds} \mathbf{n} \right]$$

con

$$\omega = cv - \frac{dv}{dn}$$

in entrambi i casi.

Le (8.2) e (8.3) coincidono con quelle date in [6] sect. 70.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. P. KANWAL, *Intrinsic equations of magnetogasdynamics*, « Z. Angew Math. Mech. », 41, 1961, 462-63.
- [2] P. KUMAR, *On conducting plane gas flows*, « Tensor » 13, 1963, p. 89-93
- [3] N. A. WARSİ, *On steady plane flows of magnetogasdynamics*, « Tensor », 15, 1964, p. 275-281.
- [4] E. GRANDORI GUAGENTI, *Sulle equazioni intrinseche della magnetofluidodinamica*, « Boll. U.M.I. », 19, 1964, p. 460-464.
- [5] C. TRUESDELL, *Intrinsic equations of spatial gas flow*, « Z. Angew Math. Mech. », 40, 1960, p. 9-14.
- [6] J. SERRIN, *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, « Hand. der Phy. » VIII/1, 1959.
- [7] A. MASOTTI, *Decomposizione intrinseca del vortice e sue applicazioni*, « Rend. Ist. Lomb. Sc. Lett. », 60, 1927, p. 869-874.
- [8] E. R. SURYANARAYAN; *On the geometry of streamlines in hydromagnetic fluid flows when the magnetic field is along a fixed direction*, « Proc. Amer. Math. Soc. », 16, 1965, p. 90-96.
- [9] C. AGOSTINELLI, *Sui moti vorticosi in Magnetofluidodinamica*, « Atti Simposio Magnetofluidodinamica-Bari » 1961, p. 122-136, Ed. Cremonese Roma.
- [10] R. P. KANWAL, *Variation of flow quantities along streamlines and their principal normals and binormals in three dimensional gas flows*, « J. Math. Mech. », 6, 1957, p. 621-628.
- [11] H. GRAD, *Reducible problems in Magneto-Fluid Dynamics steady flows*. « Rev. Mod. Phy. », 32, 1960, p. 830-847.
- [12] S. LUNDQUIST, *Studies in Magnetohydrodynamics*, « Arkiv for Fysik », 5, 1952, p. 297-347.
- [13] C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica*, « Boll. U.M.I. », 20, 1965, p. 1-79.
- [14] T. ZEULI, *Su alcuni moti stazionari magnetodinamici a simmetria assiale di una massa fluida compressibile elettricamente conduttrice soggetta alla propria gravitazione*, « Atti Acc. Sc. Torino Cl. Sc. Fis. Mat. Nat. » 94, 1959-60, p. 533-551.