
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DELFINA ROUX

Sull'ordine inferiore delle funzioni intere.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 20
(1965), n.3, p. 379–388.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_3_379_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sull'ordine inferiore delle funzioni intere

DELFINA ROUX (Torino) (*)

Sunto. - Si assegna l'ordine inferiore (secondo Ritt) della funzione intera

$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ mediante l'andamento delle successioni $\{a_n\}$ e $\{\lambda_n\}$: se ne ricava l'analoga relazione fra l'ordine inferiore (in senso classico) della funzione intera $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e la successione $\{a_n\}$.

Si estende poi all'ordine inferiore un noto teorema di Mandelbrojt riguardante l'ordine di $f(s)$ in una striscia orizzontale.

Summary. - We give the Ritt lower order of $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ by means of the behaviour of the sequences $\{a_n\}$ and $\{\lambda_n\}$: we deduce the analogous formula for the lower order (in the classical sense) of $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. We prove also a theorem analogous to that one of Mandelbrojt concerning the order of $f(s)$ in a horizontal strip.

1. - Sull'ordine inferiore (secondo Ritt) delle funzioni intere assegnate mediante serie di Dirichlet.

Sia $\mathcal{F}$ la classe della serie di DIRICHLET

$$(1.1) \quad f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (s = \sigma + i\tau)$$

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lambda_n \rightarrow +\infty,$$

$$(1.2) \quad L = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} < +\infty,$$

convergenti in tutto il piano complesso (s). Allora ogni $f(s) \in \mathcal{F}$ converge assolutamente e $f(s)$ è una funzione intera di s (').

Per ogni σ reale finito poniamo

$$M(\sigma) = M(\sigma, f) = \sup_{-\infty < \tau < +\infty} |f(\sigma + i\tau)|$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1964-65.

(') Vedasi ad es. S. MANDELBROJT [2], pp. 168-169.

e consideriamo i due numeri (non negativi) ρ e λ definiti dalle relazioni

$$\rho = \rho(f) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 M(\sigma)}{-\sigma} \quad (2), \quad \lambda = \lambda(f) = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 M(\sigma)}{-\sigma}.$$

essi vengono chiamati, rispettivamente, *ordine* e *ordine inferiore* (secondo J. F. RITT) della funzione $f(s)$.

L'ordine ρ (secondo RITT) di $f(s)$ soddisfa la uguaglianza ⁽³⁾

$$(1.3) \quad \frac{1}{\rho(f)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log |1/a_n|}{\lambda_n \log \lambda_n}$$

(ove si ponga $1/\rho(f) = +\infty$ se $\rho(f) = 0$ e $1/\rho(f) = 0$ se $\rho(f) = +\infty$).

Non era invece finora noto il legame fra l'ordine inferiore (secondo RITT) di $f(s)$ e l'andamento delle successioni $\{a_n\}$ e $\{\lambda_n\}$. In questa Nota dimostreremo il seguente

TEOREMA I. - Per ogni $f(s) \in \mathcal{F}$ è

$$(1.4) \quad \frac{1}{\lambda(f)} = \text{Min}_{\{n_h\}} \overline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_h-1}}$$

al variare di $\{n_h\}$ fra le successioni di interi non negativi $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, (con la solita convenzione $1/\lambda(f) = +\infty$ se $\lambda(f) = 0$ e $1/\lambda(f) = 0$ se $\lambda(f) = +\infty$).

Consideriamo ora una funzione $f(s) \in \mathcal{F}$ ad accrescimento regolare (cioè tale che $\lambda(f) = \rho(f)$) e sia $\{n_h\}$ una successione per la quale risulti $\overline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_h-1}} = \frac{1}{\rho}$. La (1.3) implica allora

$$(1.5) \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_h}} = \frac{1}{\rho}$$

e inoltre, essendo

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_h-1}} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_h}} \cdot \overline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log \lambda_{n_h}}{\log \lambda_{n_h-1}},$$

si ottiene anche, se $\rho \neq 0, \infty$,

$$(1.6) \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log \lambda_{n_h}}{\log \lambda_{n_h-1}} = 1.$$

⁽²⁾ $\log_2 x = \log \log x$.

⁽³⁾ J. F. RITT [3], pag. 78.

Viceversa, se esiste una $\{n_h\}$ per la quale valgono (1.5) e (1.6), da (1.4) segue $1/\lambda \leq 1/\rho$ e quindi $\lambda = \rho$.

Si ottiene così come corollario del Teorema I il seguente

TEOREMA (YU CHIA-YUNG [9], pag. 73). - Condizione necessaria e sufficiente affinchè $f(s) \in \mathcal{F}$ di ordine ρ ($0 < \rho < +\infty$) sia ad accrescimento regolare è che esista $\{n_h\}$ soddisfacente le condizioni

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log \lambda_{n_h}}{\log \lambda_{n_{h-1}}} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{\lambda_{n_h} \log n_h} = \frac{1}{\rho}.$$

2. Sull'ordine inferiore (nel senso classico) delle funzioni intere.

Sia $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ una funzione intera della variabile complessa z e consideriamo l'ordine ρ^* e l'ordine inferiore λ^* (nel senso classico) di $g(z)$, cioè i due numeri non negativi definiti dalle relazioni

$$\rho^* = \rho^*(g) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 M^*(r)}{\log r}, \quad \lambda^* = \lambda^*(g) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 M^*(r)}{\log r}$$

$$(M^*(r) = M^*(r, g) = \max_{z \leq r} |g(z)|).$$

L'ordine ρ^* soddisfa, come è ben noto, la uguaglianza

$$\frac{1}{\rho^*} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log |1/a_n|}{n \log n}.$$

La relazione fra l'ordine inferiore λ^* e l'andamento della successione $\{a_n\}$ è notevolmente più complicata e finora erano note soltanto limitazioni dal di sopra e dal disotto ⁽⁴⁾. Tale relazione si può ottenere ora come immediato corollario del Teorema I. Infatti, con la posizione abituale $z = e^{-s}$, $g(z)$ si muta in $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns} \in \mathcal{F}$ e, essendo $M^*(r, g) = M(-\log r, f)$, risulta $\lambda^*(g) = \lambda(f)$. Vale quindi il

TEOREMA II. - Per ogni funzione intera $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ risulta

$$\frac{1}{\lambda^*(g)} = \min_{\{n_h\}} \overline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{n_h \log n_{h-1}}$$

⁽⁴⁾ J. M. WHITTAKER [8], S. M. SHAH [5], D. ROUX [4].

al variare di $\{n_h\}$ fra le successioni di interi non negativi $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, (con la solita convenzione $1/\lambda^*(g) = +\infty$ se $\lambda^*(g) = 0$ e $1/\lambda^*(g) = 0$ se $\lambda^*(g) = +\infty$).

3. Sull'ordine inferiore (secondo RITT) in una striscia orizzontale.

Sia $f(s) \in \mathcal{F}$. L'ordine e l'ordine inferiore (secondo RITT) di $f(s)$ possono essere definiti anche nel modo seguente. Per ogni σ reale finito poniamo (seguendo M. BLAMBERT)

$$\mathfrak{N}(\sigma) = \mathfrak{N}(\sigma, f) = \sup_{\tau, N} \left| \sum_{n=0}^{n=N} a_n e^{-\lambda_n(\sigma + i\tau)} \right|$$

$(-\infty < \tau < +\infty; N = 0, 1, 2, \dots)$.

Si dimostra ⁽⁵⁾ che è anche

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 \mathfrak{N}(\sigma)}{-\sigma}, \quad \lambda(f) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \mathfrak{N}(\sigma)}{-\sigma}.$$

Diciamo ora $S(\tau_0, R)$ l'insieme dei punti $s = \sigma + i\tau$ soddisfacenti la limitazione $|\tau - \tau_0| \leq R$ e poniamo, per ogni σ reale finito

$$(3.1) \quad \mathfrak{N}_S(\sigma) = \mathfrak{N}_S(\sigma, f) = \sup_{\tau, N} \left| \sum_{n=0}^{n=N} a_n e^{-\lambda_n(\sigma + i\tau)} \right|$$

$(|\tau - \tau_0| \leq R, N = 0, 1, 2, \dots)$.

I due numeri non negativi ρ_S e λ_S definiti dalle relazioni

$$\rho_S = \rho_S(f) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 \mathfrak{N}_S(\sigma)}{-\sigma}, \quad \lambda_S = \lambda_S(f) = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 \mathfrak{N}_S(\sigma)}{-\sigma}$$

vengono chiamati, rispettivamente, *ordine* e *ordine inferiore* di $f(s)$ nella striscia orizzontale $S(\tau_0, R)$.

È evidente che in qualunque striscia orizzontale risulta $\rho_S \leq \rho$ $\lambda_S \leq \lambda$ ed esistono teoremi ⁽⁶⁾ che, sotto opportune condizioni riguardanti l'ampiezza R della striscia considerata, assicurano la validità della uguaglianza $\rho_S = \rho$. In particolare, sussiste il seguente

TEOREMA (S. MANDELBROT). - « $f(s) \in \mathcal{F}$ soddisfi la condizione $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$. Allora, detta D la densità superiore ⁽⁷⁾ della

⁽⁵⁾ M. BLAMBERT [1], pp. 356-358.

⁽⁶⁾ S. MANDELBROT [2], teor. XXIV, pag. 219; M. BLAMBERT [1], teor. III.2.1., pag. 372.

⁽⁷⁾ $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} N(x)/x$, dove $N(x) = \sum_{\lambda_n < x} 1$. Risulta $D < +\infty$ in forza di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0.$$

successione $\{\lambda_n\}$, in ogni striscia $S(\tau_0, R)$ con $R > \pi D$ risulta $\rho_S(f) = \rho(f)$ ».

In questa Nota dimostreremo che per l'ordine inferiore λ_S in una striscia orizzontale sussiste l'analogo

TEOREMA III. - $f(s) \in \mathcal{F}$ soddisfi la condizione $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$. Allora, detta D la densità superiore della successione $\{\lambda_n\}$, in ogni striscia $S(\tau_0, R)$ con $R > \pi D$ risulta $\lambda_S(f) = \lambda(f)$.

4. Un Lemma preliminare.

Per ogni σ reale finito sia $\mu(\sigma)$ il modulo del termine di modulo massimo della serie (1.1) e sia $N(\sigma)$ l'indice di tale termine, cioè sia

$$(4.1) \quad \text{Max}_{0 \leq n < +\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} = |a_{N(\sigma)}| e^{-\lambda_{N(\sigma)} \sigma} = \mu(\sigma).$$

(Se per un certo σ esistono più indici n pei quali è soddisfatta la (4.1), si conviene di assumere come $N(\sigma)$ il massimo di tali indici n).

Sussiste il seguente

LEMMA (⁸). - Per ogni $f(s) \in \mathcal{F}$ risulta

$$\begin{aligned} \rho(f) &= \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 \mu(\sigma)}{-\sigma} = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log \lambda_{N(\sigma)}}{-\sigma}, \\ \lambda(f) &= \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 \mu(\sigma)}{-\sigma} = \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log \lambda_{N(\sigma)}}{-\sigma}. \end{aligned}$$

Infatti, dalle note disuguaglianze (⁹)

$$\mu(\sigma) \leq M(\sigma), \quad M(\sigma) \leq K\mu(\sigma - L - \epsilon), \quad (\epsilon > 0, \quad \sigma < \sigma_0(\epsilon, f))$$

(dove L è definito in (1.2) e $K = K(\epsilon, f)$ è indipendente da σ), segue immediatamente

$$(4.2) \quad \rho(f) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 \mu(\sigma)}{-\sigma}, \quad \lambda(f) = \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 \mu(\sigma)}{-\sigma}.$$

(⁸) Questo Lemma estende all'ordine e all'ordine inferiore (secondo RITT) delle funzioni intere rappresentate mediante serie di DIRICHLET proprietà note dell'ordine e dell'ordine inferiore (in senso classico) delle funzioni intere (G. VALIRON [6], pag. 33; J. M. WHITTAKER [8], pag. 21).

(⁹) G. VALIRON [6], [7]. Veda anche YU CHIA-YUNG [9], pp. 67-68.

Dalla relazione

$$\log \mu(\sigma) = \log \mu(\sigma_1) + \int_{\sigma}^{\sigma_1} \lambda_{N(x)} dx, \quad \sigma < \sigma_1$$

si ricava

$$(4.3) \quad \log \mu(\sigma) \leq -\sigma \lambda_{N(\sigma)} + O(1), \quad \text{per } \sigma \rightarrow -\infty$$

e anche, per ogni $\varepsilon > 0$, $\sigma < \sigma_2(\varepsilon, f)$

$$(4.4) \quad \log \mu(\sigma - \varepsilon) = \log \mu(\sigma) + \int_{\sigma - \varepsilon}^{\sigma} \lambda_{N(x)} dx \geq \varepsilon \lambda_{N(\sigma)}.$$

Da (4.3) e (4.4), tenendo conto di (4.2) si ottiene

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log \lambda_{N(\sigma)}}{-\sigma}, \quad \lambda(f) = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\log \lambda_{N(\sigma)}}{-\sigma}$$

e il Lemma è dimostrato.

5. Dimostrazione del Teorema I.

Cominciamo a provare che per qualunque successione parziale $\{n_h\}$ di indici n è soddisfatta la limitazione

$$(5.1) \quad \frac{1}{\lambda} \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_{h-1}}} = \alpha.$$

Basterà ovviamente limitarsi al caso $\alpha < +\infty$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $h \geq h_0$ è allora

$$(5.2) \quad \log |1/a_{n_h}| \leq (\alpha + \varepsilon) \lambda_{n_h} \log \lambda_{n_{h-1}}.$$

Dalla nota relazione ⁽¹⁰⁾

$$a_n e^{-\lambda_n \sigma} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^T f(\sigma + i\tau) e^{\lambda_n i\tau} d\tau, \quad (n \geq 0)$$

⁽¹⁰⁾ Vedasi ad es. S. MANDELBROJT [2], pag. 170.

si ottiene, ricordando (5.2)

$$\log M(\sigma) \geq \log |a_{n_h}| - \lambda_{n_h} \sigma \geq -(\alpha + \varepsilon) \log \lambda_{n_{h-1}} + \sigma \lambda_{n_h}.$$

Poniamo $\sigma_h = -(\alpha + 2\varepsilon) \log \lambda_{n_h}$. Per ogni σ soddisfacente la limitazione $\sigma_h < \sigma \leq \sigma_{h-1}$ risulta allora (essendo $M(\sigma)$ funzione non crescente al crescere di σ)

$$\log M(\sigma) \geq \log M(\sigma_{h-1}) \geq \varepsilon \lambda_{n_h} \log \lambda_{n_{h-1}} \quad (h \geq h_0)$$

e pertanto

$$\lambda = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 M(\sigma)}{-\sigma} \geq \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log \lambda_{n_h}}{-\sigma_h} = \frac{1}{\alpha + 2\varepsilon}.$$

Per l'arbitrarietà di ε , segue (5.1).

Se $\lambda = 0$, allora $1/\lambda = +\infty$ e il teorema è valido per la (5.1).

Se $\lambda > 0$, consideriamo la sottosuccessione parziale $\{n_h\}$ formata da quegli indici n per i quali esiste almeno un σ tale che $N(\sigma) = n$. Dimosteremo che per questa successione vale in (5.1) il segno $=$.

Senza alterare la generalità, possiamo supporre che $\{n_h\}$ coincida con la successione degli interi naturali ⁽¹¹⁾. Procediamo per assurdo: sia

$$(5.3) \quad \frac{1}{\lambda} < \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log |1/a_n|}{\lambda_n \log \lambda_{n-1}} = \alpha \leq +\infty$$

e siano α' e α'' due numeri reali tali che

$$(5.4) \quad 1/\lambda < \alpha' < \alpha'' < \alpha.$$

Diciamo σ_{n+1} l'estremo inferiore dei valori σ per i quali è soddisfatta la limitazione $N(\sigma) \leq n$.

Poniamo, per semplicità di scrittura

$$\lambda_{n+1} = k_n \lambda_n, \quad \frac{\log |1/a_n|}{\lambda_n \log \lambda_{n-1}} = \alpha_n, \quad (k_n > 1, \alpha_n > 0 \text{ per } n \geq n_0(f)).$$

Essendo $|a_n| e^{-\lambda_n \sigma_{n+1}} = |a_{n+1}| e^{-\lambda_{n+1} \sigma_{n+1}}$, risulta

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \frac{\log |a_{n+1}| - \log |a_n|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = - \frac{\alpha_{n+1} k_n \lambda_n \log \lambda_n - \alpha_n \lambda_n \log \lambda_{n-1}}{\lambda_n (k_n - 1)} \\ &= - \left\{ \alpha_{n+1} + \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n \log \lambda_{n-1} / \log \lambda_n}{k_n - 1} \right\} \log \lambda_n \\ &< - \left\{ \alpha_{n+1} + \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{k_n - 1} \right\} \log \lambda_n. \end{aligned}$$

⁽¹¹⁾ Infatti, per il Lemma del n. 4, la funzione ottenuta sopprimendo in (1.1) i termini il cui indice non appartiene a $\{n_h\}$ ha lo stesso ordine inferiore della funzione $f(s)$ data.

Per il Lemma del n. 4 e per la (5.4) è

$$\frac{1}{\lambda} = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{-\sigma}{\log \lambda_{N(\sigma)}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\sigma_{n+1}}{\log \lambda_n} < a';$$

da (5.5) segue allora che, per $n \geq n_i = n_i(a')$ risulta soddisfatta la limitazione

$$(5.6) \quad \alpha_{n+1} + \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{k_n - 1} < a'.$$

Sia ora $\{n_h\}$ una successione parziale di indici n per la quale risulti $\alpha_{n_h} \rightarrow \alpha$ per $h \rightarrow +\infty$. Per ogni $h \geq h_0 = h_0(a')$ sarà allora $\alpha_{n_h} > a''$.

Essendo $\alpha_{n_h} > a'' > a'$, da (5.6) segue che per ogni $n_h > m = \text{Max}(n_i, n_{h_0})$ deve essere $\alpha_{n_h} - \alpha_{n_{h-1}} < 0$ e pertanto, quando $n_h > m$, risulta

$$\alpha_{n_{h-1}} > \alpha_{n_h} > a''.$$

Iterando il procedimento si conclude che per $n > m$, $\{\alpha_n\}$ è decrescente e $\alpha_n \downarrow \alpha$.

Se $\alpha = +\infty$, siamo così pervenuti all'assurdo. Se $\alpha < +\infty$, osserviamo che, essendo per $n > m$ $\alpha_{n+1} > \alpha > a''$, da (5.6) si ottiene

$$\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{k_n - 1} < a' - a''$$

e cioè

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} > (a'' - a') \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n}.$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \alpha_m - \alpha &= \sum_{n=m}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) > (a'' - a') \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n} \\ &> (a'' - a') \sum_{n=m_0}^{\infty} 1/n \end{aligned}$$

($m_0 = m_0(m) < +\infty$) e questo è assurdo perchè la serie dell'ultimo membro è divergente.

Abbiamo così provato l'esistenza di una successione parziale $\{n_h\}$ per la quale in (5.1) vale il segno =: il Teorema I è dimostrato.

6. Dimostrazione del Teorema III.

Essendo necessariamente $\lambda_S \leq \lambda$, il teorema è ovvio se $\lambda = 0$. Se $\lambda > 0$, basterà dimostrare che è anche $\lambda_S \geq \lambda$.

Per il Teorema I, esiste una successione parziale $\{n_h\}$ di indici n per la quale risulta

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_{h-1}}} = \frac{1}{\lambda} < +\infty.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, $h > h_0(\varepsilon)$ sarà allora

$$(6.1) \quad \log |a_{n_h}| \geq - \left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon \right) \lambda_{n_h} \log \lambda_{n_{h-1}}.$$

Sia C il cerchio $|s - (\sigma + i\tau_n)| \leq R$ e poniamo

$$M_C(\sigma) = \max_{s \in C} |f(s)|.$$

Se $R > \pi D$, esiste una costante K tale che per ogni $n > n_0(K)$ risulta ⁽¹²⁾

$$\log M_C(\sigma) \geq \log |a_{n_h}| - \lambda_{n_h}(\sigma + K).$$

Per ogni $h > h_1 = h_1(\varepsilon, K)$ sarà allora, per la (6.1)

$$(6.2) \quad \log M_C(\sigma) \geq - \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon \right) \log \lambda_{n_{h-1}} + \sigma + K \right\} \lambda_{n_h}.$$

Poniamo ora

$$(6.3) \quad \sigma_{h+1} = - \left(\frac{1}{\lambda} + 2\varepsilon \right) \log \lambda_{n_h}.$$

Per ogni σ soddisfacente la limitazione

$$(6.4) \quad \sigma_{h+1} < \sigma \leq \sigma_h,$$

essendo $\mathfrak{N}_S(\sigma)$ (definito in (3.1)) decrescente al crescere di σ ⁽¹³⁾, risulta

$$\log \mathfrak{N}_S(\sigma) \geq \log \mathfrak{N}_S(\sigma_h)$$

e anche, essendo ovviamente $\mathfrak{N}_S(\sigma) \geq \max_{|\tau - \tau_0| \leq R} |f(\sigma + i\tau)|$,

$$\log \mathfrak{N}_S(\sigma) \geq \log M_C(\sigma_h + R).$$

⁽¹²⁾ S. MANDELBROJT [2], teor. XVI, pag. 199 e teor. XVII, pag. 201.

⁽¹³⁾ M. BLAMBERT [1], Lemma II.3.1., pag. 359.

Da (6.2) e (6.3) segue

$$\log \mathfrak{N}_S(\sigma) \geq |\varepsilon \log \lambda_{n_{h-1}} - (K + R)| \lambda_{n_h}.$$

Si ha quindi, tenendo conto di (6.4)

$$\lambda_S = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \mathfrak{N}_S(\sigma)}{-\sigma} \geq \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{(1 + o(1)) \log \lambda_{n_h}}{\left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) \log \lambda_{n_h}} = 1 / \left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right).$$

Per l'arbitrarietà di ε risulta allora $\lambda_S \geq \lambda$ e si perviene così al Teorema III.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. BLAMBERT, *Sur la notion de type de l'ordre d'une fonction entière*, « Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. » (3) 8 pp. 353-375 (1962).
- [2] S. MANDELBROJT, *Dirichlet series*, « Rice Inst. Pamphlet » 31 pp. 157-272 (1944).
- [3] J. F. RITT, *On certain points in the theory of Dirichlet series*, « Am. J. Math. », 50 pp. 73-86 (1928).
- [4] D. ROUX, *Sul divario fra l'ordine e l'ordine inferiore delle funzioni intere*, « Riv. Mat. Univ. Parma » (2) 4 pp. 191-210 (1963).
- [5] S. M. SHAH, *On the lower order of integral functions*, « Bull. Amer. Math. Soc. » 52 pp. 1046-1052 (1946).
- [6] G. VALIRON, *Lectures on the general theory of integral functions*, Toulouse (1923).
- [7] — —, *Functions and Borel's directions*, « Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. » 20 pp. 211-215 (1934).
- [8] J. M. WHITTAKER, *The lower order of integral functions*, « J. London Math. Soc. » 8 pp. 20-27 (1933).
- [9] YU CHIA-YUNG, *Sur les droites de Borel de certaines fonctions entières*, « Ann. Scien. Éc. Norm. Sup. » (3) 68 pp. 65-104 (1951).