

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GAETANO RODRIQUEZ

## Sul problema dei divisori di Titchmarsh.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 20*  
(1965), n.3, p. 358–366.

Zanichelli

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1965\\_3\\_20\\_3\\_358\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_3_358_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## Sul problema dei divisori di Titchmarsh

GAETANO RODRIQUEZ (Milano) (\*)

**Santo.** - *Si dimostra una espressione asintotica del numero di soluzioni in interi  $x, y$  dell'equazione  $xy + l = p$ , e si formula una congettura sull'esistenza di una espressione asintotica più precisa.*

**Summary.** - *The paper contains a new very short proof of the formula that gives the asymptotic evaluation of the number of solutions of the equation  $xy + l = p$  in integers  $x, y$ . A conjecture concerning an improved evaluation of such number is also formulated.*

**1. Introduzione. Risultati.** Nel 1930 TITCHMARSH propose il problema di trovare una espressione asintotica del numero  $N$  di soluzioni in interi dell'equazione:

$$(1) \quad xy + l = p,$$

dove  $p$  è un numero primo e  $l$  è un intero, per tutti i primi  $p$  che non superino un intero  $z$  e per  $z \rightarrow +\infty$ . Per tale numero  $N$ , che evidentemente è uguale a  $\sum_{p \leq z} d(p - l)$ , egli, assumendo l'ipotesi estesa di RIEMANN, congetturò [1] la seguente espressione asintotica:

$$(2) \quad \sum_{p \leq z} d(p - l) = E(l) \cdot z + Bz \frac{\log \log z}{\log z},$$

dove  $E(l)$  è una data funzione di  $l$  e  $B$  indica qui e nel seguito una costante non nulla, non necessariamente la stessa nei vari casi.

La (2) è stata dimostrata poi da JU. V. LINNIK [2], ma la dimostrazione è assai laboriosa e lunga.

Scopo di questo lavoro è di trovare una nuova dimostrazione piuttosto semplice del risultato di LINNIK, seguendo le linee della dimostrazione che TITCHMARSH aveva dato assumendo l'ipotesi estesa di RIEMANN.

È stato possibile evitare l'introduzione di questa ipotesi facendo

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo n. 40 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

uso di un nuovo risultato sul crivello largo di LINNIK, conseguito da E. BOMBIERI in [3], teorema 5A.

Vi sono altri problemi analoghi che riteniamo possano essere risolti adattando opportunamente il procedimento seguito in questa nota. Noi ci occuperemo solamente delle soluzioni della (1) e dimostreremo il seguente

**TEOREMA.** - *Se  $N$  è il numero delle soluzioni della (1) per tutti i  $p \leq z$ , posto:*

$$(3) \quad T_l(s) = \prod_{p|l} (1 - p^{-s-1}) \prod_{p \nmid l} \{1 + p^{-s-1}(p-1)^{-1}\},$$

si ha:

$$N = T_l(0) \cdot z + O\left(z \frac{\log \log z}{\log^4 z}\right)$$

uniformemente rispetto a  $l$ , purchè sia:

$$0 < |l| < B \frac{\sqrt{z}}{\log^3 z}.$$

Inoltre, per  $l$  fissato formuleremo una congettura sul numero di soluzioni della (1) che risulterebbe espressa dalla seguente formula asintotica più precisa:

$$N = T_l(0) \cdot z + 2[\gamma T_l(0) + T_l'(0)]Li(z) + O\left(\frac{z}{\log^A z}\right),$$

dove  $\gamma$  è la costante di EULERO e  $A$  è una costante fissata a piacere.

**2.** Premettiamo i seguenti due Lemmi che ci consentiranno poi di dimostrare il teorema enunciato al numero precedente.

**LEMMA 1.** - *Se  $\varphi(n)$  è la funzione di Eulero, allora si ha uniformemente rispetto a  $l$ :*

$$(4) \quad \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, l) = 1}} \frac{1}{\varphi(n)} = T_l(0)(\log X + \gamma) + T_l'(0) + O\left(\sigma(l) \frac{\log^3 X}{X}\right),$$

dove  $\sigma(l)$  rappresenta, come d'uso, la somma dei divisori di  $l$ .

**LEMMA 2.** - *Si ha uniformemente rispetto a  $l$ :*

$$(5) \quad \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, l) = 1}} \frac{n}{\varphi(n)} = T_l(0) \cdot X + O(\sigma(l) \log^3 X).$$

Le (4) e (5), come risulterà dalla dimostrazione, valgono per ogni  $l$  intero relativo non nullo.

Dimostriamo il lemma 1. Poichè  $\varphi(n)$  è moltiplicativa, posto:

$$\Phi_l(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,l)=1}}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} n^{-s},$$

si ha:

$$\begin{aligned} (6) \quad \Phi_l(s) &= \prod_{p \nmid l} \left\{ 1 + \frac{1}{\varphi(p)p^s} + \frac{1}{\varphi(p^2)p^{2s}} + \dots \right\} = \\ &= \prod_{p \nmid l} \left\{ 1 + \frac{1}{(p-1)p^s} + \frac{1}{(p-1)p^{2s}} + \dots \right\} = \prod_{p \nmid l} \left\{ 1 + \frac{p}{(p-1)(p^{s+1}-1)} \right\} = \\ &= \zeta(s+1) \prod_{p|l} (1-p^{-s-1}) \prod_{p \nmid l} \{ 1 + p^{-s-1}(p-1)^{-1} \} = \zeta(s+1) T_l(s). \end{aligned}$$

La funzione  $\Phi_l(s)$  della variabile complessa  $s$  è evidentemente olomorfa per  $\operatorname{Re} s > -1$ , tranne per  $s=0$ , dove ha un polo del 1° ordine. Inoltre, posto:

$$T_l(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(l)}{n^s},$$

la serie al 2° membro converge assolutamente per  $\operatorname{Re} s > -1$  e si avrà per la (6):

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,l)=1}}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} n^{-s} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(l)}{n^s} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/n}{n^s} \right);$$

quindi, ricordando la formula del prodotto di due serie di DIRICHLET:

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,l)=1}} \frac{1}{\varphi(n)} = \sum_{n \leq X} \frac{P_n(l)}{n} \cdot \sum_{n \leq X/n} \frac{1}{h}.$$

Poichè:

$$\sum_{n \leq X/n} \frac{1}{h} = \log \frac{X}{n} + \gamma + O\left(\frac{n}{X}\right),$$

si ricava:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,l)=1}} \frac{1}{\varphi(n)} &= \sum_{n \leq X} \frac{P_n(l)}{n} \left( \log \frac{X}{n} + \gamma + O\left(\frac{n}{X}\right) \right) = \\ &= (\log X + \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(l)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(l)}{n} \log n - \gamma \sum_{n > X} \frac{P_n(l)}{n} + \\ &+ \sum_{n > X} \frac{P_n(l)}{n} \log \frac{n}{X} + \frac{1}{X} O\left( \sum_{n \leq X} n |P_n(l)| \right). \end{aligned}$$

Si ha poi la relazione:

$$\prod_{p \nmid l} \{1 + p^{-s-1}(p-1)^{-1}\} = \sum_{(n, l)=1} a_n n^{-s},$$

dove

$$a_n = \begin{cases} \prod_{i=1}^r \frac{1}{p_i(p_i-1)}, & \text{se } n = \prod_{i=1}^r p_i, \text{ con } p_i \neq p_j \text{ per } i \neq j \\ 0, & \text{se } n \text{ ha fattori quadrati,} \end{cases}$$

e inoltre è:

$$\prod_{p \nmid l} (1 - p^{-s-1}) = \sum_{n \nmid l} \frac{\mu(n)}{n} n^{-s}.$$

Si ha allora:

$$T_i(s) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(l) n^{-s} = \left( \sum_{n \nmid l} \frac{\mu(n)}{n} n^{-s} \right) \left( \sum_{(n, l)=1} a_n n^{-s} \right),$$

da cui:

$$P_n(l) = \sum_{\substack{d \nmid l, d \nmid n \\ (n/d, l)=1}} \frac{\mu(d)}{d} a_{n/d},$$

e quindi:

$$|P_n(l)| \leq \sum_{\substack{d \nmid l, d \nmid n \\ (n/d, l)=1}} \frac{|\mu(d)|}{d} a_{n/d} \leq \sum_{d \nmid l, d \nmid n} \frac{1}{d} a_{n/d}.$$

Se  $n/d = \prod_{i=1}^r p_i$ , si ha:

$$a_{n/d} = \prod_{i=1}^r \frac{1}{p_i(p_i-1)} = \prod_{i=1}^r \frac{1}{p_i} \prod_{i=1}^r \frac{1}{p_i-1} = \frac{d}{n} \frac{1}{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)},$$

donde:

$$|P_n(l)| \leq \frac{1}{n} \sum_{d \nmid l, d \nmid n} \frac{1}{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)}.$$

Intanto è <sup>(1)</sup>:

$$\varphi\left(\frac{n}{d}\right) > B \frac{n/d}{\log \log n} > B \frac{n}{d \log n}.$$

Si ha allora:

$$|P_n(l)| < \frac{1}{n} \sum_{d \nmid l, d \nmid n} B \left( \frac{n}{d \log n} \right)^{-1} = B \frac{\log n}{n^2} \sum_{d \nmid l, d \nmid n} d < B \sigma(l) \frac{\log n}{n^2},$$

<sup>(1)</sup> Si veda [1], 24.

e quindi è uniformemente rispetto a  $l$ :

$$\sum_{n>X} |P_n(l)| < B\sigma(l) \sum_{n>X} \frac{\log n}{n^2} = O\left(\sigma(l) \frac{\log X}{X}\right).$$

Si ha poi uniformemente rispetto a  $l$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} n |P_n(l)| &= O\left(\sigma(l) \sum_{n \leq X} \frac{\log n}{n}\right) = O(\sigma(l) \log^2 X), \\ \sum_{n>X} |P_n(l)| \log \frac{n}{X} &< B\sigma(l) \sum_{n>X} \frac{\log^2 n}{n^2} = O\left(\sigma(l) \frac{\log^2 X}{X}\right). \end{aligned}$$

Quindi:

$$(7) \quad \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, l)=1}} \frac{1}{\varphi(n)} = (\log X + \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} P_n(l) - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(l) \log n + O\left(\sigma(l) \frac{\log^2 X}{X}\right).$$

Ponendo nella (3)  $s = 0$  si ricava:

$$\begin{aligned} (8) \quad T_l(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(l) = \prod_{p|l} \frac{1 - p^{-1}}{1 + p^{-1}(p-1)^{-1}} \prod_p (1 + p^{-1}(p-1)^{-1}) = \\ &= \prod_{p|l} \frac{(p-1)^2}{p^2 - p + 1} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) = \frac{315 \cdot \zeta(3)}{2\pi^4} \prod_{p|l} \frac{(p-1)^2}{p^2 - p + 1}, \end{aligned}$$

e derivando rispetto a  $s$ :

$$(9) \quad T'_l(0) = - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(l) \log n = T_l(0) \left\{ \sum_{p|l} \frac{\log p}{p-1} + \sum_{p|l} \frac{\log p}{p^2 - p + 1} - \sum_{p|l} \frac{\log p}{p^2 - p + 1} \right\}.$$

Si deduce allora dalla (7) il Lemma 1, dove  $T_l(0)$  e  $T'_l(0)$  sono date rispettivamente dalle (8) e (9).

In modo del tutto analogo si dimostra poi il Lemma 2.

Inoltre si verifica facilmente che, per

$$|l| \leq B \frac{X}{\log^3 X},$$

i resti che figurano nelle (4) e (5) non superano i termini principali.

**3.** Sia  $n, m$  una soluzione di (1). Allora si ha <sup>(2)</sup>:

$$N = \sum_{p \leq s} d(p-l) = \sum_{\substack{n \leq s-l \\ (n, l)=1}} \sum_{\substack{m \leq s-l \\ n+m+l=p \leq s}} 1 =$$

<sup>(2)</sup> Si veda [1], 415.

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z-l} \\ (n, l)=1}} \sum_{\substack{m \leq z-l \\ n \cdot m + l = p \leq z}} 1 - \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z-l} \\ (n, l)=1}} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{z-l} \\ n \cdot m + l = p \leq z}} 1 = \\
&= 2 \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z-l} \\ (n, l)=1}} \Pi(z; n, l) - \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z-l} \\ (n, l)=1}} \Pi(n \sqrt{z-l} + l; n, l).
\end{aligned}$$

Sostituiamo nel 1° termine della precedente differenza il valore asintotico che ci si aspetta e teniamo presente il teorema 2.1 di [4] <sup>(2)</sup>; si ricava:

$$\begin{aligned}
(10) \quad N &= 2 Li(z) \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z-l} \\ (n, l)=1}} \frac{1}{\varphi(n)} + O \left( \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \left| \Pi(z; n, l) - \frac{Li(z)}{\varphi(n)} \right| \right) + \\
&\quad + O \left( \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \frac{n \sqrt{z}}{\varphi(n) \log(n \sqrt{z})} \right).
\end{aligned}$$

Poichè, come è facile verificare, si ha:

$$T_l(0) = O(1), \quad T'_l(0) = O(\log \log l),$$

e

$$\sigma(l) \frac{\log^3 z}{\sqrt{z}} = O(1) \quad \text{per} \quad |l| \leq B \frac{\sqrt{z}}{\log^3 z},$$

per il Lemma 1 il 1° termine della (10) si scrive:

$$(11) \quad T_l(0) \cdot z + O \left( z \frac{\log \log z}{\log z} \right),$$

uniformemente per  $|l| \leq B \frac{\sqrt{z}}{\log^3 z}$ , mentre il 2° termine si può spezzare nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
O \left( \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \left| \Pi(z; n, l) - \frac{Li(z)}{\varphi(n)} \right| \right) &= O \left( \sum_{\substack{n \leq y \\ (n, l)=1}} \left| \Pi(z; n, l) - \frac{Li(z)}{\varphi(n)} \right| \right) + \\
&\quad + O \left( \sum_{\substack{Y < n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \left| \Pi(z; n, l) - \frac{Li(z)}{\varphi(n)} \right| \right),
\end{aligned}$$

dove

$$Y = \frac{\sqrt{z}}{(\log z)^{3A+22}}, \quad \text{con } A > 0.$$

<sup>(2)</sup> (3) Si veda [4], 147.

Per un risultato di E. BOMBIERI (\*) è:

$$(12) \quad \sum_{\substack{n \leq Y \\ (n, l)=1}} \left| \Pi(z; n, l) - \frac{Li(z)}{\varphi(n)} \right| = O\left(\frac{z}{\log^A z}\right),$$

e per il teorema 2.1 di [4] e il Lemma 1 si ha poi:

$$(13) \quad \sum_{\substack{Y < n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \left| \Pi(z; n, l) - \frac{Li(z)}{\varphi(n)} \right| = O\left(\sum_{\substack{Y < n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \frac{z}{\varphi(n) \log z}\right) = \\ = O\left(\frac{z}{\log z} \sum_{Y < n \leq \sqrt{z}} \frac{1}{\varphi(n)}\right) = O\left(z \frac{\log \log z}{\log z}\right).$$

Per il Lemma 2 si ha infine:

$$(14) \quad \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \frac{n \sqrt{z}}{\varphi(n) \log(n \sqrt{z})} = O\left[\frac{\sqrt{z}}{\log z} \left(\sum_{\substack{n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \frac{z}{\varphi(n) \log z}\right)\right] = \\ = O\left[\frac{\sqrt{z}}{\log z} \left(\sum_{n \leq \sqrt{z}} \frac{n}{\varphi(n)}\right)\right] = O\left(\frac{z}{\log z}\right).$$

Allora, tenendo conto delle (11), (12), (13), (14), si conclude che è:

$$N = T_l(0) \cdot z + O\left(z \frac{\log \log z}{\log z}\right),$$

uniformemente per  $|l| \leq B \sqrt{z}/\log^3 z$ .

4. Abbiamo visto al numero precedente che:

$$N = 2 \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z-l} \\ (n, l)=1}} \Pi(z; n, l) - \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z-l} \\ (n, l)=1}} \Pi(n \sqrt{z-l} + l; n, l).$$

Supponiamo ora  $l$  fissato a piacere e poniamo  $Li(z)/\varphi(n)$  e  $Li(n \sqrt{z-l})/\varphi(n)$  rispettivamente al posto di  $\Pi(z; n, l)$  e  $\Pi(n \sqrt{z-l} + l; n, l)$ . Con tale sostituzione introduciamo naturalmente degli errori, il cui contributo per tutti gli  $n \leq \sqrt{z}/\log^C z$ , per il teorema 5A di [3], è  $O(z/\log^A z)$ , dove  $A$  è una costante fissata comunque grande e  $C = 3A + 22$ . Facciamo l'ipotesi che il contributo di tutti gli errori introdotti per  $\sqrt{z}/\log^C z < n \leq \sqrt{z}$  sia ancora  $O(z/\log^A z)$ .

(\*) Si veda [3], 14.



Si ha allora:

$$N = 2Li(z) \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \frac{1}{\varphi(n)} - \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \frac{Li(n\sqrt{z})}{\varphi(n)} + O\left(\frac{z}{\log^A z}\right).$$

Dai Lemmi 1 e 2 si deduce per  $l$  fissato:

$$(15) \quad \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, l)=1}} \frac{1}{\varphi(n)} T_l(0)(\log X + \gamma) + T_l'(0) + O(X^{-1+\varepsilon}),$$

$$(16) \quad \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, l)=1}} \frac{n}{\varphi(n)} = T_l(0) \cdot X + O(X^\varepsilon),$$

con  $\varepsilon > 0$ .

Quindi per la (15) è:

$$\begin{aligned} 2Li(z) \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \frac{1}{\varphi(n)} &= 2Li(z) \left\{ T_l(0) \left( \frac{1}{2} \log z + \gamma \right) + T_l'(0) + O(z^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}) \right\} = \\ &= Li(z) \{ T_l(0)(\log z + 2\gamma) + 2T_l'(0) \} + O\left(\frac{z^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\log z}\right). \end{aligned}$$

Si ha inoltre:

$$\frac{Li(n\sqrt{z})}{\varphi(n)} = \frac{n\sqrt{z}}{\varphi(n)\log(n\sqrt{z})} + \dots + \frac{M! n\sqrt{z}}{\varphi(n)\log^{M+1}(n\sqrt{z})} + O\left(\frac{n\sqrt{z}}{\log^{M+2}(n\sqrt{z})}\right)$$

donde:

$$\begin{aligned} (17) \quad \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \frac{Li(n\sqrt{z})}{\varphi(n)} &= \\ &= \sum_{m=0}^M m! \sqrt{z} \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \frac{n}{\varphi(n) \log^{m+1}(n\sqrt{z})} + O\left(\frac{z}{\log^{M+2} z}\right). \end{aligned}$$

Applicando la sommazione parziale al secondo membro della (17), e usando la (16) si ricava:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z} \\ (n, l)=1}} \frac{n}{\varphi(n) \log^{m+1}(n\sqrt{z})} &= \\ &= \sum_{n \leq \sqrt{z}} \left\{ \sum_{\substack{h \leq n \\ (h, l)=1}} \frac{h}{\varphi(h)} \right\} \left\{ \frac{m+1}{n \log^{m+2}(n\sqrt{z})} + O\left(\frac{1}{n^2 \log^{m+2}(n\sqrt{z})}\right) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\log^{m+1} z} \left\{ \sum_{\substack{h \leq \sqrt{z} \\ (h, l) = 1}} \frac{h}{\varphi(h)} \right\} = \\
& = (m+1)T_l(0) \left\{ \sum_{n \leq \sqrt{z}} \frac{1}{\log^{m+1} (n \sqrt{z})} \right\} + \frac{\sqrt{z} T_l(0)}{\log^{m+1} z} + O(z^\epsilon) = \\
& = \frac{\sqrt{z} T_l(0)}{\log^{m+1} z} + (m+1)T_l(0) \int_2^{\sqrt{z}} \frac{dt}{\log^{m+2} (t \sqrt{z})} + O(z^\epsilon) = \\
& = \frac{\sqrt{z} T_l(0)}{\log^{m+1} z} + \frac{T_l(0)}{m! \sqrt{z}} \sum_{k=m+2}^{M+1} \frac{(k-1)! z}{\log^k z} + O\left(\frac{\sqrt{z}}{\log^{M+1} z}\right).
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^M m! \sqrt{z} \sum_{\substack{n \leq \sqrt{z} \\ (n, l) = 1}} \frac{n}{\varphi(n) \log^{m+1} (n \sqrt{z})} = \\
& = T_l(0) \sum_{m=0}^M \sum_{k=1}^{M-m+1} \frac{(m+k-1)! z}{\log^{m+k} z} + O\left(\frac{z}{\log^{M+2} z}\right) = \\
& = T_l(0) \sum_{m=0}^M \frac{(m+1)! z}{\log^{m+1} z} + O\left(\frac{z}{\log^{M+2} z}\right) = \\
& = T_l(0) |\log z \cdot Li(z) - z| + O\left(\frac{z}{\log^{M+2} z}\right).
\end{aligned}$$

Pertanto si ottiene:

$$\begin{aligned}
N &= Li(z) \cdot |T_l(0)(\log z + 2\gamma) + 2T_l'(0)| - \\
&- T_l(0) |\log z \cdot Li(z) - z| + O\left(\frac{z}{\log^4 z}\right) = \\
&= T_l(0) \cdot z + 2[\gamma T_l(0) + T_l'(0)] Li(z) + O\left(\frac{z}{\log^4 z}\right).
\end{aligned}$$

Rimane così giustificata la congettura formulata al n. 1.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] E. C. TITCHMARSH, *A divisor problem*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 54 (1930), 414-429.
- [2] JU. V. LINNIK, *The dispersion method in binary additive problems*, «Amer. Math. Soc., Trans. Math. Monographs» (1963).
- [3] E. BOMBIERI, *On the large sieve*, Tamburini Editore, Milano (1965).
- [4] K. PRACHAR, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Berlin (1957).

*Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I.  
il 23 agosto 1965.*