
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANGELO CAVALLUCCI

**Su un questione di invarianza di polinomi
ugualmente forti a prodotti di polinomi
quasiellittici.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 20
(1965), n.3, p. 351–357.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_3_351_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_3_351_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Su una questione di invarianza di polinomi ugualmente forti a prodotti di polinomi quasiellittici

ANGELO CAVALLUCCI (Bologna)

Sunto. - Si determina una classe di trasformazioni lineari invertibili di R^n in sè che mutano un polinomio esprimibile come prodotto di polinomi quasi-ellittici in uno ugualmente forte.

1. - *Richiami.* Sia R^n lo spazio reale euclideo n -dimensionale ($n \geq 2$) delle n -ple di numeri reali $x = (x_1, \dots, x_n)$. Con $\alpha, \beta, \dots$ indichiamo elementi di R^n con coordinate intere non negative e facciamo le seguenti convenzioni

$$x_\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Se $P(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ è un polinomio nelle variabili $x_1, \dots, x_n$, a coefficienti complessi, poniamo

$$P_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_{\alpha} x^{\alpha}, \quad P^{(z)}(x) = i^{|z|} D^z P(x),$$

$$\tilde{P}(x) = \left(\sum_{\alpha} |P^{(z)}(x)|^2 \right)^{1/2}, \quad P(D) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha}.$$

Ricordiamo le seguenti definizioni (vedi [3]) che utilizzeremo in seguito.

DEFINIZIONE I. - Se $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi tali che

$$(1) \quad \sup_{x \in R^n} \frac{\tilde{Q}(x)}{\tilde{P}(x)} < \infty,$$

diciamo che $P(x)$ è più forte di $Q(x)$. Se $P(x)$ è più forte di $Q(x)$ e $Q(x)$ è più forte di $P(x)$, diciamo che $P(x)$ e $Q(x)$ sono ugualmente forti.

DEFINIZIONE II. - Il polinomio $P(x)$ (l'operatore $P(D)$) si dice ipoellittico se ogni distribuzione in R^n , soluzione dell'equazione $P(D)u = 0$, coincide con una funzione differenziabile infinite volte su R^n .

In seguito saranno utilizzate le seguenti proposizioni (vedi [3]).

PROPOSIZIONE 1. - I polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ verificano la condizione (1) se e solo se verificano la seguente

$$(2) \quad \sup_{x \in R^n} \frac{|Q(x)|}{\tilde{P}(x)} < \infty.$$

PROPOSIZIONE 2. - Per ogni coppia di polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$c_1 \leq \frac{\overline{PQ}(x)}{\tilde{P}(x)\tilde{Q}(x)} \leq c_2, \quad x \in R^n.$$

Siano $P(x)$, $Q(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$ polinomi. Dalla Proposizione 2 segue che: i) se $P(x)$ e $P_1(x)$, $Q(x)$ e $Q_1(x)$ sono ugualmente forti, allora $P(x)Q(x)$ e $P_1(x)Q_1(x)$ sono ugualmente forti; ii) se $P(x)Q(x)$ e $P_1(x)Q_1(x)$, $P(x)$ e $P_1(x)$ sono ugualmente forti, allora $Q(x)$ e $Q_1(x)$ sono ugualmente forti.

PROPOSIZIONE 3. - Se $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi ugualmente forti e $P(x)$ è ipoellittico, anche $Q(x)$ è ipoellittico.

PROPOSIZIONE 4. - Il polinomio $P(x)$ è ipoellittico se e solo se per ogni $\alpha \neq 0$ riesce

$$\frac{P^{(\alpha)}(x)}{P(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, \quad x \in R^n.$$

Dalla proposizione 4 segue facilmente che il prodotto di due polinomi ipoellittici è ipoellittico. Dalla stessa proposizione segue anche che il polinomio ipoellittico $P(x)$ si può rappresentare nella forma

$$(3) \quad P(x) = a_1 x_1^{m_1} + \dots + a_n x_n^{m_n} + \sum_{\alpha} a'_{\alpha} x^{\alpha},$$

con $a_j \neq 0$, $m_j \geq 1$ e $\alpha_j < m_j$ se $a'_j \neq 0$, per $1 \leq j \leq n$. Per la dimostrazione si veda, per esempio, [7].

Il polinomio $P(x)$, di grado m , si dice *ellittico* se

$$(4) \quad 0 \neq x \in R^n \rightarrow P_m(x) \neq 0.$$

Siano $m_1, \dots, m_n$ numeri interi positivi e sia $P(x) = \sum_{\alpha_1/m_1 + \dots + \alpha_n/m_n \leq 1} a_\alpha x^\alpha$; si dice che $P(x)$ è *quasiellittico di multi-indice* $(m_1, \dots, m_n)$ se

$$(5) \quad 0 \neq x \in R^n \Rightarrow \sum_{\alpha_1/m_1 + \dots + \alpha_n/m_n = 1} a_\alpha x^\alpha \neq 0.$$

I polinomi ellittici e quasiellittici sono particolari polinomi ipoellittici.

2. Trasformazioni stabili. È evidente che ogni trasformazione lineare invertibile $x \rightarrow Ax$ di R^n in sé muta il polinomio ipoellittico $P(x)$ nel polinomio $P(Ax)$ ancora ipoellittico. Tuttavia in generale $P(x)$ e $P(Ax)$ non sono ugualmente forti, come prova l'esempio: $P(x) = x_1^2 + ix_2$, $A: (x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1)$.

D'altra parte le trasformazioni lineari che mutano un polinomio in un altro ugualmente forte si presentano naturalmente nello studio dei problemi al contorno: si veda [4], [8], [9] per il caso di operatori quasiellittici e [5], [6], [10] per il caso di operatori ugualmente forti a un prodotto di operatori quasiellittici.

Qui si provano alcune proprietà di tali trasformazioni.

TRASFORMAZIONE STABILE. — *La trasformazione lineare invertibile $x \rightarrow Ax$ di R^n in sé si dirà stabile per il polinomio $P(x)$ se $P(x)$ e $P(Ax)$ sono ugualmente forti ⁽¹⁾.*

TEOREMA 1. — *I polinomi ipoellittici $P(x)$ e $Q(x)$ sono ugualmente forti se e solo se riesce ⁽²⁾*

$$(6) \quad c_1 \leq \frac{1 + |Q(x)|^2}{1 + |P(x)|^2} \leq c_2, \quad x \in R^n.$$

Se vale la (6), si ha

$$|Q(x)|^2 \leq c_2(1 + |P(x)|^2) \leq c_3 \sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(x)|^2,$$

e di qui segue, in forza della (2), che $P(x)$ è più forte di $Q(x)$.

Scambiando $P(x)$ con $Q(x)$ si ottiene che $Q(x)$ è più forte di $P(x)$ e quindi che $P(x)$ e $Q(x)$ sono ugualmente forti.

⁽¹⁾ La nozione di trasformazione stabile è stata già introdotta per particolari polinomi in [2], [8], [9] con significato leggermente diverso.

⁽²⁾ Qui e in seguito con $c_1, c_2, \dots$ indichiamo sempre costanti positive indipendenti da $x \in R^n$.

Se $P(x)$ e $Q(x)$ sono ugualmente forti, si ha

$$(7) \quad c_1 \leq \frac{\tilde{P}(x)^2}{\tilde{Q}(x)^2} \leq c_2.$$

Dalla Proposizione 4 segue che $P(x) \rightarrow \infty$, $Q(x) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow \infty$, $x \in R^n$, e ancora che

$$\frac{1 + |Q(x)|^2}{1 + |P(x)|^2} \cdot \frac{|P(x)|^2 + \sum_{\alpha \neq 0} |P^{(\alpha)}(x)|^2}{|Q(x)|^2 + \sum_{\alpha \neq 0} |Q^{(\alpha)}(x)|^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1, \quad x \in R^n.$$

Da questo e dalla (7) segue la (6).

Dal teorema precedente segue immediatamente il seguente:

COROLLARIO 1. - *Se $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi ipoellittici ugualmente forti valgono le affermazioni*

- i) $P(x)$ e $Q(x)$ hanno ugual grado;
- ii) $P(x)$ e $Q(x)$ hanno ugual grado rispetto a ciascuna delle variabili $x_1, \dots, x_n$;
- iii) se $m \geq 1$ è il grado di $P(x)$ e $Q(x)$, per $x \in R^n$ si ha

$$P_m(x) = 0 \Leftrightarrow Q_m(x) = 0.$$

L'affermazione iii) equivale a dire che $P(D)$ e $Q(D)$ hanno le stesse caratteristiche.

TEOREMA 2. - *Se A è una trasformazione stabile per il polinomio ipoellittico $P(x)$ e se $P(x)$ e $Q(x)$ sono ugualmente forti, allora A è stabile anche per $Q(x)$.*

$Q(x)$ è ipoellittico (Proposizione 3) e quindi si ha per ipotesi

$$c_1 \leq \frac{1 + |P(Ax)|^2}{1 + |P(x)|^2} \leq c_2, \quad c_3 \leq \frac{1 + |Q(x)|^2}{1 + |P(x)|^2} \leq c_4.$$

Da questo e dall'identità

$$\frac{1 + |Q(Ax)|^2}{1 + |Q(x)|^2} = \frac{1 + |Q(Ax)|^2}{1 + |P(Ax)|^2} \cdot \frac{1 + |P(Ax)|^2}{1 + |P(x)|^2} \cdot \frac{1 + |P(x)|^2}{1 + |Q(x)|^2}$$

segue

$$\frac{c_1 c_3}{c_4} \leq \frac{1 + |Q(Ax)|^2}{1 + |Q(x)|^2} \leq \frac{c_2 c_4}{c_3},$$

come si desiderava.

TEOREMA 3. - Sia $P(x)$ un polinomio quasiellittico di multi-indice $(m_1, \dots, m_n)$; sia $x \rightarrow Ax$ una trasformazione lineare invertibile di R^n in sè rappresentata da $x_j \rightarrow \sum_1^n a_{ij}x_i$, $1 \leq j \leq n$. Allora A è stabile per $P(x)$ se e solo se riesce

$$(8) \quad m_i > m_j \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq n.$$

Si prova facilmente (si veda [2], [3] per dimostrazioni analoghe) che vale la relazione

$$(9) \quad c_1 \leq \frac{1 + |P(x)|^2}{1 + \sum_1^n x_j^{2m_j}} \leq c_2.$$

Se A è una trasformazione stabile per $P(x)$, si ha

$$c_3 \leq \frac{1 + |P(Ax)|^2}{1 + |P(x)|^2} \leq c_4.$$

Dalle due formule scritte si ottiene

$$\frac{c_1 c_3}{c_2} \leq \frac{1 + \sum_1^n (\sum_1^n a_{ji} x_i)^{2m_j}}{1 + \sum_1^n x_j^{2m_j}} \leq \frac{c_2 c_4}{c_1}$$

e quindi, se si prende $x_j = 0$ per $j \neq k$, si ha

$$\frac{c_1 c_3}{c_2} \leq \frac{1 + \sum_1^n (a_{jk} x_k)^{2m_j}}{1 + x_k^{2m_k}} \leq \frac{c_2 c_4}{c_1}.$$

Da questo segue che $m_j > m_k \Rightarrow a_{jk} = 0$.

Viceversa, supposta valida la (8), segue dal Lemma 4 di [2] che $P(Ax)$ è quasiellittico di multi-indice $(m_1, \dots, m_n)$. Allora, utilizzando la (9), possiamo concludere che A è stabile per $P(x)$.

TEOREMA 4. - Il polinomio ipoellittico $P(x)$ è ellittico se e solo se $P(x)$ e $P(Ax)$ sono ugualmente forti per ogni trasformazione lineare invertibile A di R^n in sè.

Se $P(x)$ è ellittico, segue dal teorema precedente che ogni A è stabile per $P(x)$.

Se $P(x)$ è un polinomio di grado m non ellittico, esistono in R^n i punti non nulli x' e x'' tali che $P_m(x') = 0$, $P_m(x'') \neq 0$ ed esiste una trasformazione A lineare invertibile tale che $A(x') = x''$. Allora si ha per ogni t reale

$$c_1 \leq \frac{1 + |P(Atx')|^2}{1 + |P(tx')|^2} \leq c_2,$$

$$c_1 \leq \frac{1 + |t^m P_m(x'') + \dots + P_n(x'')|^2}{1 + |t^{m-1} P_{m-1}(x') + \dots + P_0(x')|^2} \leq c_2$$

e questo è assurdo.

TEOREMA 5. - *Se il polinomio $P(x)$ è ugualmente forte a un prodotto di polinomi quasiellittici, sono stabili per $P(x)$ tutte le trasformazioni che sono stabili per ciascuno dei fattori.*

Segue dal Teorema 2 e dalle osservazioni alla Proposizione 2.

TEOREMA 6. - *Un prodotto di polinomi quasiellittici ⁽³⁾ può non ammettere trasformazioni stabili non banali e può ammettere trasformazioni stabili che non sono stabili per ciascuno dei fattori.*

La prima affermazione è assicurata dal seguente esempio: $P(x) = (x_1^2 + ix_2)(x_1 + ix_2^3)$. Infatti, sia $A(x_1, x_2) \rightarrow (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$ una trasformazione stabile per $P(x)$. Allora si ha

$$c_1 \leq \frac{1 + [(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^4 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2][(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^6]}{1 + (x_1^4 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^6)} \leq c_2.$$

Ponendo $x_2 = 0$, si ottiene

$$c_1 \leq \frac{1 + (a_{11}^4 x_1^4 + a_{21}^2 a_{11}^2)(a_{11}^2 x_1^2 + a_{21}^6 x_1^6)}{1 + x_1^6} \leq c_2$$

e di qui segue $a_{21} = 0$ e quindi che A è stabile per $x_1 + ix_2^3$. Ma allora A deve essere stabile anche per $x_1^2 + ix_2$ e da questo segue $a_{12} = 0$.

Ciò prova che A è banale (ossia del tipo: $a_j \rightarrow a_j x_j$, $a_j \neq 0$, $1 \leq j \leq n$).

La seconda affermazione è assicurata dal seguente esempio: $P(x) = (x_1^2 + x_2^4 + ix_3)(x_1^4 + x_2^2 + ix_3)$. Infatti la trasformazione $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_1, x_3)$ muta $P(x)$ in sè, ma non è stabile per nessuno dei fattori.

⁽³⁾ Il prodotto di più polinomi quasiellittici non è in generale quasiellittico [1].

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. C. BAROZZI, *Sul prodotto di polinomi quasi-ellittici*, «Boll. U. M. I.», XX (1965).
- [2] A. CAVALLUCCI, *Sulle proprietà differenziali delle soluzioni delle equazioni quasiellittiche relativamente a domini normali*, «Boll. U. M. I.», XIX, 465-77 (1964).
- [3] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer, Berlin 1963.
- [4] M. PAGNI, *Problemi al contorno per una certa classe di equazioni lineari alle derivate parziali*, «Atti Sem. Mat. Fis. Modena», XIII, 119-64 (1964).
- [5] — —, *Problemi al contorno per una certa classe di operatori ipoellittici*, «Atti Conv. Equaz. Deriv. Parziali», Nervi 25-27 marzo 1965.
- [6] — —, *Problemi con condizioni omogenee al contorno per una certa classe di operatori formalmente ipoellittici* (in corso di stampa).
- [7] B. PINI, *Osservazioni sulla ipoellitticità*, «Boll. U. M. I.», XVIII, 420-32 (1963).
- [8] — —, *Su un problema tipico relativo a una certa classe di equazioni ipoellittiche*, «Atti Acc. Sc. Bologna», s. XII, t. I, 1-26 (1964).
- [9] — —, *Su un problema al contorno per certe equazioni ipoellittiche*, «Rev. Roum. Math. Pures et Appl.», t. IX, n. 7, 643-53 (1964).
- [10] — —, *Sulle tracce di un certo spazio funzionale*, nota I «Rend. Acc. Naz. Lincei», VIII, 37, 28-34 (1964); nota II ibidem VIII, 38, 1-6 (1965).