Bollettino Unione Matematica Italiana

Giulia Martini

Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi ordinari in una coppia regolare nei casi particolari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.3, p. 335–343.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_3_335_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi ordinari in una coppia regolare nei casi particolari

GIULIA MARTINI (Bologna) [1]

Sunto. - *Si indicano le equazioni di una trasformazione puntuale fra due spazi proiettivi ordinari nell'intorno del 2° ordine di una coppia regolare di punti corrispondenti, nei vari casi in cui le direzioni caratteristiche distinte sono soltanto quattro di cui tre complanari, oppure soltanto tre non complanari o complanari.*

1. Lo studio delle trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi ordinari nell'intorno del 2° ordine di una coppia regolare di punti corrispondenti, è stato svolto nel caso generale in cui le direzioni caratteristiche non sono indeterminate e fra di esse ve ne sono quattro distinte tre qualunque delle quali non complanari [2] e in quello in cui le direzioni caratteristiche sono infinite [3].

Rimanevano appunto da esaminare gli altri casi. In tre Note [4], dell'Accademia delle Scienze di Bologna, ho studiato una trasfor-

(1) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca Matematica n. 26 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*, Nota I, Rend. dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Ser. VIII, Vol. IV, p. 55 (1948).

(3) G. MARTINI, *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi nel caso conforme*, Rend. dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LXXXII, p. 225 (1949).

(4) G. MARTINI, *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi ordinari in una coppia regolare in cui esistono soltanto quattro direzioni caratteristiche distinte di cui tre complanari*, Rend. dell'Accademia delle Scienze di Bologna, Ser. XII, Vol. I (1964). - G. MARTINI, *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi ordinari in una coppia regolare in cui esistono soltanto tre direzioni caratteristiche distinte e non complanari*, Rend. dell'Accademia delle Scienze di Bologna, Ser. XII, Vol. II (1965). - G. MARTINI, *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi ordinari in una coppia regolare in cui esistono soltanto tre direzioni caratteristiche distinte e complanari*, Rend. dell'Accademia delle Scienze di Bologna, Ser. XII, Vol. II (1965).

mazione puntuale fra due spazi proiettivi ordinari nell'intorno del 2° ordine di una coppia regolare di punti corrispondenti, nei casi in cui le direzioni caratteristiche distinte sono soltanto quattro di cui tre complanari, oppure soltanto tre non complanari o complanari, determinando le equazioni della trasformazione in riferimenti (proiettivi) opportunamente scelti (5).

Nella presente Nota vengono indicate le equazioni delle trasformazione nei vari casi rimandando, per le dimostrazioni, alle mie Note sopra citate.

Nel n. 2 si considerano i casi in cui si hanno soltanto quattro direzioni caratteristiche distinte di cui tre complanari, nel n. 3 si considerano i casi in cui si hanno soltanto tre direzioni caratteristiche distinte e non complanari, infine nel n. 4 si considerano i casi in cui si hanno soltanto tre direzioni caratteristiche distinte e complanari.

2. - Si ha:

Le trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi ordinari S_3, $\bar{S}_3$ *che in una coppia regolare di punti corrispondenti* O, $\bar{O}$ *posseggono soltanto quattro direzioni caratteristiche distinte di cui tre complanari, hanno equazioni di uno dei seguenti tipi* (essendo x_1, x_2, x_3 coordinate proiettive non omogenee in S_3 ; y_1, y_2, y_3 coordinate proiettive non omogenee in $\bar{S}_3$; $O, \bar{O}$ origini nei rispettivi spazi) (6):

$$1)\quad \begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_1 x_2 + \beta x_1 x_3 - x_2 x_3 + [3] \\ y_2 &= x_2 + x_1 x_2 + \beta k x_1 x_3 - k x_2 x_3 + [3] \\ y_3 &= x_3 + [3], \end{aligned}$$

gli assi coordinati essendo rette caratteristiche doppie, infine $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$ $(y_1 = y_2,\ y_3 = 0)$ l'ulteriore retta caratteristica (semplice); β, k sono costanti $(\beta \neq 0)$ e con [3] si indicano i termini negli sviluppi in serie di grado > 3 (7).

$$2)\quad \begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 + [3] \\ y_2 &= x_2 + x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2b_{23} x_2 x_3 + [3] \\ y_3 &= x_3 + [3] \end{aligned}$$

(5) Il caso in cui esistono soltanto due direzioni caratteristiche distinte verrà esaminato in altro mio lavoro.

(6) G. MARTINI, la 1ª delle Note cit. nella (4).

(7) Nella 1ª delle Note cit. nella (4), considerando l'intorno del 3° ordine di $O, \bar{O}$ vengono determinati riferimenti intrinseci e le relative equazioni canoniche della trasformazione.

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ tripla, la $x_1 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_2 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$ semplice (e analogamente in $\bar{S}_3$); a_{23}, b_{23} sono costanti non entrambe nulle.

$$
3) \quad \begin{aligned}
y_1 &= x_1 + x_1 x_2 - (1-2c_{23}) x_1 x_3 + 2 b_{23} (1-2c_{23}) x_2 x_3 + [3] \\
y_2 &= x_2 + x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2 b_{23} x_2 x_3 + [3] \\
y_3 &= x_3 + 2 c_{23} x_2 x_3 + [3].
\end{aligned}
$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ tripla, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ doppia, la $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$ semplice (e analogamente in $\bar{S}_3$); c_{23}, b_{23} sono costanti $\left(c_{23} \neq 0,\ c_{23} \neq \frac{1}{2}\right)$.

$$
4) \quad \begin{aligned}
y_1 &= x_1 + x_1 x_2 - \frac{b_{23}(1-2c_{23})}{b_{23} - c_{23}} (x_1 - 2 b_{23} x_2) x_3 + [3] \\
y_2 &= x_2 + x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2 b_{23} x_2 x_3 + [3] \\
y_3 &= x_3 + 2 c_{23} x_2 x_3 + [3].
\end{aligned}
$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ tripla, la $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$ semplice (e analogamente in $\bar{S}_3$); b_{23}, c_{23} sono costanti ($c_{23} \neq 0$, $c_{23} \neq \frac{1}{2}$, $b_{23} \neq c_{23}$).

$$
5) \quad \begin{aligned}
y_1 &= x_1 + x_1 x_2 - x_1 x_3 + x_2 x_3 + [3] \\
y_2 &= x_2 + x_1 x_2 - x_1 x_3 + x_2 x_3 + [3] \\
y_3 &= x_3 + 2 c_{23} x_2 x_3 + [3].
\end{aligned}
$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ tripla, la $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$ semplice (e analogamente in S_3); la costante $c_{23} \neq 0$.

$$
6) \quad \begin{aligned}
y_1 &= x_1 + x_1 x_2 + [3] \\
y_2 &= x_2 + x_1 x_2 + [3] \\
y_3 &= x_3 + 2 c_{13} x_1 x_3 + 2 c_{23} x_2 x_3 + [3].
\end{aligned}
$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ quadrupla, la $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$

semplice (e analogamente in $\bar{S}_3$); c_{13}, c_{23} sono costanti ($c_{13} \neq 0$, $c_{23} \neq 0$).

$$
7) \quad \begin{aligned}
y_1 &= x_1 + x_1 x_2 + 2 k b_{13} x_1 x_3 + 2 k b_{23} x_2 x_3 + [3] \\
y_2 &= x_2 + x_1 x_2 + 2 b_{13} x_1 x_3 + 2 b_{23} x_2 x_3 + [3] \\
y_3 &= x_3 + 2 c_{13} x_1 x_3 + 2 c_{23} x_2 x_3 + [3],
\end{aligned}
$$

dove i coefficienti soddisfano alle condizioni

$$
(1) \quad \begin{aligned}
&\frac{b_{13}}{b_{23}}\left(\frac{1}{2} - c_{13}\right) + c_{23}\, \frac{b^2_{13}}{b^2_{23}} - \frac{b_{13}}{k b_{23}}\left(\frac{1}{2} - c_{23}\right) = \frac{c_{13}}{k}, \\
&\frac{b_{13}}{b_{23}}\left(c_{13} - \frac{1}{2}\right)^2 - c_{23}\, \frac{b^2_{13}}{b^2_{23}}(1 - c_{13}) - 2 c^2_{23} \frac{b^3_{13}}{b^3_{23}} = \frac{c_{13}}{k^2}\left(c_{23} - \frac{1}{2}\right) - \\
&\qquad\qquad - \frac{b_{13}}{k^2 b_{23}}\left(c_{23} - \frac{1}{2}\right), \\
&\frac{b_{13}}{b_{23}}\left[k\left(2 c_{13} - 1 - 4\, \frac{b_{13}}{b_{23}}\right) + 2 c_{13}\right] + 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ quadrupla, la $x_1 = x_2, x_3 = 0$ semplice (e analogamente in $\bar{S}_3$); k, b_{13}, b_{23}, c_{13}, c_{23} sono costanti ($k \neq 0$, $b_{23} \neq 0$, $c_{13} \neq 0$, $c_{23} \neq 0$) [8].

$$
8) \quad \begin{aligned}
y_1 &= x_1 + x_1 x_2 + 2 a_{13}\left[x_1 + \left(1 + \frac{b_{23} - a_{13}}{b_{13}}\right) x_2\right] x_3 + [3] \\
y_2 &= x_2 + x_1 x_2 + 2 b_{13} x_1 x_3 + 2 b_{23} x_2 x_3 + [3] \\
y_3 &= x_3 + \left(1 - \frac{a_{13}}{b_{13}}\right) x_2 x_3 + [3].
\end{aligned}
$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ quadrupla, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$ semplice (e analogamente in $\bar{S}_3$); a_{13}, b_{13}, b_{23} sono costanti ($a_{13} \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, $a_{13} \neq b_{13}$).

3. - Si ha:

Le trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi ordinari S_3, $\bar{S}_3$ che in una coppia regolare di punti corrispondenti O, $\bar{O}$ posseggono soltanto tre direzioni caratteristiche distinte e non complanari, hanno equazioni di uno dei seguenti tipi (essendo x_1, x_2, x_3

(8) Essendo $c_{13} \neq 0$, $b_{23} \neq 0$, $k \neq 0$, dalla condizione (1), segue $b_{13} \neq 0$.

coordinate proiettive non omogenee in S_3; y_1, y_2, y_3 coordinate proiettive non omogenee in $\bar{S}_3$; O, $\bar{O}$ origini nei rispettivi spazi) (9):

$$
1)\quad \begin{aligned}
y_1 &= \alpha x_1 + [3] \\
y_2 &= \alpha x_2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + [3] \\
y_3 &= \alpha x_3 + 2\gamma b_{12}x_1x_2 + 2\gamma b_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3 + [3].
\end{aligned}
$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_2 = 0$ tripla (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, γ, b_{12}, b_{13}, c_{23} sono costanti ($\alpha \neq 0$, $b_{12} \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, $c_{33} \neq 0$).

$$
2)\quad \begin{aligned}
y_1 &= \alpha x_1 - 2\lambda b_{23}x_1x_2 + [3] \\
y_2 &= \alpha x_2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 + [3] \\
y_3 &= \alpha x_3 + 2\lambda b_{12}x_1x_2 + 2\lambda b_{13}x_1x_3 + [3].
\end{aligned}
$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_2 = 0$ tripla (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, λ, b_{12}, b_{13}, b_{23} sono costanti ($\alpha \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, $b_{23} \neq 0$).

$$
3)\quad \begin{aligned}
y_1 &= \alpha x_1 + 2kb_{13}x_1x_3 + 2kb_{23}x_2x_3 + [3] \\
y_2 &= \alpha x_2 - 2c_{23}\frac{kb_{13} + b_{23}}{kb_{23}}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 + [3] \\
y_3 &= \alpha x_3 + 2c_{23}x_2x_3 + [3].
\end{aligned}
$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_2 = 0$ tripla (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, k, b_{13}, b_{23}, c_{23} sono costanti ($\alpha \neq 0$, $k \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, $b_{23} \neq 0$, $c_{23} \neq 0$, $kb_{13} + b_{23} \neq 0$).

$$
4)\quad \begin{aligned}
y_1 &= \alpha x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + 2kb_{13}x_1x_3 + 2kb_{23}x_2x_3 + [3] \\
y_2 &= \alpha x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 + [3] \\
y_3 &= \alpha x_3 + 2\beta b_{13}x_1x_3 + [3],
\end{aligned}
$$

dove i coefficienti sono legati dalla relazione $\frac{1}{b_{23}}\left(\beta b_{13} + \frac{a_{12}}{k}\right) + \frac{\beta}{k} = 0$. Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_2 = 0$ tripla (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, k, β, a_{12}, b_{13}, b_{23} sono costanti ($\alpha \neq 0$, $k \neq 0$, $\beta \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, $b_{23} \neq 0$).

(9) G. MARTINI, la 2a delle Note cit. nella (4).

5) $$\begin{aligned} y_1 &= \alpha x_1 + 2\beta\rho b_{12} x_1 x_2 + 2kb_{13} x_1 x_3 - 2k(\rho b_{12} + kb_{13}) x_2 x_3 + [3] \\ y_2 &= \alpha x_2 + 2b_{12} x_1 x_2 + 2b_{13} x_1 x_3 - 2(\rho b_{12} + kb_{13}) x_2 x_3 + [3] \\ y_3 &= \alpha x_3 + 2\beta b_{12} x_1 x_2 + 2\beta b_{13} x_1 x_3 - \frac{2k}{\rho}(\rho b_{12} + kb_{13}) x_2 x_3 + [3]. \end{aligned}$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_2 = 0$ tripla (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, β, k, ρ, b_{12}, b_{13} sono costanti ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $k \neq 0$, $\rho \neq 0$, $b_{12} \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, $\rho b_{12} + kb_{13} \neq 0$).

6) $$\begin{aligned} y_1 &= \alpha x_1 + 2a_{12} x_1 x_2 + [3] \\ y_2 &= \alpha x_2 + 2b_{13} x_1 x_3 + [3] \\ y_3 &= \alpha x_3 + 2c_{23} x_2 x_3 + [3]. \end{aligned}$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ tripla, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ tripla, (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, a_{12}, b_{13}, c_{23}, sono costanti ($\alpha \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, $c_{23} \neq 0$).

7) $$\begin{aligned} y_1 &= \alpha x_1 + 2a_{12} x_1 x_2 + [3] \\ y_2 &= \alpha x_2 + 2b_{12} x_1 x_2 - 2\frac{b_{12}(a_{12} - c_{23})}{\gamma a_{12}} x_1 x_3 + [3] \\ y_3 &= \alpha x_3 + 2\gamma b_{12} x_1 x_2 - 2\frac{b_{12}(a_{12} - c_{23})}{a_{12}} x_1 x_3 + 2c_{23} x_2 x_3 + [3]. \end{aligned}$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ tripla, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ tripla (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, γ, a_{12}, b_{12}, c_{23} sono costanti ($\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, $b_{12} \neq 0$, $c_{23} \neq 0$, $a_{12} \neq c_{23}$).

8) $$\begin{aligned} y_1 &= \alpha x_1 + 2c_{23} \frac{kb_{13} + b_{23}}{b_{23}} x_1 x_2 + 2kb_{13} x_1 x_3 + 2kb_{23} x_2 x_3 + [3] \\ y_2 &= \alpha x_2 + 2b_{13} x_1 x_3 + 2b_{23} x_2 x_3 + [3] \\ y_3 &= \alpha x_3 + 2c_{23} x_2 x_3 + [3]. \end{aligned}$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ tripla, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ tripla (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, k, b_{13}, b_{23}, c_{23} sono costanti ($\alpha \neq 0$, $k \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, $b_{23} \neq 0$, $c_{23} \neq 0$, $kb_{13} + b_{23} \neq 0$).

9) $$\begin{aligned} y_1 &= \alpha x_1 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2kb_{13} x_1 x_3 + 2kb_{23} x_2 x_3 + [3] \\ y_2 &= \alpha x_2 + 2b_{12} x_1 x_2 + 2b_{13} x_1 x_3 + 2b_{23} x_2 x_3 + [3] \end{aligned}$$

$$y_3 = \alpha x_3 + 2\beta b_{12} x_1 x_2 + 2\beta b_{13} x_1 x_3 + 2 c_{23} x_2 x_3 + [3],$$

dove i coefficienti sono legati dalle relazioni

$$\frac{1}{b_{23}}\left(\beta b_{13} - b_{12} - c_{23}\frac{k b_{13} + b_{23}}{b_{23}} + \frac{a_{12}}{k}\right) + \frac{\beta}{k} = 0,$$

$$b_{12}\left(c_{23} - a_{12} + k b_{12} + k\beta b_{13} - \frac{\beta b^2_{13}}{b_{23}}\right) = \beta a_{12} b_{13}.$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ tripla, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ tripla (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, β, k, a_{12}, b_{12}, b_{13}, b_{23}, c_{23} sono costanti ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $k \neq 0$, $b_{12} \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, $b_{23} \neq 0$).

10) $$y_1 = \alpha x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2 + [3]$$
$$y_2 = \alpha x_2 + [3]$$
$$y_3 = \alpha x_3 + 2 c_{12} x_1 x_2 + 2 c_{13} x_1 x_3 + 2 c_{23} x_2 x_3 + [3].$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ quadrupla (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, a_{12}, c_{12}, c_{13}, c_{23} sono costanti ($\alpha \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, $c_{13} \neq 0$, $c_{23} \neq 0$).

11) $$y_1 = \alpha x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 k b_{13} x_1 x_3 + 2 k b_{23} x_2 x_3 + [3]$$
$$y_2 = \alpha x_2 + 2 b_{12} x_1 x_2 + 2 b_{13} x_1 x_3 + 2 b_{23} x_2 x_3 + [3]$$
$$y_3 = \alpha x_3 + 2\beta b_{12} x_1 x_2 + 2\beta b_{13} x_1 x_3 + 2 c_{23} x_2 x_3 + [3],$$

dove i coefficienti soddisfano alle condizioni

$$\frac{1}{b_{23}}\left(\beta b_{13} - b_{12} - c_{23}\frac{k b_{13} + b_{23}}{k b_{23}} + \frac{a_{12}}{k}\right) + \frac{\beta}{k} = 0,$$

$$\frac{\beta}{k}(c_{23} - a_{12}) - \beta b_{12} - \frac{1}{k b_{23}}(c_{23} - a_{12})^2 - \frac{\beta k b_{12} b_{13}}{b_{23}} +$$
$$+ \left(\beta - \frac{c_{23}}{b_{23}} + \frac{a_{12}}{b_{23}}\right)\left(\frac{2 c_{23} b_{13}}{b_{23}} + b_{12} - \beta b_{13}\right) = 0.$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ quadrupla (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, β, k, a_{12}, b_{12}, b_{13}, b_{23}, c_{23}, sono costanti ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $k \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, $b_{23} \neq 0$, a_{12} e b_{12} non entrambe nulle).

12) $$y_1 = \alpha x_1 + 2 c_{23}\frac{1 + \lambda}{\lambda} x_1 x_2 + [3]$$

$$y_2 = \alpha x_2 = 2c_{13}(1+\lambda)x_1x_2 + [3]$$
$$y_3 = \alpha x_3 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3 + [3].$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ quintupla (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, λ, c_{12}, c_{13}, c_{23}, sono costanti ($\alpha \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1$, $c_{13} \neq 0$, $c_{23} \neq 0$).

13) $y_1 = \alpha x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + 2kb_{13}x_1x_3 + 2kb_{23}x_2x_3 + [3]$

$$y_2 = \alpha x_2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 + [3]$$
$$y_3 = \alpha x_3 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3 + [3],$$

dove i coefficienti soddisfano alle condizioni

$$\frac{b_{13}}{b_{23}}\left(c_{13} - b_{12} - c_{23}\frac{kb_{13}+b_{23}}{kb_{23}} + \frac{a_{12}}{k}\right) + \frac{c_{13}}{k} = 0,$$

$$c_{13} + \frac{b_{13}}{b_{23}}(a_{12} - c_{23}) = \frac{kb_{13}}{kb_{13}+b_{23}}\left(a_{12}\frac{b_{13}}{b_{23}} + b_{12}\right),$$

$$c_{12}\left(\frac{b_{13}}{b_{23}} + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{kb_{13}+b_{23}}\left(\frac{a_{12}b_{13}}{b_{23}} + b_{12}\right)\left(c_{13} - b_{12} + \right.$$
$$\left. + \frac{a_{12}}{k} - c_{23}\frac{b_{23}+2kb_{13}}{kb_{23}}\right) = 0,$$

$$\frac{k}{kb_{13}+b_{23}}\left(\frac{a_{12}b_{13}}{b_{23}} + b_{12}\right)\left\{\frac{1}{k}\left[c_{12}b_{23} + \frac{1}{k}(a_{12}-c_{23})^2 + b_{13}c_{12}(a_{12} - \right.\right.$$
$$\left. - c_{23})\right] + 2c_{12}b_{13} + \frac{b_{13}c_{23}}{kb_{13}+b_{23}}\left(\frac{a_{12}b_{13}}{b_{23}} + b_{12}\right) - \frac{1}{k}\left(a_{12} - c_{23}\right)\left(b_{12} - \right.$$
$$\left.\left. - 2c_{23}\frac{b_{13}}{b_{23}} - c_{13}\right)\right\} - c_{12}\left(b_{12} + \frac{2b_{13}c_{23}}{b_{23}} - c_{13}\right) = 0.$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_2 = 0$ quintupla (e analogamente in $\bar{S}_3$); α, k, a_{12}, b_{12}, b_{13}, b_{23}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, sono costanti ($\alpha \neq 0$, $k \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, $b_{23} \neq 0$, a_{12}, b_{12}, c_{12} non contemporaneamente nulle).

4. - Si ha:

Le trasformazioni puntuali tra due spazi proiettivi ordinari S_3, $\bar{S}_3$, che in una coppia regolare di punti corrispondenti posseggono soltanto tre direzioni caratteristiche distinte e complanari, hanno equazioni di uno dei seguenti tipi (essendo x_1, x_2, x_3 coordinate proiettive non omogenee in S_3; y_1, y_2, y_3 coordinate proiettive non omogenee in $\bar{S}_3$; O, $\bar{O}$ origini nei rispettivi spazi)[10]:

[10] G. MARTINI, la 3ª delle Note cit. nella [4].

1) $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_1 x_2 + c_{33} x_1 x_3 + a_{33} x_3^2 + [3] \\ y_2 &= x_2 + x_1 x_2 + c_{33} x_2 x_3 + b_{33} x_3^2 + [3] \\ y_3 &= x_3 + c_{33} x_3^2 + [3]. \end{aligned}$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ tripla, la $x_1 = x_3 = 0$ tripla, la $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$ semplice (e analogamente in $\bar{S}_3$); a_{33}, b_{33}, c_{33} sono costanti (a_{33}, b_{33} non entrambe nulle).

2) $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + a_{33} x_3^2 + [3] \\ y_2 &= x_2 + x_1 x_2 + 2 b_{13} x_1 x_3 + c_{33} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 + [3] \\ y_3 &= x_3 + c_{33} x_3^2 + [3]. \end{aligned}$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ doppia, la $x_1 = x_3 = 0$ quadrupla, la $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$ semplice (e analogamente in $\bar{S}_3$); a_{13}, a_{33}, b_{13}, c_{33} sono costanti ($a_{33} \neq 0$).

3) $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + a_{33} x_3^2 + [3] \\ y_2 &= x_2 + x_1 x_2 + (2 a_{13} - c_{33})(1 - 2 c_{13}) x_1 x_3 + c_{33} x_2 x_3 + \\ &\qquad + a_{33}(1 - 2 c_{13}) x_3^2 + [3] \\ y_3 &= x_3 + 2 c_{13} x_1 x_3 + c_{33} x_3^2 + [3]. \end{aligned}$$

Le rette caratteristiche per O sono la $x_2 = x_3 = 0$ semplice, la $x_1 = x_3 = 0$ quintupla, la $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$ semplice (e analogamente in $\bar{S}_3$); a_{13}, a_{33}, c_{13}, c_{33} sono costanti ($c_{13} \neq 0$, $c_{13} \neq \frac{1}{2}$, $a_{33} \neq 0$).

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 9 luglio 1965