BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CARLO SILLI

Sulla stabilità dei missili con massa variabile.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 20
(1965), n.2, p. 194–209.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_194_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla stabilità dei missili con massa variabile.

CARLO SILLI (Pisa) (*)

Sunto. - *Nel presente lavoro si studia il comportamento delle oscillazioni, e in particolare la loro stabilità, di un missile di massa variabile, la cui variazione di massa avviene per consumo di carburante ed espulsione di scorie. In un primo tempo si studia, sotto certe ipotesi, il caso della non linearità delle azioni aereodinamiche nell'angolo di attacco, successivamente si esamina il caso lineare.*

Summary. - *In this paper we study the oscillations and the oscillation stability of a variable mass rocket whose mass variation proceed from fuel consumption and scorie expulsion. Firstly we study, under proper assumptions, the case of non linearity of aereodynamical forces in the attack corner, then linear case is discussed.*

1. - Introduzione.

H. G. GISPERT in un suo lavoro [1] ⁽¹⁾ studia il comportamento delle oscillazioni di un missile nella ipotesi che abbia massa costante, che il suo centro di massa G , pur muovendosi di moto rettilineo sia soggetto a diverse leggi di velocità e che inoltre le sue oscillazioni, che avvengono in un piano invariabile, siano sufficientemente piccole in modo che le azioni aereodinamiche si possano assumere, con buona approssimazione, come funzioni lineari dell'angolo d'attacco.

Al termine di questo lavoro l'Autore accenna rapidamente anche al problema nel caso in cui la massa sia variabile col tempo traendone un risultato di stabilità sotto un'ipotesi di monotonia per una funzione caratteristica dell'equazione di moto.

Data ora l'importanza che hanno nella pratica i missili, e più in generale i corpi con massa variabile, con variabilità non relativistica, ma dovuta al consumo di carburante e all'espulsione di scorie, ci è parso interessante studiare il comportamento delle loro oscillazioni e quindi la stabilità nell'ipotesi che la loro massa sia

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche, per il 1964-'65. Gruppo di ricerca n° 7.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

variabile rimuovendo l'ipotesi della linearità delle azioni aereodinamiche quali funzioni dell'angolo d'attacco.

In un primo tempo viene impostato il problema generale e in particolare la seconda equazione cardinale di moto; in un secondo tempo viene esaminato detto problema nel caso non lineare sotto alcune ipotesi di carattere fisico per le sue grandezze caratteristiche. Successivamente viene esaminato il caso lineare.

Scopo dunque del presente lavoro è quello di studiare la stabilità delle oscillazioni di un missile con massa variabile $m(t)$ la cui variazione di massa avviene per consumo di carburante ed espulsione di scorie.

2. - Posizione del problema.

a) Sia G il centro di massa del missile R , con massa variabile, preso in esame. Sia inoltre $\mathbf{v}$ la velocità di un punto O^* dell'asse longitudinale del missile R , grandezza questa che supponiamo di direzione e verso invariabili.

Si consideri la terna $T(O^*; x, y, z)$ con l'asse z coincidente con l'asse longitudinale del missile e col semiasse positivo rivolto verso poppa, l'asse y situato nel piano π che contiene l'asse z e $\mathbf{v}$, e l'asse x tale da formare coi due precedenti una terna sinistrorsa.

Supporremo poi che il moto del missile R sia tale che il piano π durante il moto resti invariabile. In detto piano indichiamo con α l'angolo di attacco formato dalla direzione positiva della velocità e dal semiasse negativo dell'asse delle z , angolo questo misurato positivamente in senso orario rispetto ad O^*x .

Si ha per la prima equazione cardinale vettoriale di moto [2]:

$$(2.1) \quad m \ddot{\mathbf{G}} = \mathbf{F} - \mathbf{p}_R + m(\ddot{\mathbf{G}})_R + 2m \omega \wedge (\dot{\mathbf{G}})_R,$$

dove $m = m(t)$ è la massa del missile R al tempo t , $\mathbf{F}$ la risultante delle forze esterne indipendenti dalle forze che dipendono dal distacco delle particelle e $\mathbf{p}_R$ è dato da [3]:

$$\mathbf{p}_R = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S-S_1} \rho \mathbf{V}_R dS,$$

con $\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_P - \dot{\mathbf{P}}$ dove $\dot{\mathbf{P}}$ è la velocità del punto P prima del distacco e $\mathbf{V}_P$ la velocità immediatamente dopo il distacco.

La (2.1) ci fornisce il moto del centro di massa che, poichè supponiamo assegnati e noti $(\dot{\mathbf{G}})_R$, $\mathbf{F}$ e $\mathbf{p}_R$ risulterà noto una volta che sia determinato ω .

Si ha poi per la seconda equazione cardinale della dinamica per il missile R , con centro di riduzione dei momenti nel centro di massa G di R [4]:

$$(2.2) \quad \sigma_G \omega + \omega \wedge \sigma_G \omega = \mathbf{M}_G - \mu_G,$$

con σ_G omografia d'inerzia del corpo riferita al centro di massa e data da:

$$\sigma_G = - \int_S \rho [(P - G) \wedge]^2 dS,$$

e μ_G momento delle forze di distacco dato da [5]:

$$(2.3) \quad \mu_G = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S-S_1} \rho (P - G) \wedge \mathbf{V}_R dS,$$

infine $\mathbf{M}_G$ il momento rispetto al centro di massa G di tutte le forze diverse dalle forze di distacco.

b) Con riferimento all'intervallo infinito di tempo $(t_0; +\infty)$, con $t_0 \geq 0$, per il tempo t , sia $I(t)$ il momento d'inerzia del missile R rispetto alla retta parallela all'asse x per il centro di massa G , grandezza questa che, insieme alla massa $m(t)$, è positiva e supponiamo sempre decrescente con t in $(t_0; +\infty)$ e con estremo inferiore positivo.

Si ha ora nel nostro caso:

$$\omega = p \mathbf{i} = \dot{\alpha} \mathbf{i},$$

per cui la (2.2) fornisce:

$$(2.4) \quad I(t) \ddot{\alpha} = M_{GX} - \mu_{GX}.$$

Supponiamo che sia:

$$\mu_G = 0,$$

cosa questa che equivale all'ipotesi, molto naturale, che l'espulsione di materia sia simmetrica rispetto all'asse longitudinale del missile R .

Si ha allora, dalla (2.4), per l'equazione di moto attorno al centro di massa:

$$(2.4') \quad I(t) \ddot{\alpha} = M_{GX}.$$

Sia il centro di spinta O del missile situato sull'asse longitudinale e $l(t)$ la sua distanza dal centro di massa G , distanza che

conveniamo di prendere positiva se 0 è poppa rispetto a G , negativa nel caso opposto.

Le forze aereeodinamiche dipendono da un'opportuna velocità di traslazione, oltre che da ω .

Assumiamo il punto 0^* , come il punto di R che ha questa velocità.

Per la componente del momento secondo l'asse è valida la seguente espressione [6]:

$$(2.5) \quad M_{GX} = -K_H \rho d^3 v^2 \sin \alpha - K_M \rho d^4 v \dot{\alpha},$$

dove ρ è la densità dell'aria che supponiamo costante ovunque, d il diametro del missile e dove per i coefficienti K_M e K_H si ha [7]:

$$(2.6) \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ K_M = \frac{K_D + K_L \cos \alpha}{d} l(t) \\ \downarrow \\ K_H = \frac{K_M l(t)}{d}, \end{array}$$

dove, a sua volta, K_L è una grandezza costante e positiva e $K_D(\alpha)$ è una funzione pari, positiva di α e derivabile almeno due volte [8]:

$$(2.7) \quad K_D = K_D(\alpha),$$

K_M ha il segno di l , mentre K_H è sempre positiva.

Indichiamo con $f(\alpha)$ la funzione positiva:

$$(2.7') \quad f(\alpha) = K_D(\alpha) + K_L \cos \alpha,$$

si ha dalla (2.4') per l'equazione di moto attorno al centro di massa:

$$(2.8) \quad \ddot{\alpha}(t) + A(t)f(\alpha)\dot{\alpha} + B(t)f(\alpha)\sin \alpha(t) = 0,$$

dove $A(t)$ e $B(t)$ sono date da:

$$(2.9) \quad A(t) = \frac{\rho d^2 l'(t) v(t)}{I(t)} \quad \text{e} \quad B(t) = \frac{\rho d^2 l(t) v^2(t)}{I(t)}.$$

La (2.8) ci fornisce, dunque, la legge del moto attorno alla parallela dell'asse delle x per il centro di massa.

Lo studio delle oscillazioni del missile R nel piano verticale di moto è in questo modo ricondotto allo studio degli integrali dell'equazione differenziale non lineare (2.8) e a tal fine iniziamo questo studio sotto diverse ipotesi per le grandezze caratteristiche del fenomeno.

3. - Caso delle oscillazioni non lineari con $A(t)$ e $B(t)$ costanti.

Qualora nella (2.8) le due funzioni:

$$A(t) = \frac{\rho d^2 l^2(t) v(t)}{I(t)} \quad \text{e} \quad B(t) = \frac{\rho d^2 l(t) v^2(t)}{I(t)},$$

siano, per $t_0 \leq t < +\infty$, costanti e B positiva (cosa questa effettivamente possibile anche in presenza di espulsione di massa) allora la (2.8) si scrive:

$$(3.1) \quad \ddot{\alpha} + Af(\alpha)\dot{\alpha} + Bf\alpha \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

con A e B costanti positive.

Vogliamo dimostrare che la posizione $\alpha = 0$ è asintoticamente stabile.

La (3.1), moltiplicando per $\dot{\alpha}$ diviene:

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 + G(\alpha) \right\} = - Af(\alpha) \dot{\alpha}^2,$$

dove è:

$$G(\alpha) = B \int_0^\alpha f(s) \operatorname{sen} s ds,$$

funzione pari di α , nulla per $\alpha = 0$, positiva e crescente per $0 < \alpha \leq \pi/2$, positiva e decrescente per $-\pi/2 \leq \alpha < 0$.

Innanzitutto è importante osservare che la funzione:

$$(3.3) \quad V(\alpha; \beta) = \frac{1}{2} \beta^2 + G(\alpha), \quad \text{con} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \downarrow \\ -L \leq \beta \leq L \end{array}$$

connessa al sistema differenziale:

$$(3.4) \quad \begin{array}{l} \dot{\alpha} = \beta \\ \dot{\beta} = - Af(\alpha)\beta - Bf(\alpha) \operatorname{sen} \alpha, \end{array}$$

associato alla (3.1) [9] è non crescente lungo ogni traiettoria $\gamma: \{\alpha(t); \dot{\alpha}(t)\}$ integrale del sistema (3.4). E anzi se ha per limite zero, per $t \rightarrow +\infty$, sempre lungo la γ , allora si ha:

$$(3.5) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\alpha}(t) = 0.$$

Inoltre si vede subito che nessuna traiettoria di (3.4) ha a comune un arco con l'asse $\dot{\alpha} = 0$.

In queste ipotesi, per l'espressione di $\frac{dV}{dt}$, non è applicabile il secondo teorema di LIAPUNOV sulla stabilità asintotica [10] e per questo procediamo direttamente nel modo seguente.

Incominciamo con l'osservare che preso un insieme I ove per la funzione $V(\alpha; \dot{\alpha})$ si ha:

$$V(\alpha, \dot{\alpha}) \leq B \int_0^{\bar{\alpha}} f(\alpha) \operatorname{sen} \alpha d\alpha = BG(\bar{\alpha}),$$

con $-\frac{\pi}{2} < \bar{\alpha} < \frac{\pi}{2}$ e considerato un punto $P_0 = (\alpha_0; \dot{\alpha}_0)$ dell'insieme I la traiettoria che esce da P_0 non può, per $t \rightarrow +\infty$, uscire da I .

Infatti se la traiettoria che ha origine in P_0 uscisse da I vi sarebbe necessariamente un arco di codesta traiettoria esterno ad I , sempre interno alla striscia delimitata dai lati $\alpha = -\pi/2$ e $\alpha = \pi/2$ ed esterno alla retta $\dot{\alpha} = 0$, poichè, come è stato detto, la traiettoria non può avere origine a comune con l'asse delle α . Ma lungo codesto arco sarebbe $\frac{dV}{dt} > 0$ il che è assurdo.

Risulta quindi, come si voleva, che la traiettoria con origine in P_0 appartenente a I resta in I .

Ciò premesso resta da far vedere che una qualunque traiettoria $\gamma: \{\alpha(t); \dot{\alpha}(t)\}$ il cui punto iniziale è $P_0 \in I$ tende, per $t \rightarrow +\infty$, all'origine del piano $(\alpha; \dot{\alpha})$.

Poichè la funzione:

$$V(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 + G(\alpha),$$

è positiva e non crescente lungo ogni traiettoria ne discende che il limite:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V[\alpha(t); \dot{\alpha}(t)] = V_0,$$

esiste positivo o nullo lungo ogni traiettoria. Vogliamo dimostrare che è $V_0 = 0$.

Sia per assurdo per una traiettoria γ $V_0 > 0$. Necessariamente una almeno delle due funzioni di t , $\alpha(t)$ e $\dot{\alpha}(t)$ devono, lungo γ , non ammettere limite. Se infatti esistessero i limiti di $\alpha(t)$ e $\dot{\alpha}(t)$ allora detto Q il punto rappresentativo nel piano delle fasi della posizione limite della traiettoria γ , poichè Q non è l'origine, è un punto regolare per il sistema di equazioni differenziali e da esso esce una e una sola traiettoria che deve necessariamente entrare nella regione ove $V < V(Q) = V_0$. Si ha quindi che la traiettoria uscente da P_0 non si arresta in Q , e questo va contro l'ipotesi.

Se ora $\frac{dV}{dt}$ ammette limite determinato e finito lungo γ , è necessariamente:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dV}{dt} = 0.$$

Se infatti fosse:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dV}{dt} = -K^2 \neq 0,$$

per t sufficientemente grande si avrebbe:

$$V(t) - V_1 < -(K^2 - \varepsilon)(t - t_1),$$

con $K^2 - \varepsilon > 0$ e $t > t_1$, e quindi:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = -\infty,$$

il che è assurdo.

Si ha quindi, dunque:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dV}{dt} = 0.$$

Ma ora, per l'espressione di $\frac{dV}{dt}$ e per il teorema del confronto, esiste il limite di $\dot{\alpha}(t)$ e si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\alpha}(t) = 0.$$

Ancora dall'espressione della funzione $V(\alpha; \dot{\alpha})$ ne discende, per il teorema di CAUCHY, che esiste il limite di $\alpha(t)$ e, se questo non è nullo, si cade in assurdo.

Rimane da esaminare il caso in cui $\frac{dV}{dt}$ non ammetta limite.

Il massimo limite di $\frac{dV}{dt}$ deve essere nullo. Se infatti fosse negativo, con un ragionamento analogo a quello fatto poco sopra si mostra che si cadrebbe in assurdo.

Porremo dunque:

$$(3.6) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dV}{dt} = -\lambda^2 < 0.$$

con λ finito, perchè $P_0 \in I$.

Dimostriamo che $\lambda = 0$.

Poichè il limite di $V(t)$ è V_0 fissato un η positivo e arbitrario esiste un valore del tempo T per cui per $t > T$ si ha:

$$(3.7) \quad V(t) - V_0 < \eta.$$

Inoltre, ancora per la definizione di minimo limite si ha che esiste una successione $\{t_n\}$ tale che posto :

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=t_n} = -\lambda_n^2,$$

si ha :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^2 = \lambda^2.$$

Fissato un $\eta > 0$ si consideri un $t_n > T(\eta)$.

Inoltre fissato un $\varepsilon^2 > 0$ tale che sia :

$$K^2 = \lambda^2 - \varepsilon^2 > 0,$$

dalla precedente, per $n > n_0$ ($t_n > T' \geq T$), tutti i valori λ_n soddisfano le limitazioni :

$$\lambda^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \leq \lambda_n^2 \leq \lambda^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Preso uno di questi valori t_n consideriamo il primo valore $t = \bar{t}_n > t_n$ (che esiste per la (3.6')), ove è :

$$(3.8) \quad \left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=\bar{t}_n} = -K^2.$$

Posto anche :

$$\lambda_n^2 - K^2 = a_n^2,$$

è :

$$a_n^2 > \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Allora per ogni t_n e per il corrispondente $\bar{t}_n$ l'oscillazione della funzione :

$$\frac{dV}{dt},$$

è inferiormente limitata.

Poichè :

$$\frac{d^2V}{dt^2}$$

è ovunque limitata in I ne discende che l'ampiezza di tutti gli intervalli $(t_n; \bar{t}_n)$ è limitata inferiormente da un numero positivo τ .

D'altra parte in $(t_n; \bar{t}_n)$, per la (3.8) e per il teorema degli accrescimenti finiti si ha :

$$V(t) - V(t_n) = \frac{\overline{dV}}{dt}(t - t_n) < -K^2(t - t_n),$$

per $t \in (t_n; \bar{t}_n)$.

Ora da questa e dalla (3.7), si ha per $t_n > T$:

$$t - t_n < \frac{\eta}{K^2},$$

e quindi anche:

$$\bar{t}_n - t_n < \frac{\eta}{K^2}.$$

Da questa ne discende che fissato un numero $\eta < K^2\tau$ si può determinare un T tale che per ogni $t_n > T$ è:

$$\bar{t}_n - t_n < \tau.$$

cosa questa in contraddizione col risultato precedente.

Si ha dunque che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dV}{dt} = 0,$$

e perciò esiste il limite:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dV}{dt},$$

ed è necessariamente nullo.

Ma per quanto già osservato si ha che esistono ambedue i limiti di $\alpha(t)$ e $\dot{\alpha}(t)$ e questo va contro l'ipotesi che sia $V_0 > 0$.

Se ne ha allora che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[x(t); \dot{\alpha}(t)] = 0,$$

sempre lungo ogni traiettoria $\gamma: \{\alpha(t); \dot{\alpha}(t)\}$ e quindi, come si voleva, valgono le (3.5).

Se ne ha dunque che nelle ipotesi precedentemente enunciate per le grandezze caratteristiche del fenomeno. le oscillazioni del missile R sono stabili per tutte le condizioni iniziali $\alpha(t_0)$ e $\dot{\alpha}(t_0)$ appartenenti all'insieme I precedentemente definito.

4. - Caso delle oscillazioni non lineari con $A(t)$ a $B(t)$ funzioni note e positive del tempo.

Rimuovendo l'ipotesi del paragrafo precedente noi supponiamo ora che nell'equazione differenziale:

$$(4.1) \quad \ddot{\alpha}(t) + A(t)f(\alpha)\dot{\alpha}(t) + B(t)f(\alpha)\text{sen } \alpha(t) = 0,$$

i coefficienti $A(t)$ e $B(t)$, anzichè costanti siano funzioni note e positive del tempo in $(t_0; +\infty)$ e soddisfacenti le seguenti limi-

tazioni:

$$(4.2) \quad 0 < \bar{B} \leq B(t) \leq \bar{B}, \quad 0 \leq A(t) \leq \bar{A}.$$

Considerata la funzione associata alla (4.1):

$$V(t, \alpha, \dot{\alpha}) = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 + B(t) \bar{G}(\alpha),$$

dove:

$$\bar{G}(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(s) \operatorname{sen} s ds$$

è una funzione pari e positiva di α in $(-\pi/2; \pi/2)$ nulla soltanto per $\alpha=0$, decrescente per $-\pi/2 \leq \alpha < 0$, crescente per $0 < \alpha \leq \pi/2$; questa funzione $V(t, \alpha, \dot{\alpha})$ è definita positiva poichè per la (4.2') si ha:

$$V(t, \alpha, \dot{\alpha}) \geq \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 + \bar{B} \bar{G}(\alpha).$$

Per la derivata di $V(t, \alpha, \dot{\alpha})$ lungo una traiettoria $\gamma: \{\alpha(t); \dot{\alpha}(t)\}$ integrale del sistema differenziale:

$$\begin{array}{l} \wedge \quad \dot{\alpha} = \beta \\ \updownarrow \\ \vee \quad \dot{\beta} = -A(t)f(\alpha)\beta - B(t)f(\alpha)\operatorname{sen} \alpha, \end{array}$$

associato alla (4.1), si ha, tenendo conto della (4.1) stessa:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{B}(t) \cdot \bar{G}(\alpha) - A(t)f(\alpha)\dot{\alpha}^2.$$

Sia ora $\dot{B}(t)$ non necessariamente negativo, ma tale che la derivata precedente non sia mai positiva.

In queste ipotesi, e poichè si ha per la funzione $V(t, \alpha, \dot{\alpha})$:

$$V(t, \alpha, \dot{\alpha}) \leq \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 + \bar{B} \bar{G}(\alpha),$$

risulta garantita la stabilità uniforme degli integrali del sistema associato all'equazione differenziale di moto (4.1) [10].

Ne risulta dunque che nelle ipotesi precedentemente citate per le grandezze caratteristiche del missile R , e per la velocità, scelto un numero σ positivo e arbitrario si può determinare un numero $\delta = \delta(\sigma) > 0$ tale che se per un qualunque $t'_0 > t_0$ si ha:

$$|\alpha(t'_0)| < \delta \quad \text{e} \quad |\dot{\alpha}(t'_0)| < \delta,$$

si ha anche:

$$|\alpha(t)| < \varepsilon \text{ e } |\dot{\alpha}(t)| < \varepsilon,$$

per $t'_0 \leq t + \infty$.

Inoltre, nel caso in cui $B(t)$ sia minore di zero, se per certe condizioni iniziali e per particolari ipotesi sulle funzioni $A(t)$, $B(t)$ e $f(\alpha)$ la traiettoria $\gamma: |\alpha(t); \dot{\alpha}(t)|$ corrispondente a dette condizioni iniziali è tale che fissato un ε positivo e arbitrario si può determinare una costante K_γ tale che in tutti i punti di γ esterni al cerchio $C(\varepsilon, 0)$ sia, per ogni t :

$$\frac{dV}{dt} < -K_\gamma^2,$$

allora la γ è anche asintoticamente stabile.

Ciò non sia. In questa ipotesi, per la proprietà della V e di γ , la curva γ resta, per $t > \bar{t}_0$, tutta esterna a un opportuno cerchio $C(\varepsilon; 0)$ con centro nell'origine. Su di essa si ha allora la relazione precedente, integrandola risulta:

$$0 < V(t) - V_0 < -K_\gamma^2(t - t_0),$$

e passando al limite per $t \rightarrow +\infty$ si cade in assurdo. Quindi la curva γ tende all'origine.

5. - Caso delle oscillazioni lineari e di $A(t)$ e $B(t)$ funzioni note e positive del tempo.

È ora importante osservare che l'equazione differenziale (2.8) che regola le oscillazioni del missile R ammette come integrale evidente l'integrale identicamente nullo a cui corrisponde il moto del missile durante il quale l'asse longitudinale di R coincide con la direzione costante della velocità.

Inoltre, per i risultati dei paragrafi precedenti, si ha che per particolari ipotesi sulle grandezze caratteristiche esistono moti del missile R tali che l'angolo d'attacco $\alpha(t)$ si mantiene in un conveniente intorno di $\alpha = 0$.

Ora lavorando in modo analogo al GISPERS [11], limitandoci cioè alla classe di tutti i moti possibili del missile R , attorno alla retta, parallela all'asse delle x , per il centro di massa, per cui le sue oscillazioni $\alpha(t)$ sono tali che per le azioni aereodinamiche si possono assumere delle espressioni lineari in α , ci proponiamo di esaminare la stabilità in grande del missile R quando $A(t)$ e $B(t)$ sono generiche funzioni positive del tempo con limite positivo per $t \rightarrow +\infty$.

Linearizzando la (2.8) e supponendo, come è naturale, che la funzione $f(\alpha)$ definita dalle (2.7') si possa sostituire con la costante positiva $K_L + K_{D_0}$, con $K_{D_0} = K_D(0)$, si ha dalla (2.8) per le piccole oscillazione $\alpha(t)$:

$$(5.1) \quad \ddot{\alpha}(t) + A(t)\dot{\alpha}(t) + B(t)\alpha(t) = 0.$$

dove è ora:

$$(5.2) \quad A(t) = (K_{D_0} + K_L) \frac{\rho d^2 l^2(t) v(t)}{I(t)} \quad \text{e} \quad B(t) = (K_{D_0} + K_L) \frac{\rho d^2 l(t) v^2(t)}{I(t)},$$

con $K_{D_0} + K_L$ costante positiva.

Ci proponiamo ora di studiare la stabilità del missile nel caso in cui il suo centro di spinta si mantiene a poppa rispetto a G e per $t \rightarrow +\infty$ tende a una posizione limite distinta dalla posizione limite di G , e nell'ipotesi che $A(t)$ e $B(t)$ tendono a limiti determinati (e positivi) per $t \rightarrow +\infty$.

Si può allora porre:

$$\begin{aligned} \wedge \quad A(t) &= A_\infty + C_1(t) \\ \vee \quad B(t) &= B_\infty + C_2(t), \end{aligned}$$

dove è:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C_h(t) = 0, \quad (\text{per } h = 1; 2).$$

Considerata ora l'equazione ausiliaria a coefficienti costanti:

$$\ddot{\alpha}(t) + A_\infty \dot{\alpha}(t) + B_\infty \alpha(t) = 0,$$

se le grandezze caratteristiche del missile sono tali che valga la relazione:

$$A_\infty < 2\sqrt{B_\infty},$$

allora si ha, per ogni integrale della (5.1), [12]:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\alpha}(t) = 0,$$

qualsiasi siano le condizioni iniziali $\alpha(t_0)$ e $\dot{\alpha}(t_0)$.

Ne risulta quindi che sotto le ipotesi precedentemente enunciate il missile R è dinamicamente stabile in grande.

6. - Caso delle oscillazioni lineari e di $B(t)$ funzione negativa del tempo.

Fino ad ora, nei paragrafi precedenti, noi abbiamo studiato, sotto diverse ipotesi, la stabilità del missile R nel caso in cui la funzione $B(t)$, costante o effettivamente variabile col tempo, si mantiene positiva per $t_0 \leq t < +\infty$.

Ora ci proponiamo di rimuovere questa ipotesi supponendo che $B(t)$, e quindi anche per la (2.9'') l'ascissa $l(t)$ del centro di spinta O rispetto al centro di massa G , possa essere negativa e al limite anche nulla (fermo restando il segno positivo di $A(t)$), cosa questa che corrisponde al fatto fisico che il centro di spinta O , durante il moto del missile R , si può trovare anche a prora rispetto al centro di massa G , circostanza questa che spesso avviene nella pratica [13].

Anche in questo studio ci limitiamo, come nel paragrafo precedente, alla classe dei moti possibili del missile R per cui le sue oscillazioni sono tali che per le azioni aereodinamiche si possono ancora assumere espressioni lineari in α .

Se ne ha ancora per l'equazione di moto:

$$(6.1) \quad \ddot{\alpha}(t) + A(t)\dot{\alpha}(t) + B(t)\alpha(t) = 0,$$

dove $A(t)$ e $B(t)$ sono date ancora dalle (5.2).

Per questo studio usufruiamo del criterio seguente [14]:

Detto ancora t_0 un qualunque valore di t sia, per $t \geq t_0$, $A(t)$ una funzione continua tale che esista, finito o infinito il limite:

$$(6.2) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t A(\xi) d\xi,$$

e sia, per ogni $t_0 \leq t < +\infty$, $B(t)$ una funzione continua con:

$$(6.3) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = 0.$$

a) Qualora oltre alle ipotesi (6.2) e (6.3) i coefficienti $A(t)$ e $B(t)$ sono tali da soddisfare le seguenti ipotesi:

$$(6.4) \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \int_t^{+\infty} e^{-a(\xi)} \cdot d\xi \int_{t_0}^{\xi} e^{a(u)} |B(u)| du < 1 \text{ e} \\ \downarrow \\ \int_t^{+\infty} e^{-a(\xi)} d\xi < +\infty, \end{array}$$

dove:

$$a(t) = \int_{t_0}^t A(\xi) d\xi,$$

e $t_0 \leq t < +\infty$; allora:

1) Ogni integrale della (6.1) si mantiene limitato.

2) Fissata comunque una costante c non nulla, esiste uno e un solo integrale della (6.1) che soddisfa le condizioni:

$$(6.5) \quad \dot{\alpha}(t_0) = c \neq 0; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 0.$$

b) Qualora invece i coefficienti della (6.1) oltre che alle ipotesi (6.2) e (6.3), soddisfano anche alle seguenti, anzichè alle (6.4):

$$(6.6) \quad \begin{array}{l} \uparrow B(t) < 0, \text{ per } t_0 \leq t < +\infty \\ \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\alpha(\xi)} d\xi < +\infty \text{ e} \\ \downarrow \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\alpha(\xi)} \cdot d\xi \int_{t_0}^{\xi} e^{\alpha(u)} |B(u)| du = +\infty, \end{array}$$

allora fissata arbitrariamente una costante c diversa da zero, esiste uno e un solo integrale della (6.1) soddisfacente le condizioni:

$$(6.7) \quad \dot{\alpha}(t_0) = c \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\alpha}(t) = 0,$$

ovvero alle:

$$(6.8) \quad \alpha(t_0) = c \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\alpha}(t) = 0,$$

mentre ogni altro integrale non identicamente nullo della (6.1) diverge, per $t \rightarrow +\infty$, $\alpha \pm \infty$.

c) Premesso questo, noi, in questo studio, assumiamo per l'ascissa $l(t)$ del centro di spinta O rispetto al centro di massa G l'espressione:

$$(6.9) \quad l(t) = \frac{\lambda(t)}{f_1(t)},$$

e supponiamo inoltre che il moto del punto O^* , solidale con R e di cui al paragrafo 2., sia definito dalla legge di velocità:

$$(6.10) \quad v(t) = \frac{u(t)}{f_2(t)},$$

dove, mentre $u(t)$ è una funzione positiva, $\lambda(t)$ è negativa ed entrambe queste due funzioni sono limitate superiormente e inferiormente da:

$$\lambda_m \leq \lambda(t) \leq \lambda_M < 0 < u_m \leq u(t) \leq u_M,$$

e per il resto arbitrarie. $f_1(t)$ è una funzione positiva e monotona

non decrescente in $(t_0; +\infty)$; $f_2(t)$ una funzione positiva e monotona e tale che assieme a $f_1(t)$, $\lambda(t)$, $u(t)$ facciano sì che valgano le relazioni:

$$(6.11) \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (K_{D_0} + K_L) \frac{\rho d^2 \lambda(t) u^3(t)}{f_1(t) f_2^2(t) I(t)} = 0 \quad \text{e} \\ \downarrow \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t e^{-a(\xi)} d\xi < +\infty. \end{array}$$

Allora il missile può ancora essere stabile.

E precisamente, nelle ipotesi in cui l'integrale (6.4') sia convergente a un valore minore di uno, cioè se si ha:

$$\int_t^{+\infty} e^{-a(\xi)} d\xi \int_{t_0}^{\xi} e^{a(u)} |B(u)| du < 1,$$

per i risultati del punto a) si ha che esiste un integrale dell'equazione (6.1) tale che per esso è:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 0,$$

con $\hat{\alpha}(t_0)$ valore arbitrariamente assegnato.

Nell'ipotesi invece che l'integrale (6.4') risulti infinito allora (per b)) esiste uno e un sol integrale per cui si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{\alpha}(t) = 0,$$

quando $\alpha(t_0)$ (oppure $\hat{\alpha}(t_0)$) è un valore arbitrariamente assegnato e non nullo.

d) Si noti ora che la stabilità esaminata in questo paragrafo è una stabilità condizionata poichè per le ipotesi fatte, a seconda dei casi, una volta fissata arbitrariamente $\alpha(t_0)$ resta determinata $\hat{\alpha}(t_0)$ e viceversa.

Inoltre si noti che i ragionamenti fatti in questo paragrafo valgono tanto nel caso in cui:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = 0,$$

quanto nel caso in cui questo limite sia diverso da zero, fatto questo che ci dice che i risultati di questo paragrafo valgono tanto nel caso in cui il centro di spinta tende, per $t \rightarrow +\infty$, a una posizione limite, distinta o coincidente colla posizione limite del centro di massa G , purchè resti nella parte anteriore del missile R .

Terminiamo con l'osservare che dai risultati di questo ultimo paragrafo la stabilità, anche se condizionata, non solo si ha per una classe di moti la cui velocità decresce col tempo per $t \rightarrow +\infty$, ma anche nel caso del moto uniforme e per una particolare classe di moti accelerati.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. G. GISPERT, *Über die Nickschwingungen von Flugkörpern bei verschiedenen Geschwindigkeitsgesetzen*, ZAMM 41 (1961) Heft 7/8, Seite 325-330.
- [2] T. MANACORDA, *Il moto di un corpo con massa variabile*, Rivista di Matematica dell'Università di Parma, 3 (1952) pp. 361-373.
- [3] — — , Loc. Cit. [2].
- [4] — — , Loc. Cit. [2].
- [5] — — , Loc. Cit. [2].
- [6] J. B. ROSSER, R. R. NEWTON, G. L. GROSS, *Mathematical Theory of Rocket Flight*, prima edizione, New York and London, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1947, Capitolo I, Paragrafo II.
- [7] — — , Loc. Cit. [6].
- [8] — — , Loc. Cit. [6].
- [9] G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte Prima, II^a Edizione, pag. 3, Zanichelli Editore, Bologna (1948).
- [10] G. SANSONE, R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Matematiche, Edizioni Cremonese, Roma, pag. 579, 580 e 583.
- [11] H. G. GISPERT, Loc. Cit. [1].
- [12] L. CESARI, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Seconda Edizione, Springer Verlag (1963), p. 34.
- [13] A. SIGNORINI, *Complementi alla dinamica dei giroscopi*, Atti Accad. Naz. Lincei. Memorie, Classe di Scienze Fis. e Mat. (8), 1 (1946), 1-41.
- [14] T. MANACORDA, *Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$* , Annali di Matematica Pura e Applicata, Serie IV (1947), pp. 73-83.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 24 aprile 1965