Mario Pezzana

Trasformazioni puntuali tra due S_n a configurazione caratteristica armonica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.3, p. 344–350.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_3_344_0>

Trasformazioni puntuali tra due S_n a configurazione caratteristica armonica (*)

MARIO PEZZANA (Bologna)

Sunto. - *Si stabiliscono alcune proprietà di un particolare tipo di trasformazioni tra due regioni di due S_n, dette a configurazioni caratteristica armonica. Le più notevoli sono che tali trasformazioni possiedono sempre il massimo numero di famiglie di ipersuperficie caratteristiche e che queste possono ridursi anche tutte ad iperpiani. Infine si danno alcuni esempi di tali trasformazioni.*

1. – Scopo di questa Nota è di stabilire alcune proprietà di un particolare tipo di trasformazioni tra due S_n (1) che chiamerò a configurazione caratteristica armonica.

Dirò che, in un S_n, $2^n - 1$ rette uscenti da un punto hanno configurazione armonica se, fissato in un iperpiano di S_n non passante per il punto un riferimento proiettivo qualsiasi, le rette proiettano i $2^n - 1$ punti che hanno tutte le coordinate 0 o 1.

La configurazione geometrica di questi punti è facilmente rappresentabile. Sull'iperpiano in questione si considerino $n+1$ punti indipendenti, e il simplesso che ha per vertici n qualunque di essi. I punti considerati sono gli $n+1$ dati, ai quali si devono aggiungere le proiezioni, su tutte le facce di tutte le dimensioni, del punto che non è vertice, dai vertici del simplesso.

Si osservi che il numero di tali punti e il numero dei punti di un S_{n-1} aventi le coordinate proiettive omogenee uguali a 0 o ad 1 sono

$$n + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

cioè tanti quante sono le direzioni caratteristiche uscenti da un punto in una trasformazione puntuale tra due S_n (2).

(*) Il presente lavoro è stato eseguito nell'ambito dell'attività del 26° Gruppo di Ricerca del Consiglio Nazionale della Matematica del C.N.R.

(1) Qui e nel seguito si dirà semplicemente «tra due S_n», ma s'intenderà «tra due regioni di regolarità degli S_n».

(2) Si veda: M. VILLA «*Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*», Note I, II, III, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, (8) 41 pp. 55-61, 192-196, 295-303 (1948).

Dirò che una trasformazione tra due S_n è a configurazione caratteristica armonica se le rette caratteristiche che escono da ogni coppia di punti sono a configurazione armonica.

È intanto da osservare che allora, per ogni $h < n$, per ogni punto passa il massimo numero di spazi lineari ad h dimensioni contenente $2^h - 1$ direzioni caratteristiche.

Dimostrerò che:

I) *Affinchè la configurazione caratteristica sia armonica basta che* $\frac{n^3 + 5n}{6}$ *rette caratteristiche uscenti da ogni punto proiettino altrettanti punti che in un qualunque iperpiano non passante per il punto considerato abbiano la seguente configurazione: n di essi siano indipendenti e tutti gli altri siano le proiezioni da questi di un ulteriore punto indipendente su tutte le facce a due e tre dimensioni del simplesso che ha per vertici gli n punti considerati.*

È facile verificare che tale configurazione è quella che si ottiene considerando in un iperpiano tutti i punti che in un riferimento proiettivo hanno una, due, tre coordinate uguali ad uno e tutte le altre nulle.

Si osservi che per $n = 3$ si ottiene il numero totale delle rette caratteristiche, mentre per $n > 3$ la proposizione è una effettiva proprietà delle trasformazioni in esame in quanto $\frac{n^3 + 5n}{6} < 2^n - 1$.

II) *Esistono* $\frac{n(n+1)}{6}$ *famiglie ∞^1 di ipersuperficie caratteristiche* (3) (4).

Inoltre per ogni $h > n$ esisteranno famiglie di V_h caratteristiche e saranno le varietà intersezioni di $n - h$ ipersuperficie caratteristiche.

III) *Se una famiglia di ipersuperficie caratteristiche si riduce ad una famiglia di iperpiani, essi formano fascio.*

IV) *Basta che $2n-1$ famiglie di ipersuperficie si riducano ad iperpiani, affinchè ciò succeda per tutte.*

(3) È noto che in generale non esistono neppure calotte piane del secondo ordine che si corrispondano in una trasformazione puntuale. Si veda M. VILLA, op. cit. in (2).

(4) Per la nozione di ipersuperficie caratteristiche si veda: L. MURACCHINI, *Alcune proprietà in grande delle trasformazioni puntuali fra spazi*, «Boll. Un. Mat. Ital.», (3) 7, 123-131 (1952).

Infine darò un esempio di trasformazioni a configurazione caratteristica armonica trovando le equazioni di quel tipo di trasformazioni in cui tutte le ipersuperficie caratteristiche sono iperpiani.

Per $n=3$ si ritrovano i risultati di L. MURACCHINI (5).

2. – Consideriamo, fra due spazi S_n e $\overline{S}_n$ proiettivi, una trasformazione puntuale analitica T, e sia A_0, B_0 una coppia regolare di punti corrispondenti in T, con A_0 in S_n e B_0 in $\overline{S}_n$. Associamo a ciascuno dei due punti, nel relativo spazio, un riferimento proiettivo per cui quei punti siano fondamentali ed indichiamo con A_i, B_i $(i=1, 2, \dots, n)$ i rimanenti punti fondamentali.

Valgono le formule note (6)

$$1) \qquad \begin{aligned} dA_i &= \sum_{0}^{n}{}_h \omega_{ih} A_h \\ dB_i &= \sum_{0}^{n}{}_h \tau_{ih} B_h \end{aligned} \qquad (i, h = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Se le rette $A\,A_i$, $B_0B_i (i=1, 2, \dots, n)$ si corrispondono in una omografia K tangente a T in A_0, B_0, si ha

$$2) \qquad \tau_{0i} = \omega_{0i} \qquad \text{per } i = 1, 2, \dots, n.$$

Indicheremo ω_{0i} $(i=1, 2, \dots, n)$ con ω_i.

Le direzioni caratteristiche relative alla coppia A_0, B_0 sono quelle relative alle ω_i che annullano la matrice

$$3) \qquad \left\| \begin{matrix} \omega_i \\ \Omega_i \end{matrix} \right\| \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

dove le Ω_i sono le forme, dipendenti da K

$$4) \qquad \Omega_i = \sum_{1}^{n}{}_{r,s} \overset{i}{c}_{rs} \omega_r \omega_s \qquad (i, r, s, = 1, 2, \dots, n) \; (\overset{i}{c}_{rs} = \overset{i}{c}_{sr})$$

che si ottengono per differenziazione esterna delle (2), servendoci delle *equazioni di struttura di E. Cartan* (7).

(5) L. MURACCHINI, *Trasformazioni puntuali fra due spazi a configurazione caratteristica armonica*, «Boll. Un. Mat. Ital.» (3) 8, 144-152 (1953).

(6) Si veda: E. CECH, *Géometrie projective différentielle des correspondences entre deux espaces*, I, II, II4, «Cas. pro Pest. Mat. a Fys.», 74, 75 (1950), pp. 32-48, 123-136, 137-157.

(7) Ved. op. cit. in (4).

Tra le forme di PFAFF delle (1) varranno allora le relazioni

$$\begin{aligned} \tau_{ii} - \omega_{ii} - \tau_{00} + \omega_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \omega_i} \\ \tau_{ri} - \omega_{ri} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_r}{\partial \omega_r}\,. \end{aligned} \qquad (i,\ r = 1,\ 2,\ \dots,\ n) \tag{5}$$

Si può poi sempre, per K opportuna supporre

$$\sum_0^n {}_i\,\omega_{ii} = \sum_0^n {}_i\,\tau_{ii} = 0. \tag{6}$$

Determiniamo ora i coefficienti $\overset{i}{c}_{rs}$ delle Ω_i in modo che la configurazione caratteristica nella coppia A_0, B_0 sia armonica.

Basterà imporre che siano caratteristiche le n direzioni rappresentate dagli n sistemi di $n-1$ equazioni

$$\omega_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ r-1,\ r+1,\ \dots,\ n);$$

le $\binom{n}{2}$ direzioni rappresentate dai sistemi

$$\omega_i = \omega_j;\quad \omega_r = 0 \qquad \text{per } r \neq i \neq j$$

le $\binom{n}{3}$ direzioni rappresentate dai sistemi

$$\omega_i = \omega_j = \omega_k;\quad \omega_r = 0 \qquad \text{per } r \neq i \neq j$$

per ottenere che tutti i coefficienti delle Ω, che indicheremo come al solito con $\overset{i}{c}_{rs}$, sono nulli, eccettuati i $\overset{i}{c}_{ii}$ che sono tutti uguali tra loro: per comodità di scrittura porrò allora

$$\overset{i}{c}_{ii} = -(n+1)a.$$

Resta perciò intanto dimostrata la proposizione I, cioè che *basta siano caratteristiche le* $\frac{n^3+5n}{6}$ *direzioni scelte perchè la configurazione caratteristica risulti armonica.*

Si osservi che i punti scelti si trovano su $\binom{n+1}{3}$ piani dell'S_n, e su ciascuno di questi piani costituiscono i vertici e i punti diagonali di un quadrangolo.

Tali piani hanno in comune a due a due un lato dei quadrangoli e i vertici e il punto diagonale che su di esso si trovano.

3. - Per i risultati del numero precedente la (4) diviene

$$\Omega_i = -(n+1)a\,\omega_i^2 \tag{7}$$

e per le (5) si ha

$$\begin{aligned} &\tau_{ri} - \omega_{ri} = 0 \\ &\tau_{ii} - \omega_{ii} - \tau_{00} + \omega_{00} = -(n+1)a\omega_i \end{aligned} \qquad (i, r = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

e, tenendo conto della (6)

$$\tau_{00} - \omega_{00} = a\sum_1^n {}_i\, \omega_i \tag{9}$$

che con differenziazione esterna, ci fa vedere che si può porre $a = 1$.

Sempre per differenziazione delle (8) e (9) si ottiene

$$\begin{aligned} &\tau_{h0} - \omega_{h0} = (n+1)\rho_h\omega_h \\ &\omega_{hi} = a^i{}_h\omega_i + (\rho_h - a^i{}_h)\omega_h \\ &\omega_{ii} - \omega_{00} = \sum_1^n {}_h\, a^i{}_h\,\omega_k \end{aligned} \qquad h \neq i. \tag{10}$$

Differenziando la prima delle (10) si vede che si può porre $\rho_h = 0$ e le (10) divengono

$$\begin{aligned} &\omega_{hi} = a^i{}_k(\omega_i - \omega_h) \\ &\omega_{ii} - \omega_{00} = \sum_1^n {}_h\, a^i{}_k\omega_h \\ &\tau_{h0} = \omega_{h0} = k_h\,\omega_h \end{aligned} \qquad h \neq i. \tag{11}$$

Da queste ultime segue subito che

$$[d\omega_i] = 0$$

per qualunque valore di i. Perciò resta dimostrata la proposizione II, cioè che *esistono* $\frac{n(n+1)}{2}$ *famiglie* ∞^1 *di ipersuperficie caratteristiche rappresentate dalle equazioni*

$$\begin{aligned} &\omega_i = 0 && \text{per } i = 1, 2, \ldots, n \\ &\omega_i - \omega_j = 0 && \text{per } i, j = 1, 2, \ldots, n; \qquad i \neq j. \end{aligned}$$

4. - Le ipersuperficie caratteristiche non sono in generale iperpiani.

Affinchè $\omega_i = 0$, sia un iperpiano occorre e basta che sia $a^i{}_h = 0$ per qualunque $h \neq i$.

Ciò segue dal fatto che l'equazione delle asintotiche della ipersuperficie $\omega_i = 0$ è

$$\sum_{1}^{n}{}_r \omega_r \omega_{ri} - \omega_i \omega_{ii} = 0$$

che deve essere identicamente verificata affinchè si tratti di un iperpiano.

Segue immediatamente dalla differenziazione della prima delle (11) che deve allora essere anche

$$k_h = 0 \qquad \text{per } h \neq i. \tag{12}$$

Si ha inoltre dalla relazione

$$dA_h = \sum_{0}^{n}{}_r \omega_{hr} A_r ,$$

poichè

$$\omega_{h0} = 0 \qquad \omega_{hi} = 0 \qquad (h,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

lo spazio lineare

$$|\ A_1,\ \ldots..,\ A_{i-1},\ A_{i+1},\ \ldots..,\ A_n\ |$$

è fisso, perciò gli iperpiani $\omega_i = 0$ formano fascio.

Analoghe formule valgono, per le (8) e (11), tenendo conto della (12), in $\overline{S}_n$.

Si può concludere, come alla proposizione III. che se le ipersuperficie caratteristiche di una famiglia sono iperpiani, essi formano fascio, analogamente a quanto succede nell'S_3 ([8]).

5. - Se vogliamo ora che tutte le $\frac{n(n+1)}{2}$ famiglie di ipersuperficie siano iperpiani deve intanto essere $a^i{}_h = 0$ per tutti i valori di i e h con $h \neq i$. Inoltre, affinchè anche $\omega_i - \omega_j = 0$ sia un iperpiano, posto $\omega_i = \omega_j = \omega$, occorre che

$$\omega(\omega_{jj} - \omega_{ii}) = 0$$

e ciò si ha se

$$a_i^i = a_j^j .$$

Se $a_i^i = a_j^j \neq 0$, l'ipersuperficie $\omega_i = \omega_j$; è un iperpiano; se $a_i^i = a_j^j = 0$ tutte le ipersuperficie $\omega_i = \lambda\omega_j$ sono iperpiani

Perciò:

1) ci sono infinite famiglie di ∞^1 iperpiani caratteristici;

([8]) Vedi op. cit. in ([3]).

2) se sono in numero finito il loro numero massimo è di $n + \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Si osserva immediatamente che, *affinchè ce ne sia il numero massimo, basta che ce ne siano* $2n - 1$ *opportuni* e resta così dimostrata anche la IV proposizione.

Basterà ad esempio che siano iperpiani le famiglie rappresentate da $\omega_r = 0$ e da $\omega_1 - \omega_s = 0$.

6. - Si osservi anche che se $\omega_i = 0$ è una famiglia ∞^1 di iperpiani, per differenziazione esterna della seconda delle (4), si vede che a_i^i è costante.

Perciò per il caso in cui siano $\frac{n(n+1)}{2}$ famiglie di iperpiani, si ha:

$$\omega_{hi} = 0 \qquad \text{per } h \neq i \qquad \begin{matrix}(h = 1, \dots n)\\ (i = 0, \dots, n)\end{matrix}$$

$$\omega_{ii} - \omega_{00} = k\omega_i \qquad \text{con } k \text{ costante}$$

da cui

$$\omega_{00} = -\frac{k}{n+1} \sum_1^n {}_i \, \omega_i$$

$$\omega_{ii} = -\frac{k}{n+1} \sum_1^n {}_r \, \omega_r + k\omega_i$$

e le formule del riferimento mobile diventano

$$dA = \omega_{00} A + \sum_1^n {}_r \, \omega_r A_r$$

$$dA_i = \omega_{ii} A_i .$$

Tutti i punti A_i sono fissi. Analogamente per lo spazio di B.

Si può allora integrare il sistema e si ottengono risultati analoghi a quelli ottenuti per l'S_3 da MURACCHINI (9):

$$x'_i = x_i^n \qquad \text{per } k \neq 0,$$

$$x'_i = e^{x} \qquad \text{per } k = 0.$$

(9) Op. cit. in (3).

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 30 luglio 1965.