BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIORGIO TALENTI

Sugli invarianti della matrice hessiana.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 20
(1965), n.2, p. 220–226.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_220_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sugli invarianti della matrice hessiana

GIORGIO TALENTI (Genova) (1)

Sunto. - Si dimostrano delle identità che rappresentano i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice hessiana nella forma di divergenze.

Sia v funzione delle variabili $x_1, \dots, x_N$; consideriamo il polinomio caratteristico della matrice hessiana di v :

$$\det \|\partial^2 v / \partial x_i \partial x_k + \lambda \delta_{ik}\| = \lambda^N + e_1 \lambda^{N-1} + e_2 \lambda^{N-2} + \dots + e_N.$$

In questa nota si dimostra (n° 2) che e_r (invariante elementare di grado r ($r = 1, 2, \dots, N$) della matrice hessiana) si può rappresentare nella forma $\sum_{i=1}^N \partial P_i / \partial x_i$, dove P_i è funzione lineare di $\partial v / \partial x_k$, a coefficienti polinomi di grado $r - 1$ in $\partial^2 v / \partial x_i \partial x_k$.

A tale scopo si dimostra preliminarmente (n° 1) una proprietà del determinante jacobiano di più funzioni.

Lo studio degli invarianti elementari della matrice hessiana, che può trovare applicazione nella teoria delle equazioni di MONGE-AMPÈRE, è suggerito anche da talune questioni sulle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico. Infatti, come ha osservato BERNSTEIN, le soluzioni di un'equazione lineare di tipo ellittico del secondo ordine in due variabili, $a_{11}r + 2a_{12}s + a_{22}t = f$ (notazioni di MONGE), verificano una disuguaglianza del tipo: $r^2 + 2s^2 + t^2 + 2A(rt - s^2) \leq Bf^2$ (A, B costanti), dove $rt - s^2$ è il determinante hessiano e $r^2 + 2s^2 + t^2$ è la traccia del suo quadrato: osservando che: $rt - s^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(pt - qs) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y}(qr - ps)$, si ottengono importanti limitazioni a priori per dette soluzioni (BERS NIREMBERG, NIRENBERG).

In un lavoro di prossima pubblicazione mi propongo di studiare una estensione della disuguaglianza di BERNSTEIN al caso di più variabili, applicando quindi i risultati della presente nota alla ricerca di limitazioni a priori per le soluzioni delle equazioni ellittiche in più variabili.

(1) Questo lavoro fa parte dell'attività del gruppo di ricerca n. 23 del C. N. R.

1. Se f, g sono funzioni di classe C^2 delle variabili x, y , si verifica immediatamente che:

$$(1) \quad \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (fg_y - gf_y) + \frac{1}{2} (gf_x - fg_x) = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} f & g \\ f_y & g_y \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \begin{vmatrix} g & f \\ g_x & f_x \end{vmatrix}.$$

Si trova un risultato analogo sul determinante jacobiano di tre funzioni con le considerazioni seguenti. Se f, g sono funzioni di classe C^2 delle variabili x, y, z si ha:

$$\operatorname{div} (\nabla f \wedge \nabla g) = \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix};$$

servendosi di formule del tipo (1) si prova facilmente:

$$(2) \quad \operatorname{div} (\nabla f \wedge \nabla g) = 0.$$

Se h è funzione (scalare) di x, y, z e v è un 3-vettore, funzione di x, y, z , si ha $\operatorname{div} (hv) = \nabla h \cdot v + h \operatorname{div} v$; facendo $v = \nabla f \wedge \nabla g$, per (2):

$$\operatorname{div} (h \nabla f \wedge \nabla g) = \nabla h \cdot (\nabla f \wedge \nabla g) = \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)}.$$

Dunque il determinante jacobiano di tre funzioni f, g, h si può rappresentare nella forma:

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(h \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \right).$$

Sussiste in generale il seguente:

TEOREMA 1. Se $f_1, f_2, \dots, f_N$ sono funzioni di classe C^2 di N variabili $x_1, \dots, x_N$, risulta:

$$(3) \quad \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_N)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_N)} = \\ = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(-1)^{h+k} f_h \frac{\partial(f_1, \dots, \langle f_h \rangle, \dots, f_N)}{\partial(x_1, \dots, \langle x_k \rangle, \dots, x_N)} \right]^{(*)}. \\ (h = 1, 2, \dots, N)$$

(*) Adoperiamo la notazione: $(f_1, \dots, \langle f_h \rangle, \dots, f_N) = (f_1, \dots, f_{h-1}, f_{h+1}, \dots, f_N)$, ed altre analoghe.

DIMOSTRAZIONE. Riferiamoci, per esempio, al caso $h = 1$. La forma differenziale esterna d'ordine $N - 1$:

$$(4) \quad df_2 \wedge \dots \wedge df_N = \sum_{k=1}^N \frac{\partial(f_2, \dots, f_N)}{\partial(x_1, \dots, \langle x_k \rangle, \dots, x_N)} dx_1 \wedge \dots \\ \dots \langle dx_k \rangle \dots \wedge dx_N$$

è riducibile, dunque chiusa:

$$(5) \quad d(df_2 \wedge \dots \wedge df_N) = 0.$$

Se Φ è una forma differenziale esterna, si ha:

$$d(f_1 \Phi) = df_1 \wedge \Phi + f_1 d\Phi;$$

prendendo $\Phi = df_2 \wedge \dots \wedge df_N$, si trova, per (5):

$$d(f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_N) = df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_N.$$

Ma:

$$df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_N = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_N)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_N)} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_N,$$

mentre, per (4):

$$\begin{aligned} & d(f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_N) = \\ &= \sum_{k=1}^N d \left(f_1 \frac{\partial(f_2, \dots, f_N)}{\partial(x_1, \dots, \langle x_k \rangle, \dots, x_N)} \right) dx_1 \wedge \dots \langle dx_k \rangle \dots \wedge dx_N = \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} \left[f_1 \frac{\partial(f_2, \dots, f_N)}{\partial(x_1, \dots, \langle x_k \rangle, \dots, x_N)} \right] (-1)^{k+1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_N; \end{aligned}$$

pertanto:

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_N)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_N)} = \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[f_1 \frac{\partial(f_2, \dots, f_N)}{\partial(x_1, \dots, \langle x_k \rangle, \dots, x_N)} \right],$$

C.V.D.

2. Sia v funzione di classe C^3 delle variabili $x_1, \dots, x_N$; poniamo $p_i = \partial v / \partial x_i$, $p_{ij} = p_{ji} = \partial^2 v / \partial x_i \partial x_j$ ($i, j = 1, \dots, N$). Detti $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ gli autovalori (certamente reali) della matrice hessiana $\|p_{ij}\|$, indichiamo con $e_1, e_2, \dots, e_N$ le funzioni simmetriche elementari di $\lambda_1, \dots, \lambda_N$:

$$e_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_N, e_2 = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j, \dots, e_N = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_N.$$

Con queste notazioni, il polinomio caratteristico $\det. \|p_{ij} - \lambda \delta_{ij}\| = (-1)^N (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_N)$ si può scrivere nella forma:

$$\det. \|p_{ij} - \lambda \delta_{ij}\| = (-\lambda)^N + e_1 (-\lambda)^{N-1} + e_2 (-\lambda)^{N-2} + \dots + e_N;$$

pertanto $e_r (r = 1, \dots, N)$ è la somma dei determinanti dei minori principali di ordine r , estratti dalla matrice hessiana :

$$(6) \quad e_r = \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_r}^{1, N} \begin{vmatrix} p_{k_1 k_1} & p_{k_2 k_1} \dots p_{k_r k_1} \\ p_{k_1 k_2} & p_{k_2 k_2} \dots p_{k_r k_2} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ p_{k_1 k_r} & p_{k_2 k_r} \dots p_{k_r k_r} \end{vmatrix},$$

in particolare $e_1 = \sum_{i=1}^N p_{ii}$, $e_N = \det. || p_{ij} ||$.

Siccome il determinante a secondo membro di (6) non cambia se si permutano gli indici $k_1, k_2, \dots, k_r$ ed è nullo se due indici sono eguali, si può anche scrivere :

$$(7) \quad e_r = \frac{1}{r!} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{1, N} \begin{vmatrix} p_{k_1 k_1} & p_{k_2 k_1} \dots p_{k_r k_1} \\ p_{k_1 k_2} & p_{k_2 k_2} \dots p_{k_r k_2} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ p_{k_1 k_r} & p_{k_2 k_r} \dots p_{k_r k_r} \end{vmatrix}.$$

Osserviamo che, se si pone: $s_r = \lambda_1^r + \dots + \lambda_N^r (r = 0, 1, 2, \dots)$, valgono le relazioni di NEWTON :

$$e_1 = s_1, \quad e_2 = \frac{1}{2} (s_1^2 - s_2), \quad e_3 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 \\ s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix},$$

$$\dots, \quad e_N = \frac{1}{N!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{N-1} & s_{N-2} & s_{N-3} & \dots & N \\ s_N & s_{N-1} & s_{N-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix};$$

tali relazioni consentono di trovare rapidamente l'espressione di e_r , come polinomio di grado r nelle p_{ij} , se si tiene conto che :

$$s_r = tr || p_{ij} ||^r \quad (8).$$

Ad esempio :

$$s_1 = \sum_{i=1}^N p_{ii},$$

$$s_2 = tr || p_{ij} ||^2 = tr || \sum_{k=1}^N p_{ik} p_{jk} || = \sum_{i, j}^{1, N} p_{ij}^2,$$

$$s_3 = tr || p_{ij} ||^3 = tr || \sum_{h, k}^{1, N} p_{ik} p_{jh} p_{hk} || = \sum_{i, h, k}^{1, N} p_{ih} p_{ik} p_{hk},$$

(3) $tr A$ è la traccia della matrice A , ossia la somma degli elementi sulla diagonale principale di A .

quindi:

$$e_1 = \sum_{i=1}^N p_{ii} = \Delta v, \quad 2e_2 = s_1^2 - s_2 = \left(\sum_{i=1}^N p_{ii} \right)^2 - \sum_{i,j}^{1,N} p_{ij}^2,$$

$$6e_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3 = \left(\sum_{i=1}^N p_{ii} \right)^3 - 3 \sum_{i=1}^N p_{ii} \sum_{i,j}^{1,N} p_{ij}^2 +$$

$$+ 2 \sum_{i,h,k}^{1,N} p_{ih}p_{ik}p_{hk}.$$

TEOREMA 2. Si ha:

$$r! e_r = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{1, N} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \frac{\partial(v, p_{k_2}, \dots, p_{k_r})}{\partial(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r})} =$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{1, N} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \begin{vmatrix} p_{k_1} & p_{k_2} & \dots & p_{k_r} \\ p_{k_1 k_2} & p_{k_2 k_3} & \dots & p_{k_r k_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_1 k_r} & p_{k_2 k_1} & \dots & p_{k_r k_r} \end{vmatrix}.$$

TEOREMA 3. Posto $p = \nabla v$ (così che $p^2 = \sum_{i=1}^N p_i^2$), si ha ($r=2, 3, \dots, N$):

$$r! e_r = (r-1)! \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (p_i e_{r-1}) +$$

$$- \frac{r-1}{2} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^{1, N} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \frac{\partial(p^2, p_{k_2}, \dots, p_{k_{r-1}})}{\partial(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{r-1}})} =$$

$$= (r-1)! \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (p_i e_{r-1}) +$$

$$- \frac{r-1}{2} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^{1, N} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial p^2}{\partial x_{k_1}} & \frac{\partial p^2}{\partial x_{k_2}} & \dots & \frac{\partial p^2}{\partial x_{k_{r-1}}} \\ p_{k_2 k_1} & p_{k_3 k_2} & \dots & p_{k_{r-1} k_{r-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_{r-1} k_1} & p_{k_{r-2} k_2} & \dots & p_{k_{r-1} k_{r-1}} \end{vmatrix}.$$

DIMOSTRAZIONE. A norma di (7):

$$r! e_r = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{1, N} \frac{\partial(p_{k_1}, p_{k_2}, \dots, p_{k_r})}{\partial(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r})}$$

Per il teorema 1:

$$\frac{\partial(p_{k_1}, p_{k_2}, \dots, p_{k_r})}{\partial(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r})} = \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} p_{k_1} \begin{vmatrix} p_{k_2 k_2} & p_{k_3 k_3} & \dots & p_{k_r k_r} \\ p_{k_2 k_3} & p_{k_3 k_3} & \dots & p_{k_r k_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_2 k_r} & p_{k_3 k_r} & \dots & p_{k_r k_r} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial}{\partial x_{k_2}} p_{k_1} \begin{vmatrix} p_{k_2 k_1} & p_{k_3 k_1} & \dots & p_{k_r k_1} \\ p_{k_2 k_2} & p_{k_3 k_2} & \dots & p_{k_r k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_2 k_r} & p_{k_3 k_r} & \dots & p_{k_r k_r} \end{vmatrix} + \dots + \\
 & + (-1)^{r+1} \frac{\partial}{\partial x_{k_r}} p_{k_1} \begin{vmatrix} p_{k_1 k_1} & \dots & p_{k_{r-1} k_1} & p_{k_r k_1} \\ p_{k_1 k_2} & \dots & p_{k_{r-1} k_2} & p_{k_r k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_1 k_{r-1}} & \dots & p_{k_{r-1} k_{r-1}} & p_{k_r k_{r-1}} \end{vmatrix} .
 \end{aligned}$$

Allora :

$$\begin{aligned}
 (8) \quad r! e_r = & \sum_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{1, N} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \left[p_{k_1} \begin{vmatrix} p_{k_2 k_2} & p_{k_3 k_2} & \dots & p_{k_r k_2} \\ p_{k_2 k_3} & p_{k_3 k_3} & \dots & p_{k_r k_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_2 k_r} & p_{k_3 k_r} & \dots & p_{k_r k_r} \end{vmatrix} + \right. \\
 & - p_{k_2} \begin{vmatrix} p_{k_1 k_2} & p_{k_3 k_2} & \dots & p_{k_r k_2} \\ p_{k_1 k_3} & p_{k_3 k_3} & \dots & p_{k_r k_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_1 k_r} & p_{k_3 k_r} & \dots & p_{k_r k_r} \end{vmatrix} + \dots + \\
 & \left. + (-1)^{r+1} p_{k_r} \begin{vmatrix} p_{k_2 k_r} & \dots & p_{k_{r-1} k_r} & p_{k_1 k_r} \\ p_{k_2 k_2} & \dots & p_{k_{r-1} k_2} & p_{k_1 k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_2 k_{r-1}} & \dots & p_{k_{r-1} k_{r-1}} & p_{k_1 k_{r-1}} \end{vmatrix} \right] .
 \end{aligned}$$

Il teorema 2 segue dall'osservare che la quantità fra parentesi quadre, a secondo membro di (8), è lo sviluppo del determinante :

$$\begin{vmatrix} p_{k_1} & p_{k_2} & \dots & p_{k_r} \\ p_{k_1 k_2} & p_{k_2 k_2} & \dots & p_{k_r k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_1 k_r} & p_{k_2 k_r} & \dots & p_{k_r k_r} \end{vmatrix}$$

secondo gli elementi della prima riga.

Per provare il teorema 3 basta scrivere (8) nella forma :

$$\begin{aligned}
 r! e_r = & \sum_{k_1=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} p_{k_1} \sum_{k_2, \dots, k_r}^{1, N} \begin{vmatrix} p_{k_2 k_2} & p_{k_3 k_2} & \dots & p_{k_r k_2} \\ p_{k_2 k_3} & p_{k_3 k_3} & \dots & p_{k_r k_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_2 k_r} & p_{k_3 k_r} & \dots & p_{k_r k_r} \end{vmatrix} + \\
 - & \sum_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{1, N} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \begin{vmatrix} \sum_{k_2=1}^N p_{k_1 k_2} p_{k_2} & \sum_{k_3=1}^N p_{k_3 k_2} p_{k_2} & \dots & \sum_{k_r=1}^N p_{k_r k_1} p_{k_2} \\ p_{k_1 k_3} & p_{k_3 k_3} & \dots & p_{k_r k_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_1 k_r} & p_{k_3 k_r} & \dots & p_{k_r k_r} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + (-1)^{r+1} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^{1, N} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \left| \begin{array}{ccc} \sum_{k_r=1}^N p_{k_1 k_r} p_{k_r} & \dots & \sum_{k_r=1}^N p_{k_{r-1} k_r} p_{k_r} & \sum_{k_r=1}^N p_{k_1 k_r} p_{k_r} \\ p_{k_1 k_2} & & p_{k_{r-1} k_2} & p_{k_1 k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_1 k_{r-1}} & \dots & p_{k_{r-1} k_{r-1}} & p_{k_1 k_{r-1}} \end{array} \right| \\
 & = \sum_{k_1=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} (p_{k_1} (r-1)! e_{r-1}) + \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{1, N} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial p^2}{\partial x_{k_1}} & \frac{\partial p^2}{\partial x_{k_2}} & \dots & \frac{\partial p^2}{\partial x_{k_r}} \\ p_{k_1 k_2} & p_{k_2 k_2} & \dots & p_{k_1 k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_1 k_r} & p_{k_2 k_r} & \dots & p_{k_r k_r} \end{array} \right| + \dots + \\
 & + (-1)^{r+1} \frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^{1, N} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial p^2}{\partial x_{k_2}} & \dots & \frac{\partial p^2}{\partial x_{k_{r-1}}} & \frac{\partial p^2}{\partial x_{k_1}} \\ p_{k_1 k_2} & \dots & p_{k_{r-1} k_2} & p_{k_1 k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_1 k_{r-1}} & \dots & p_{k_{r-1} k_{r-1}} & p_{k_1 k_r} \end{array} \right| = \\
 & = \sum_{k_1=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} (p_{k_1} (r-1)! e_{r-1}) + \\
 & - \frac{r-1}{2} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^{1, N} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial p^2}{\partial x_{k_1}} & \frac{\partial p^2}{\partial x_{k_2}} & \dots & \frac{\partial p^2}{\partial x_{k_{r-1}}} \\ p_{k_1 k_2} & p_{k_2 k_2} & \dots & p_{k_{r-1} k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k_1 k_{r-1}} & p_{k_2 k_{r-1}} & \dots & p_{k_{r-1} k_{r-1}} \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

COROLLARIO. Si ha :

$$\begin{aligned}
 2e_2 &= \text{div}(p\Delta v) - \frac{1}{2} \Delta p^2, \\
 6e_3 &= \text{div}(p e_2) - \Delta(p^2 \Delta v) + \sum_{i, j}^{1, N} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (p_{ij} p^2).
 \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. L'espressione di e_2 si deduce immediatamente dal teorema 3, che fornisce :

$$2e_2 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (p_i e_1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 p^2}{\partial x_i^2}.$$

L'espressione di e_3 si trova osservando che, per il teorema 3 :

$$\begin{aligned}
 6e_3 &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (p_i e_2) - \sum_{i, j}^{1, N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial p^2}{\partial x_i} p_{ij} - \frac{\partial p^2}{\partial x_j} p_{ij} \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (p_i e_2) - \sum_{i, j}^{1, N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (p^2 p_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (p^2 p_{ij}) \right].
 \end{aligned}$$