
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCESCO SPERANZA

Sulla nozione di connessione.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 20
(1965), n.3, p. 367–378.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_3_367_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla nozione di connessione

FRANCESCO SPERANZA (Bologna) (*)

Sunto. - Si estende la nozione di connessione con metodi essenzialmente algebrici: si definiscono i «trasporti» senza particolari restrizioni, i «trasporti a pseudogruppo fondamentale» e le «connessioni a gruppo fondamentale», e se ne studiano le principali proprietà.

Summary. - The author gives some extensions of the idea of connexion with essentially algebraic methods; « transports » without special restrictions, « transports with fundamental pseudogroup » and « connexions with fundamental group » are defined and studied.

1. Ci occuperemo qui di alcune estensioni del concetto di connessione, per le quali non occorrono ipotesi di differenziabilità sui dati, né (per la maggior parte delle proposizioni) è necessario supporre che gli spazi in questione siano varietà topologiche: tali estensioni permetteranno di porre in evidenza l'aspetto algebrico della nozione di connessione. Dopo alcune nozioni — essenziali per il seguito — sulle categorie e gli pseudogruppi (n. 2), precisaremo alcune proprietà degli archi d'una varietà (n. 3), e vedremo condizioni sufficienti affinché in una rappresentazione l'immagine d'una categoria sia una categoria (n. 4). Nel n. 5 si definirà e si studierà il «trasporto» (senza particolari restrizioni) in uno spazio a struttura fibrosa, mentre nei nn. 6 e 7 si definiranno e si studieranno rispettivamente i trasporti a pseudogruppo fondamentale e le connessioni a gruppo fondamentale.

2. Ricordiamo che una *categoria* è un insieme dotato d'una legge di composizione non necessariamente ovunque definita, tale che:

1) Se fg ed $(fg)h$ sono definiti, lo sono pure gh ed $f(gh)$ e si ha

$$(fg)h = f(gh).$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del C. N. R.

2) Se fg e gh sono definiti, altrettanto accade di $(fg)h$ (queste due proprietà si diranno associative).

3) Per ogni f esiste un elemento neutro destro $\varepsilon(f)$ ed un elemento neutro sinistro $\varepsilon'(f)$, tali cioè che se $g\varepsilon(f)$ o $\varepsilon(f)h$ sono definiti, si abbia

$$g\varepsilon(f) = g, \varepsilon(f)h = h,$$

ed analogamente per $\varepsilon'(f)$ [5, 6].

Un gruppoide è una categoria tale che per ogni suo elemento f esiste un elemento inverso f^{-1} , per il quale $f^{-1}f = \varepsilon(f)$, $ff^{-1} = \varepsilon'(f)$.

Se E_α è una collezione di spazi, le applicazioni continue d'uno di tali spazi su un altro costituiscono una categoria $\mathcal{K}(E_\alpha)$; gli omeomorfismi fra tali spazi costituiscono un gruppoide $\mathcal{F}(E_\alpha)$ (la legge di composizione essendo in ogni caso il prodotto ordinario di applicazioni).

D'ora innanzi, per ogni applicazione f , indicheremo con U_f , U'_f rispettivamente il dominio e il codominio. Indicheremo con f_A la restrizione di f ad A ($A \subset U_f$). Allora il prodotto ordinario $g \circ f$ di due applicazioni f, g è definito solo se $U'_f = U_g$, mentre, se $U'_f \cap U_g \neq \emptyset$, si può definire lo *pseudoprodotto* gf secondo la

$$gf = g_A \circ f_{f^{-1}A} \quad (A = U'_f \cap U_g).$$

Manifestamente, se esiste $g \circ f$, esiste pure gf e si ha in tal caso $gf = g \circ f$.

Si dice *pseudogruppo di trasformazioni* un insieme Γ di applicazioni di sottoinsiemi d'un insieme E in E tali che:

a) $\forall f \in \Gamma$, U_f è un elemento d'un insieme Φ di parti di E , verificante gli assiomi degli aperti d'una topologia $\mathcal{T}$ (se E è uno spazio, si supporrà sempre che la sua topologia sia $\mathcal{T}$);

b) se $U = \bigcup U_i$, con $U_i \in \Phi$, un'applicazione f definita in U appartiene a Γ se e solo se ciascuna delle restrizioni f_{U_i} appartiene a Γ ;

c) rispetto al prodotto ordinario, Γ è dotato della struttura algebrica di gruppoide.

Si constata che $U'_f \in \Phi$ ($\forall f \in \Gamma$), e quindi, se gf è definito, appartengono a Φ tanto $U'_f \cap U_g$, quanto $f^{-1}(U'_f \cap U_g)$, e $gf \in \Gamma$: f è un omeomorfismo di U_f su U'_f nella $\mathcal{T}$.

Indicheremo con $\mathcal{A}(E, E')$, o più semplicemente con $\mathcal{A}$, un atlante di E su E' , cioè un insieme di applicazioni biettive d'un sottoinsieme di E in E' (carte), tali che

$$\bigcup_{f \in \mathcal{A}} U'_f = E'.$$

Se uno degli insiemi è dotato d'una struttura topologica, supporremo che i relativi domini delle carte di $\mathcal{A}$ siano aperti in tale struttura. Se in E è dato uno pseudogruppo Γ , si dice che $\mathcal{A}$ è *compatibile rispetto a* Γ se lo sono a due a due le sue carte, cioè se, per ogni coppia f, g di carte con $U_f \cap U_g \neq \emptyset$,

$$g^{-1}f \in \Gamma [4].$$

Un atlante $\bar{\mathcal{A}}$ compatibile rispetto a Γ si dice *completo* [4] se contiene tutte le carte compatibili rispetto a Γ con le sue carte. Ogni atlante $\mathcal{A}$ compatibile rispetto a Γ è contenuto in un unico atlante completo $\bar{\mathcal{A}}$ compatibile rispetto a Γ [4].

Dati due atlanti $\mathcal{A}(E, E)$, $\mathcal{A}'(E', E')$, l'insieme degli pseudoprodotti $f'f (f \in \mathcal{A}, f' \in \mathcal{A}')$ è un atlante che indicheremo con $\mathcal{A}'\mathcal{A}$ e diremo *pseudoprodotto* di $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$. Si possono comporre in questo modo anche atlanti e applicazioni, considerando queste ultime come atlanti d'una sola carta. Lo pseudoprodotto d'atlanti gode delle proprietà associative.

Non si può invece assicurare che l'insieme dei prodotti $f' \circ f$ sia un atlante; nel caso in cui lo sia, lo indicheremo con $\mathcal{A}' \circ \mathcal{A}$ e si avrà:

$$\mathcal{A}' \circ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'\mathcal{A}.$$

Se

$$\bigcup_{f \in \mathcal{A}} U_f = E,$$

le carte f^{-1} costituiscono un atlante di E' su E , che diremo *opposto* di $\mathcal{A}$, e indicheremo con $\mathcal{A}^{-1}$. Si ha

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} \supseteq \mathcal{E}(E), \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} \supseteq \mathcal{E}(E'),$$

dove $\mathcal{E}(X)$ è un atlante di X su se stesso costituito da restrizioni dell'applicazione identica. Si osservi che, per ogni atlante $\mathcal{A}(E, E')$, e per ogni $\mathcal{E}(E)$, esiste un $\mathcal{E}(E')$ tale che

$$\mathcal{A}\mathcal{E}(E) = \mathcal{E}(E')\mathcal{A}.$$

Se $\bar{\mathcal{A}}(E, E')$ è un atlante completo, compatibile con uno pseudogruppo Γ e che ammette l'atlante opposto, si ha

$$(1) \quad \bar{\mathcal{A}} \circ \Gamma \circ \bar{\mathcal{A}}^{-1} = \bar{\mathcal{A}}\Gamma\bar{\mathcal{A}}^{-1}.$$

Lo pseudogruppo Γ e l'atlante $\bar{\mathcal{A}}$ individuano in E' (qualora non ne sia già dotato) una struttura topologica [4]. Aggiungiamo all'atlante (1) gli omeomorfismi locali δ' di E' in sè, tali che $U_{\delta'}$ si possa decomporre in parti in modo che la restrizione di δ' a ciascuna di esse appartenga ad (1): si ottiene così uno pseudogruppo Γ' , che indicheremo con $\Theta(\Gamma, \bar{\mathcal{A}})$ (e si dirà generato da Γ ed $\bar{\mathcal{A}}$).

3. In uno spazio topologico S gli archi, cioè le applicazioni continue dell'intervallo chiuso $I(0, 1)$ in S , costituiscono, rispetto al prodotto omotopico, una struttura algebrica non associativa [9]. Possiamo però definire, mediante un passaggio al quoziente, degli « archi luogo », per i quali rimane definita in modo naturale una struttura di categoria.

Siano $\alpha(t)$, $\beta(t)$ due applicazioni continue di I in S ; sia R la relazione così definita: $\alpha(t)R\beta(t)$ quando esistono due ricoprimenti $\{I_k\}$, $\{J_k\}$ di I costituiti da intervalli chiusi successivi in corrispondenza biunivoca, eventualmente costituiti da un solo punto, tali che esista un'applicazione continua non decrescente $u_k: I_k \rightarrow J_k$ per cui

$$(2) \quad \alpha_{I_k} = \beta_{J_k} \circ u_k,$$

oppure un'applicazione continua non decrescente $t_k: J_k \rightarrow I_k$ per cui

$$(2') \quad \beta_{J_k} = \alpha_{I_k} \circ t_k.$$

R è ovviamente riflessiva e simmetrica; per provare la sua transitività, considerato un arco $\gamma(t)$ con $\beta(t)R\gamma(t)$, ed i due ricoprimenti $\{L_i\}$, $\{M_i\}$ di I che si hanno per la definizione, si raffinano tutti i ricoprimenti in modo che $\{L_i\} = \{J_k\}$: basta poi esaminare i quattro casi nei quali si possono combinare le eventualità (2) e (2'). R è una relazione d'equivalenza, e le sue classi si diranno *archi luogo*. Indicheremo con α^* la classe cui appartiene l'arco α ⁽¹⁾.

Il prodotto omotopico è compatibile con la relazione R ; cioè, se γ_1 , γ_2 , δ_1 , δ_2 sono quattro archi tali che $\gamma_2\gamma_1$ sia definito e $\gamma_1R\delta_1$, $\gamma_2R\delta_2$, allora esiste anche $\delta_2\delta_1$ e si ha $(\gamma_2\gamma_1)R(\delta_2\delta_1)$. Possiamo quindi definire il prodotto di due archi luogo γ_1^* , γ_2^* secondo la

$$\gamma_2^*\gamma_1^* = (\gamma_2\gamma_1)^*.$$

TEOR. 3.1. — *Rispetto al prodotto così definito, l'insieme degli archi luogo è dotato della struttura algebrica di categoria (se lo spazio è S , la categoria si dirà $\Pi(S)$).*

(1) Consideriamo le relazioni R_0 ed R_1 così definite:

$\alpha(t)R_0\beta(t)$ quando esiste un'applicazione continua crescente $u(t)$ di I su se stesso tale che $\beta \circ u = \alpha$

$\alpha(t)R_1\beta(t)$ quando coincidono le immagini di I in $\alpha(t)$, $\beta(t)$, ed $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \beta(1)$.

Sia poi σ la relazione d'omotopia. Si ha

$$R_0 \subseteq R \subseteq R_1, \quad R \subseteq \sigma \quad (\text{il segno } \subseteq \text{ si ha solo in casi banali}).$$

R_0 ed R_1 non sono adatte ai nostri scopi, poichè le classi d'equivalenza di R_0 , composte in modo analogo a quelle di R , non ammettono elementi neutri, ed $R_1 \not\subseteq \sigma$.

Infatti, se $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono tre archi, tali che siano definiti i prodotti $\gamma_2^* \gamma_1^*, \gamma_3^* \gamma_2^*$, allora esistono anche $\gamma_2 \gamma_1, \gamma_3 \gamma_2$, e quindi pure $\gamma_3^* (\gamma_2^* \gamma_1^*)$ e $(\gamma_3^* \gamma_2^*) \gamma_1^*$: se poi esiste uno di questi due prodotti, esiste anche l'altro. Si ha inoltre, per definizione

$$\gamma_3(\gamma_2 \gamma_1) \begin{cases} \gamma_1(4t) & (0 \leq t \leq 1/4) \\ \gamma_2(4t-1) & (1/4 < t \leq 1/2) \\ \gamma_3(2t-1) & (1/2 < t \leq 1) \end{cases} \quad (\gamma_3 \gamma_2) \gamma_1 \begin{cases} \gamma_1(2u) & (0 \leq u \leq 1/2) \\ \gamma_2(4u-2) & (1/2 < u \leq 3/4) \\ \gamma_3(4u-3) & (3/4 < u \leq 1) \end{cases}$$

Se si pone

$$u = 2t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{4}\right), \quad u = t + \frac{1}{4} \quad \left(\frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}\right), \quad u = \frac{t+1}{2} \quad \left(\frac{1}{2} < t \leq 1\right).$$

si constata come

$$\gamma_3(\gamma_2 \gamma_1) R(\gamma_3 \gamma_2) \gamma_1,$$

e quindi

$$\gamma_3^* (\gamma_2^* \gamma_1^*) = (\gamma_3^* \gamma_2^*) \gamma_1^*.$$

Sono quindi verificati gli assiomi 1) e 2) delle categorie. L'elemento neutro destro (sinistro) di γ^* è la classe cui appartiene l'applicazione costante di I in $\gamma(0)$ (rispettivamente in $\gamma(1)$). Gli archi luogo costituiscono perciò una categoria (ma non un gruppoide, salvo casi banali, poichè il prodotto $\gamma^*(\gamma^{-1})^*$ non è un elemento neutro).

4. Sarà utile nel seguito il seguente

TEOR. 4.1. — Sia data un'applicazione Ψ di una categoria K in un insieme K' , dotato d'una legge di composizione non necessariamente sempre definita, tale che

a) se fg è definito, lo è pure $\Psi(f)\Psi(g)$, e si ha $\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg)$;

b) se $\Psi(f)\Psi(g)$ è definito, lo è pure fg ,

allora $\Psi(K)$ è una categoria (rispetto alla legge di composizione di K'). (*)

Infatti, se sono definiti $\Psi(f)\Psi(g)$ e $[\Psi(f)\Psi(g)]\Psi(h)$, lo sono pure, per b), fg ed $(fg)h$, e quindi anche $f(gh)$ e, per a), $\Psi(f)[\Psi(g)\Psi(h)]$, che

(*) Se K è un gruppo, la sola a), com'è noto, basta ad assicurare che $\Psi(K)$ è pure un gruppo. Non così per le categorie, come prova il seguente esempio: sia $\mathcal{E}$ l'insieme delle applicazioni d'un qualsiasi sottoinsieme d'un insieme E in un altro. Rispetto al prodotto ordinario, $\mathcal{E}$ è una categoria, rispetto allo pseudoprodotto non lo è. Tuttavia, l'applicazione identica di $\mathcal{E}$ in sé, pensandolo la prima volta dotato del prodotto ordinario e la seconda dello pseudoprodotto, soddisfa la a).

Per teoremi di questo tipo, cfr. pure [6], cap. 1, 2A).

vale $\Psi(fgh) = \Psi((fg)h) = [\Psi(f)\Psi(g)]\Psi(h)$: è quindi verificato l'assioma 1) delle categorie: analogamente si verifica 2).

Inoltre, $\Psi(f)\Psi(\varepsilon(f))$ esiste, poichè esiste $f\varepsilon(f)$, e si ha

$$\Psi(f)\Psi(\varepsilon(f)) = \Psi(f\varepsilon(f)) = \Psi(f);$$

e, se $\Psi(g)\Psi(\varepsilon(f))$ è definito, lo è pure, per b), $g\varepsilon(f)$, che vale allora g : e quindi, per a), $\Psi(g)\Psi(\varepsilon(f)) = \Psi(g)$; se $\Psi(\varepsilon(f))\Psi(h)$ è definito, si ha $\Psi(\varepsilon(f))\Psi(h) = \Psi(h)$: perciò $\Psi(\varepsilon(f))$ è elemento neutro destro di $\Psi(f)$. Analogamente per $\Psi(\varepsilon'(f))$.

Si osservi che Ψ è un funtore di K su $\Psi(K)$.

5. Uno spazio a struttura fibrosa (o, più semplicemente, uno spazio fibroso) è uno spazio E in cui è assegnata una relazione d'equivalenza ρ le cui classi d'equivalenza (fibre) sono fra di loro omeomorfe [4]. Lo spazio E/ρ (base) s'indicherà con B , la fibra che si proietta in un punto $x \in B$ si indicherà con F_x . Gli omeomorfismi fra le F_x costituiscono un gruppoide di BRANDT $\mathfrak{F}(F_x)$: infatti, qualunque siano x, y di B , esistono sempre omeomorfismi di F_x su F_y .

DEF. 5.1. — Sia E uno spazio a struttura fibrosa, di base B e fibre F_x ; sia $\Lambda(B) \subseteq \Pi(B)$ una categoria. Diremo *trasporto* in E un'omomorfismo (cioè un'applicazione soddisfacente alla a) del n. 4) di $\Lambda(B)$ in $\mathfrak{F}(F_x)$ tale che

$$c) \quad T((\gamma^{-1})^*) = T^{-1}(\gamma^*),$$

d) se $\overset{\circ}{\gamma}_x$ è il cappio nullo per x , $T(\overset{\circ}{\gamma}_x^*)$ è un'applicazione di F_x in sé.

Se γ è un arco, $T(\gamma^*)$ si dirà *immagine* di γ^* , o addirittura, per semplicità, immagine di γ .

TEOR. 5.1. — $T(\overset{\circ}{\gamma}_x^*)$ è la trasformazione identica di $\mathfrak{F}_x$ in sé. Per ogni $\gamma \in \Lambda(B)$, $T(\gamma^*)$ è un omeomorfismo di $F_{\gamma(0)}$ su $F_{\gamma(1)}$. T soddisfa quindi la b) del n. 4.

Infatti, $\overset{\circ}{\gamma}_x^*$ è un elemento neutro di $\Lambda(B)$, e quindi $T(\overset{\circ}{\gamma}_x^*)$ lo è per $T(\Lambda(B))$ ([6], p. 18). Inoltre, $\varepsilon T(\gamma^*) = T[\varepsilon(\gamma)^*]$ è l'applicazione identica di $F_{\gamma(0)}$ in sé, e il dominio di $T(\gamma^*)$ è quindi $F_{\gamma(0)}$; analogamente per $F_{\gamma(1)}$.

TEOR. 5.2. — L' insieme $T(\Lambda(B))$ delle immagini degli archi di B è dotato della struttura di gruppoide.

Si applichi a T il teor. 4.1, tenendo conto del teor. 5.1, e poi di c).

TEOR. 5.3 — Le immagini dei cappi per $x (x \in B)$ costituiscono un gruppo Ψ_x di trasformazioni di F_x in sé (gruppo d'olonomia).

Infatti i cappi-luogo (cioè gli archi-luogo ad estremi coincidenti) per x costituiscono un monoide associativo, ed altrettanto accade delle loro immagini. Per ognuna di queste, inoltre, v'è sempre,

in virtù di c), l'elemento inverso, appartenente al loro insieme: perciò esse formano un gruppo.

Analogamente, si prova il

TEOR. 5.4. - *L'immagine dei cappi omotopi a zero per $x(x \in B)$ è un gruppo σ_x di trasformazioni di F_x in sé (gruppo d'olonomia ristretto).*

TEOR. 5.5. - σ_x è invariante in Ψ_x ; T induce un omomorfismo di $\pi(B)$ (gruppo fondamentale di B) su Ψ_x/σ_x .

Basta ragionare come in [9] (p. 64).

TEOR. 5.6. - *Se B è connessa per archi di $\Lambda(B)$, $\forall(x, y) \in B \times B$, Ψ_x e Ψ_y , come pure σ_x e σ_y , sono simili, e quindi isomorfi.*

Sia γ un arco di estremi x, y ; si ha

$$T(\gamma^*)\Psi_x T^{-1}(\gamma^*) \subseteq \Psi_y; \quad T^{-1}(\gamma^*)\Psi_y T(\gamma^*) \subseteq \Psi_x,$$

da cui

$$\Psi_y = T(\gamma^*)\Psi_x T^{-1}(\gamma^*),$$

il che dimostra l'asserto relativamente a Ψ_x, Ψ_y . Analogamente per σ_x, σ_y .

DEF. 5.2. - *Un trasporto si dirà olonomo se, per ogni $\gamma \in \Lambda(B)$, $T(\gamma^*)$ dipende solo dagli estremi di γ . Un trasporto si dirà localmente olonomo se, per ogni coppia γ, δ di archi (di B) omotopi, si ha $T(\gamma^*) = T(\delta^*)$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché un trasporto sia olonomo (rispettivamente, localmente olonomo) è che Ψ_x (o, rispettivamente, σ_x) consista della sola trasformazione identica di F_x in sé ($\forall x \in B$).

TEOR. 5.7. - *Se B è una varietà topologica, e se esiste un ricoprimento $\{U_i\}$ di B tale che $T_{\Lambda(U_i)}$ sia un trasporto olonomo ($\forall U_i$), allora T è localmente olonomo ($\Lambda(U_i)$ è la categoria degli archi-luogo $\Lambda(B)$ contenuti in U_i).*

Basta ricorrere, come in [9] (cfr. p. 115), al lemma di fattorizzazione (ibid., p. 51).

Può essere opportuno restringere la nozione di trasporto con opportune ipotesi di continuità: a tale scopo introduciamo la seguente

DEF. 5.3. - *Diremo arco parziale γ_u ($\forall u \in I$) d'un arco $\gamma(t)$ l'arco definito dall'applicazione*

$$\gamma_u(t) \equiv \gamma(ut).$$

Sia poi γ un arco avente primo estremo in un punto $x \in B$:

diremo *traiettoria di un punto* $a \in F_x$ *secondo* γ *l'insieme*

$$T(\gamma_u^*)a \quad (\text{al variare di } u \text{ in } I).$$

DEF. 5.4. — Diremo che un trasporto T è *regolare* quando soddisfa alla

e) *Le traiettorie di due punti di* $F_x (\forall x \in B)$ *secondo due archi omotopi di* B *sono due archi omotopi di* E .

6. Sia F uno spazio, ed R un'altro spazio ad esso localmente omeomorfo — ad esempio, F sia una varietà topologica V_n , ed R lo spazio numerico R_n —: in R sia dato un pseudogruppo Γ . Un *riferimento mobile associato a* Γ è l'opposto d'un atlante completo di R su F compatibile rispetto a Γ .

DEF. 6.1. — Diremo *trasporto a pseudogruppo fondamentale* Γ un trasporto in uno spazio fibroso E tale che:

f) in uno spazio R , localmente omeomorfo alle fibre F_x , esiste un pseudogruppo Γ ;

g) in ciascuna F_x è dato un riferimento mobile $\mathcal{R}_x$ associato a Γ ;

h) esiste un punto $a \in B$ tale che, per ogni $x \in B$ e per ogni arco γ da a ad x , $\mathcal{R}_a^{-1}$ e $T^{-1}(\gamma^*; \mathcal{R}_x^{-1})$ siano compatibili rispetto a Γ : vale a dire, per ogni $f_a \in \mathcal{R}_a$, $f_x \in \mathcal{R}_x$,

$$f_x T(\gamma^*) f_a^{-1} \in \Gamma$$

allorchè tale pseudoprodotto è definito; o anche, in base alla definizione di pseudoprodotto d'atlanti

$$(3) \quad \mathcal{R}_x T(\gamma^*) \mathcal{R}_a^{-1} \subseteq \Gamma.$$

Nella def. 6.1, alla (3) — e quindi ad h) — si può sostituire una condizione esprimibile più semplicemente (qui si è preferito usare la h), per l'analogia formale che essa presenta con la h'), che interverrà nella def. 7.1). Invece di h), possiamo usare l'equivalente

h_c) Esiste un punto $a \in B$ tale che, per ogni $x \in B$ e per ogni arco γ di estremi (a, x) sia

$$(4) \quad \mathcal{R}_x = \mathcal{R}_a T^{-1}(\gamma^*)$$

Sussiste infatti il

TEOR. 6.1. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè valga la h) è che* $\mathcal{R}_a$ *ed* $\mathcal{R}_x$ *siano trasformati l'uno nell'altro per effetto dell'immagine d'un qualsiasi arco di estremi* (a, x) , *cioè che valga la* (4).

La condizione è ovviamente sufficiente. Per dimostrarne la necessarietà, basta osservare che $\mathfrak{R}_x^{-1}$ ed $T(\gamma^*)\mathfrak{R}_a^{-1}$ sono atlanti completi di R su F_x , compatibili con Γ [4], e quindi coincidono.

TEOR. 6.2. - *La scelta del punto a è inessenziale, cioè, per ogni $b \in B$, e per ogni arco δ di estremi (b, x) , si ha $\mathfrak{R}_x T(\delta^*)\mathfrak{R}_b^{-1} \subseteq \Gamma$, ed $\mathfrak{R}_x = \mathfrak{R}_b T^{-1}(\delta^*)$.*

Sia infatti γ un arco di estremi (a, b) ; in virtù di h_0 , si ha

$$\mathfrak{R}_x = \mathfrak{R}_a T^{-1}((\delta\gamma)^*) = \mathfrak{R}_a T^{-1}(\gamma^*)T^{-1}(\delta^*) = \mathfrak{R}_b T^{-1}(\delta^*),$$

vale cioè la h_0 , in relazione al punto b ed all'arco δ .

COR. - *Per ogni arco γ di estremi (x, y) , si ha*

$$\mathfrak{R}_y = \mathfrak{R}_x T^{-1}(\gamma^*).$$

TEOR. 6.3. - *Lo pseudogruppo $\tilde{\Psi}_x$ dedotto dal gruppo d'omologia Ψ_x (*) è contenuto nello pseudogruppo generato (v. n. 2) da Γ e da $\mathfrak{R}_x^{-1}$*

$$\tilde{\Psi}_x \subseteq \Theta(\Gamma, \mathfrak{R}_x^{-1}).$$

Sia x un punto di B , e γ un coppia qualsiasi per x . Preso un $y \in \gamma$, siano γ_1, γ_2 due archi di estremi (x, y) , (y, x) rispettivamente il cui prodotto sia γ . Per ogni $z \in F_x$, consideriamo le seguenti carte:

$h \in \mathfrak{R}_x$, tale che $z \in U_h$; $l \in \mathfrak{R}_y$ tale che $T(\gamma_1^*)z \in U_l$; $m \in \mathfrak{R}_x$ tale che $T(\gamma^*)z \in U_m$.

Indichiamo con f, k, g le restrizioni di h, l, m ad: $U_h \cap T^{-1}(\gamma_1^*)U_l \cap T^{-1}(\gamma^*)U_m$; $T(\gamma_1^*)U_h \cap U_l \cap T^{-1}(\gamma_2^*)U_m$; $T(\gamma^*)U_h \cap T(\gamma_2^*)U_l \cap U_m$ rispettivamente. Tali insiemi non sono vuoti, poichè contengono z , $T(\gamma_1^*)z$, $T(\gamma^*)z$ rispettivamente, e sono aperti, perchè le T sono omeomorfismi. Quindi, per la completezza degli atlanti $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y$, $f \in \mathfrak{R}_x \ni g, k \in \mathfrak{R}_y$. Sia poi $T_1 = T(\gamma_1^*)U_f$, $T_2 = T(\gamma_2^*)U_k$. Si ha

$$T(\gamma_1^*)U_f = U_k, \quad T(\gamma_2^*)U_k = U_g.$$

e, tenendo conto della def. 6.1,

$$g \circ T_2 \circ T_1 \circ f^{-1} = (g \circ T_2 \circ k^{-1}) \circ (k \circ T_1 \circ f^{-1}) \in \Gamma.$$

Quindi esiste una $t \in \Gamma$ per cui

$$T_2 \circ T_1 = g^{-1} \circ t \circ f.$$

(3) Dato un gruppo G di omeomorfismi d'uno spazio E in sé, si dice *pseudogruppo dedotto da G* [4, 7] l'insieme delle applicazioni d'un aperto $U \subseteq E$ in un aperto $U' \subseteq E$, tali che, per ogni $x \in U$, esista un aperto U_x con $x \in U_x \subseteq U$ in modo che la restrizione di f ad U_x coincida con la restrizione (ad U_x) d'un omeomorfismo di G .

Il dominio di $T(\gamma^*) = T(\gamma_2^*) \circ T(\gamma_1^*)$ si può decomporre in aperti tali che la restrizione di $T(\gamma^*)$ a ciascuno di essi faccia parte di $\Theta(\Gamma, \mathcal{R}_x)$; da qui segue l'asserto.

TEOR. 6.4. - *Per un trasporto, su uno spazio la cui base sia connessa per archi di $\Lambda(B)$, a pseudogruppo fondamentale, si può assumere come tale lo pseudogruppo generato (v. n. 2) dallo pseudogruppo $\tilde{\Psi}_a$, dedotto dal gruppo d'olonomia, e da $\mathcal{R}_a$:*

$$\Gamma = \Theta(\tilde{\Psi}_a, \mathcal{R}_a).$$

Infatti Γ deve essere tale da contenere, per ogni arco $\xi \in \Lambda(B)$ di estremi (a, x) , $\mathcal{R}_x T(\xi^*) \mathcal{R}_a^{-1}$; ma, per h_0

$$\mathcal{R}_x T(\xi^*) \mathcal{R}_a^{-1} = \mathcal{R}_a T^{-1}(\gamma^*) T(\xi^*) \mathcal{R}_a^{-1} = \mathcal{R}_a T((\gamma^{-1}\xi)^*) \mathcal{R}_a^{-1}.$$

$T((\gamma^{-1}\xi)^*)$ descrive, al variare di γ e ξ , Ψ_a , e quindi l'atlante che figura nelle uguaglianze precedenti è contenuto in $\Theta(\tilde{\Psi}_a, \mathcal{R}_a)$: questo si può dunque assumere come pseudogruppo fondamentale.

OSSERVAZIONE. - Sia Γ_0 lo pseudogruppo degli omeomorfismi locali di R . Un « trasporto » (nel senso del n. 5) si può sempre considerare come un « trasporto a pseudogruppo fondamentale Γ_0 » (senza escludere, ovviamente, che come pseudogruppo fondamentale se ne possa scegliere uno subordinato a Γ_0).

7. In questo numero consideriamo dei trasporti dotati d'una struttura che si può considerare come una naturale estensione delle ordinarie connessioni, e perciò si diranno « connessioni a gruppo fondamentale ».

DEF. 7.1. - Diremo *connessione a gruppo fondamentale* G un trasporto in uno spazio a struttura fibrosa E tale che:

f) in uno spazio R , omeomorfo alle fibre F_x , esiste un gruppo G di trasformazioni;

g') in ciascuna F_x è dato un riferimento, cioè un'omeomorfismo H_x di F_x su R : sia $R_x = GH_x$ l'insieme dei riferimenti (associati a G);

h) esiste un punto $a \in B$ tale che, per ogni $x \in B$ e per ogni arco γ di estremi (a, x) , sia

$$R_x T(\gamma^*) R_a^{-1} \in G.$$

L'ultima relazione equivale manifestamente alla seguente

$$(5) \quad H_x \circ T(\gamma^*) \circ H_a^{-1} \in G.$$

Nonostante l'analogia formale con i « trasporti a pseudogruppo fondamentale », vi sono delle proprietà che valgono per un tipo e non per l'altro.

TEOR. 7.1. — *La scelta del punto a è inessenziale, vale a dire, per ogni $b \in B$ e per ogni arco δ di estremi (b, x) si ha*

$$R_x T(\delta^*) R_b^{-1} \in G.$$

Infatti, detto γ un arco da a a b , si ha

$$\begin{aligned} H_x \circ T(\delta^*) \circ H_b^{-1} &= H_x \circ T((\xi\gamma)^*) \circ H_a^{-1} \circ H_a \circ T^{-1}(\gamma^*) \circ H_b^{-1} \in G \circ G = \\ &= G \quad (\text{c. v. d.}) \end{aligned}$$

TEOR. 7.2. — *Il gruppo d'olonomia Ψ_x è contenuto nel gruppo trasformato di G mediante H_x : $\Psi_x \subseteq H_x^{-1} \circ G \circ H_x$.*

Se γ è un cappio per x , da (5) si ha infatti

$$T(\gamma^*) \in H_x^{-1} \circ G \circ H_x.$$

TEOR. 7.3. — *Se esiste un $a \in B$ tale che $B - \{a\}$ sia ripartibile in archi $\gamma \in \Lambda(B)$ uscenti da a , si può, assumendo opportunamente gli H_x , far sì che il gruppo fondamentale sia il trasformato d'un (qualsiasi) gruppo d'olonomia.*

Per ogni $x \in B$, sia γ_x l'arco parziale dell'arco γ passante per x , avente per estremi (a, x) . Scelto ad arbitrio H_a , poniamo $H_x = H_a \circ T^{-1}(\gamma_x^*)$. Se ξ è un arco di estremi (x, y) si ha

$$T^{-1}(\gamma_y^*) \circ T(\delta^*) \circ T(\gamma_x^*) \in \Psi_a,$$

da cui

$$H_a \circ T^{-1}(\gamma_y^*) \circ T(\delta^*) \circ T(\gamma_x^*) \circ H_a^{-1} \in H_a \circ \Psi_x \circ H_a^{-1},$$

e, per la scelta di H_x ,

$$H_y \circ T(\delta^*) \circ H_x^{-1} \in H_a \circ \Psi_a \circ H_a^{-1}.$$

Ora, l'applicazione $H_y \circ T(\delta^*) \circ H_x^{-1}$ è quella che, per definizione, dev'essere contenuta in G ; l'asserto è così dimostrato.

OSSERVAZIONE. — Sia G_0 il gruppo degli omeomorfismi di R in sè. Un « trasporto » (nel senso del n. 5) si può sempre considerare come una « connessione a gruppo fondamentale G_0 », nel senso

che, fissato un qualsiasi spazio R omeomorfo alle F_x , e scelti a arbitrio i riferimenti H_x , la (5) è verificata. Non si esclude, ovviamente, che come gruppo fondamentale se ne possa assumere uno più ristretto.

Le connessioni lineari su una V_n differenziabile [9] rientrano in queste: esse si hanno per $B = V_n$, $F_x = T_x(V_n)$, $R = R_n$, $G = GL(n, R)$, ed assumendo come $\Lambda(B)$ la categoria degli archi differenziabili a tratti. Analogamente per quanto riguarda le connessioni affini, euclidee, ecc..

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. CARTAN, *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés*, « Acta Math. », T. 48, p. 1 (1926).
- [2] E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile* (red. par J. LERAY), Gauthier-Villars, Paris 1951.
- [3] C. EHRESMANN, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Coll. Top. Bruxelles, 1950, p. 29.
- [4] C. EHRESMANN, *Structures locales*, « Ann. di Mat. », S. IV, v. 36, p. 133 (1954).
- [5] C. EHRESMANN, *Gattungen von lokalen strukturen*, « Jahres. der. Deutsch. Math. Verein », v. 60, p. 49 (1958).
- [6] C. EHRESMANN, *Catégories et structures*, Dunod, Paris 1965.
- [7] P. LIBERMANN, *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales*, « Ann. di Mat. », S. IV, v. 36, p. 27 (1954).
- [8] A. LICHNEROWICZ, *Groupes d'holonomie*, « Proc. Int. Congr. Math. Amsterdam », 1954.
- [9] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Roma 1955.