Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ettore Carruccio

Equazioni logiche nel calcolo dei predicati del primo ordine in un universo finito.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.3, p. 389–392.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_3_389_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

Equazioni logiche nel calcolo dei predicati del primo ordine in un universo finito (¹).

ETTORE CARRUCCIO (Torino)

Sunto. - *Si delinea una problematica relativa alle equazioni logiche nel calcolo dei predicati. Si risolvono tali equazioni nel caso del calcolo dei predicati del primo ordine, in un universo finito.*

§ 1. Mentre nel campo del calcolo delle proposizioni, una qualsiasi equazione data si sa risolvere, oppure si può stabilire che non ammette soluzioni (²), non si può dire altrettanto nell'ambito del calcolo dei predicati, nel quale il problema analogo è complesso e difficile, anzi presumibilmente non è suscettibile di una risoluzione completa.

In tale ordine d'idee, il presente lavoro è orientato verso una problematica relativa alle equazioni aventi per incognite predicati ed eventuali proposizioni. Si preciserà pertanto, nel calcolo dei predicati del primo ordine (³) un concetto di equazione logica e di soluzione della medesima. Nel caso poi degli universi finiti, costituiti cioè da un numero finito di elementi, si risolveranno tali equazioni o si dimostrerà la loro insolubilità. S'indicheranno infine brevemente talune direzioni secondo le quali la ricerca potrà venir proseguita.

§ 2. Per costruire l'equazione da prendersi in esame, consideriamo un insieme di predicati dati

(1) $$\Phi_1,\ \Phi_2, \dots \Phi_r, \dots \Phi_m$$

e di predicati incogniti

(2) $$\Xi_1,\ \Xi_2, \dots \Xi_s, \dots \Xi_n$$

(¹) Il presente lavoro è stato eseguito nell'ambito dell'attività del 25° gruppo di ricerca dell'C. N. R., gruppo diretto dal Prof. T. Viola.

(²) V. E. CARRUCCIO, *Equazioni logiche nel calcolo delle proposizioni* («Bollettino dell'Unione Matematica Italiana» (3) vol. 18, pp. 44-56, 1963).

(³) Sul calcolo dei predicati, v. p. es. W. V. O. QUINE, *Manuale di Logica*, Milano, 1960, parti seconda e terza.

in cui compaiono (globalmente) le variabili

(3) $$x_1,\ x_2, \dots x_i, \dots x_k$$

ognuna delle quali, varia rispettivamente in un ben determinato insieme

(4) $$I_1,\ I_2, \dots I_i \dots I_k.$$

I predicati (1) sono dati, nel senso che si considerano dati i loro valori di verità, in corrispondenza di ogni distribuzione di valori attribuiti alle variabili (3). Poniamo:

(5) $$I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_i \cup \cdots \cup I_k = U.$$

Sarà U (riunione degli I_i) l'universo nel quale si svolgerà la nostra ricerca.

Si abbiano inoltre le proposizioni date

(6) $$P_1,\ P_2, \dots P_p$$

e le proposizioni incognite

(7) $$X_1,\ X_2, \dots X_q.$$

Si applichino alle (1), (2), (6), (7), operazioni del calcolo delle proposizioni (negazioni, congiunzioni, disgiunzioni...) e quantificazioni (universali ed esistenziali) in un ordine qualsiasi, purchè si rispettino le regole per cui le formule ottenute risultino ben formate ([4]) e in definitiva le variabili risultino tutte apparenti.

Si otterrà così un'espressione suscettibile di divenire vera o falsa, una volta precisati i valori dei predicati $\Xi_1 \dots \Xi_n$ e delle proposizioni $X_1 \dots X_q$, mentre ovviamente si considerano determinati i valori delle (1) e delle (6).

Formuliamo quindi la condizione, che esprime la nostra equazione sotto la forma,

(8) $$E(\Phi_1, \dots \Phi_m,\ \Xi_1, \dots \Xi_n,\ P_1, \dots P_p,\ X_1, \dots X_q) \longleftrightarrow V$$

Risolvere la (8) significa esprimere i predicati incogniti (2) e le proposizioni incognite (7) mediante gli elementi dati (1) e (6), in modo che, sostituendo agli elementi incogniti (2) e (7) nella (8)

([4]) V. p. es. S. C. KLEENE, *Introduction to metamathematics*, Amsterdam, 1952, p. 143.

le espressioni rispettivamente ottenute, la (8) divenga sempre vera; cioè l'espressione ricavata dalla (8) mediante la sostituzione indicata risulti vera, comunque varino i significati delle (1), e i valori di verità delle (6), fermi restando gli insiemi prefissati (4) costituenti (v. (5)) l'universo U.

Qualora fosse impossibile trovare le espressioni che sostituite nella (8) la rendano sempre vera come si è precisato sopra, la (8) sarebbe per definizione insolubile.

Non è detto che sia risolubile in generale, il problema di determinare le soluzioni della (8) o di stabilire che tali soluzioni non esistono.

Tuttavia in qualche caso il problema si risolve facilmente come vedremo.

§ 3. Uno di questi casi è quello in cui U è costituito da un numero finito di elementi, in quanto in tal caso le quantificazioni universali ed esistenziali si trasformano rispettivamente in congiunzioni e disgiunzioni di proposizioni [5]: se un certo insieme I_i è costituito da l elementi

$$\alpha_{i1}\alpha_{i2}\ldots\alpha_{il}$$

allora:

$$(x_i)\Phi_r(x_1,\ x_2,\ldots x_i\ldots x_k) \longleftrightarrow [\Phi_r(x_1,\ x_2\ldots\alpha_{i1},\ldots x_k)\ \& $$
$$\&\ \Phi_r(x_1,\ x_2,\ldots\alpha_{i2},\ldots x_k)\ \&\ldots\&\ \Phi_r(x_1,\ x_2,\ldots\alpha_{il},\ldots x_k)]$$

$$(Ex_i)\Phi_r(x_1,\ x_2\ldots x_i\ldots x_k) \longleftrightarrow [\Phi_r(x_1,\ x_2,\ldots\alpha_{i1}\ldots x_k)\ \vee$$
$$\vee\ \Phi_r(x_1,\ x_2\ldots\alpha_{i2}\ldots x_k)\ \vee\ldots\vee\ \Phi_r(x_1,\ x_2\ldots\alpha_{il}\ldots x_k)].$$

Eseguite nella (8) le trasformazioni ora indicate, nei predicati dati e in quelli incogniti, tante volte quanto occorre per eliminare tutti i quantificatori, si ottiene in definitiva, un'equazione del calcolo delle proposizioni, in cui le proposizioni date sono della forma $\Phi_r(\alpha_{1j_1},\ldots\alpha_{ij_i},\ldots\alpha_{kj_k})$ oltre le $P_1\ldots P_p$, e le proposizioni incognite sono della forma $\Xi_s(\alpha_{1j_1},\ldots\alpha_{ij_i},\ldots\alpha_{kj_k})$ oltre le $X_1\ldots X_q$.

Si ottiene in definitiva un'equazione

$$(9)\qquad F[\ldots\Phi_r(\alpha_{1j_1},\ldots\alpha_{ij_i},\ldots\alpha_{kj_k})\ldots$$
$$\ldots\Xi_s(\alpha_{1j_1},\ldots\alpha_{ij_i},\ldots\alpha_{kj_k})\ldots P_1,\ldots P_p,\ X_1,\ldots X_q] \longleftrightarrow \vee$$

(5) Cfr. QUINE, *op. cit.* nota (2) pp. 117-118.

che si sa risolvere o se ne sa riconoscere l'insolubilità, in quanto la (9) contiene soltanto proposizioni date e proposizioni incognite ([6]).

Nel caso della risolubilità della (9) i predicati Ξ_r risultano determinati, in quanto vengono costruite le espressioni dei loro singoli valori in corrispondenza di ciascuna distribuzione di valori alle variabili x_i, valori introdotti per il tramite dei predicati dati Φ_r. Analoghe considerazioni si possono svolgere a proposito delle proposizioni da determinarsi $X_1 \dots X_q$.

Così il problema della risoluzione della (8) nel calcolo dei predicati del primo ordine, nel caso di un universo finito, in linea di principio e a prescindere dalla lunghezza e complessità dei calcoli, è pienamente risolto.

In casi particolari, specialmente con riferimento al mondo della pratica, per l'applicazione rapida dei metodi descritti, possono riuscir vantaggiosi i moderni calcolatori elettronici digitali i quali uniscono, ad una velocità di operazione particolarmente elevata, tecniche speciali di elaborazione di «liste di dati».

Le considerazioni svolte, pur limitate agli universi finiti, presentano talora qualche interesse, ad esempio nei casi in cui si mira a soddisfare l'esigenza finitista della metamatematica hilbertiana.

§ 4. Le ricerche nel campo delle equazioni nel calcolo dei predicati, appena accennate nel presente lavoro, possono venir proseguite in diverse direzioni.

Si tratta di studiare la risoluzione della (8) passando da un universo finito ad un universo costituito da infiniti elementi; presumibilmente converrà cominciare la ricerca a partire dal caso della quantificazione uniforme, per il quale si possiede una procedura di decisione, in quanto si sa risolvere il fondamentale problema della non contraddittorietà di un'espressione del campo considerato ([7]).

Si potrà inoltre estendere lo studio della (8) interpretata nel campo del calcolo dei predicati del 2° ordine (nel quale la quantificazione si estende a proposizioni e predicati), distinguendo i casi degli universi finiti ed infiniti, e così via.

([6]) V. E. CARRUCCIO, *op. cit.* nota ([1]).

([7]) V. QUINE, *op. cit.* nota ([2]), parte seconda.

---

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U.M.I.
il 21 settembre 1965