BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

TINO ZEULI

Su alcune formule notevoli in magnetofluidodinamica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 20
(1965), n.2, p. 191–193.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_191_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Su alcune formule notevoli in magnetofluidodinamica

TINO ZEULI (Torino)

Sunto. - Si rilevano alcune formule notevoli in m. f. d.

1. Consideriamo le equazioni fondamentali della magnetofluidodinamica nel caso di un fluido perfetto di conduttività elettrica grande da poterla ritenere infinita, e soggetto a forze di massa derivanti da un potenziale:

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{v}) = 0,$$

$$(2) \quad \text{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$(3) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} - \text{grad} p + \rho \text{grad} \mathcal{L},$$

$$(4) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad p = p(\rho),$$

dove i simboli hanno il significato ben noto.

Introducendo le omografie vettoriali $\frac{d\mathbf{v}}{dP}$, $\frac{d\mathbf{B}}{dP}$, che esprimono le derivate dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$ rispetto al punto P , la (1), come è noto, si può scrivere

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \left(\text{div} \mathbf{v} - \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right) \mathbf{B} + \frac{d\mathbf{B}}{dP} \mathbf{v} = 0,$$

cioè, eliminando la $\text{div} \mathbf{v}$ per mezzo dell'equazione (4) di continuità, si ha

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \mathbf{B} - \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{B} = 0,$$

da cui, dividendo ambo i membri per ρ , segue la nota relazione ⁽¹⁾

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dP} \frac{\mathbf{B}}{\rho}.$$

Moltiplicando ambo i membri della (5) scalarmente per $\mathbf{v}$, si ottiene facilmente

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) \times \mathbf{v} = \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \times \frac{\mathbf{B}}{\rho}.$$

⁽¹⁾ Cfr., *Atti del Simposio sulla Magnetofluidodinamica*, Bari 10-14 gennaio 1961, « Ed. Cremonese, Roma », pg. 125.

Supponendo la pressione funzione della densità ed introducendo la funzione

$$\mathfrak{P}(\rho) = \int \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} d\rho$$

l'equazione (3) del moto si può scrivere

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\rho} - \operatorname{grad}_P [\mathfrak{P}(\rho) - \mathfrak{M}]$$

da cui, moltiplicando ambo i membri scalarmente per $\frac{\mathbf{B}}{\rho}$, si deduce

$$(7) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{\mathbf{B}}{\rho} = - \operatorname{grad}_P [\mathfrak{P}(\rho) - \mathfrak{M}] \times \frac{\mathbf{B}}{\rho}.$$

Sommando le equazioni (6) e (7) si ottiene la notevole relazione

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \times \mathbf{v} \right) = \operatorname{grad}_P \left[\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathfrak{P}(\rho) + \mathfrak{M} \right] \times \frac{\mathbf{B}}{\rho}.$$

Essendo P_0 la posizione iniziale del punto P , introducendo ancora l'omografia vettoriale $\alpha = \frac{dP}{dP_0}$, funzione di P_0 , oltre che del tempo, ed indicando con $\mathbf{B}_0$, ρ_0 i valori iniziali di $\mathbf{B}$ e ρ , sussiste la relazione ⁽²⁾

$$\frac{\mathbf{B}}{\rho} = \alpha \frac{\mathbf{B}_0}{\rho_0}.$$

Allora, essendo $K\alpha$ la *coniugata*, o trasposta, dell'omografia α , ed F una funzione del punto, si ha

$$\operatorname{grad}_P F \times \frac{\mathbf{B}}{\rho} = \operatorname{grad}_P F \times \alpha \frac{\mathbf{B}_0}{\rho_0} = K\alpha \operatorname{grad}_P F \times \frac{\mathbf{B}_0}{\rho_0} = \operatorname{grad}_{P_0} F \times \frac{\mathbf{B}_0}{\rho_0}.$$

La (8) si può scrivere pertanto

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \times \mathbf{v} \right) = \operatorname{grad}_{P_0} \left[\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathfrak{P}(\rho) + \mathfrak{M} \right] \times \frac{\mathbf{B}_0}{\rho_0}.$$

Considerando il moto dal punto di vista lagrangiano ed integrando la (9) a partire dall'istante iniziale e fino all'istante generico t , si ottiene la formula notevole

$$(10) \quad \frac{\mathbf{B}}{\rho} \times \mathbf{v} = \frac{\mathbf{B}_0}{\rho_0} \times \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{B}_0}{\rho_0} \times \operatorname{grad}_{P_0} \int_0^t \left[\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathfrak{P}(\rho) + \mathfrak{M} \right] dt.$$

⁽²⁾ Cfr. *loco cit.* in ⁽¹⁾, pg. 124.

Poichè, per l'equazione lagrangiana di continuità è $\rho = \rho_0/I_3\alpha$, dove $I_3\alpha$ è l'invariante terzo dell'omografia α , la (10), moltiplicata per ρ , si può scrivere anche

$$(11) \quad \mathbf{B} \times \mathbf{v} = \frac{\mathbf{B}_0}{I_3\alpha} \times \left\{ \mathbf{v}_0 + \text{grad}_{P_0} \int_0^t \left[\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathfrak{E}(\rho) + \mathfrak{L} \right] dt \right\}.$$

2. Per ottenere un'altra rimarchevole relazione che lega il campo magnetico al vortice, ricordiamo che sussiste ancora l'equazione ⁽³⁾

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dP} \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \text{rot} \left(\text{rot } \mathbf{B} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu\rho} \right),$$

che generalizza l'equazione di HELMHOLTZ. Moltiplicandone ambo i membri scalarmente per $\mathbf{B}/\rho$ si ottiene

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} \right) \times \frac{\mathbf{B}}{\rho} = \frac{d\mathbf{v}}{dP} \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} \times \frac{\mathbf{B}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \text{rot} \left(\text{rot } \mathbf{B} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu\rho} \right) \times \frac{\mathbf{B}}{\rho}.$$

D'altra parte dalla (5) si ha

$$(13) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) \times \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} = \frac{d\mathbf{v}}{dP} \frac{\mathbf{B}}{\rho} \times \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho}$$

e sommando (12) e (13) si ricava

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \times \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} \right) = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dP} + K \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right) \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\rho} \times \frac{\mathbf{B}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \text{rot} \left(\text{rot } \mathbf{B} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu\rho} \right) \times \frac{\mathbf{B}}{\rho}.$$

Introducendo la dilatazione $D \frac{d\mathbf{v}}{dP} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dP} + K \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right)$ la (14) si può anche scrivere

$$(14') \quad \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{v}}{\rho^2} = \frac{2}{\rho^2} D \frac{d\mathbf{v}}{dP} \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\rho^2} \text{rot} \left(\frac{\text{rot } \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}}{\mu\rho} \right) \times \mathbf{B};$$

integrando fra 0 e t , e ricordando che $\rho^2/\rho_0^2 = 1/(I_3\alpha)^2$, si deduce

$$(15) \quad \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{v} = \frac{\mathbf{B}_0 \times \text{rot}_0 \mathbf{v}_0}{(I_3\alpha)^2} + \frac{1}{(I_3\alpha)^2} \int_0^t (I_3\alpha)^2 \left\{ 2D \frac{d\mathbf{v}}{dP} \text{rot } \mathbf{v} + \text{rot} \frac{\text{rot } \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}}{\mu\rho} \right\} \times \mathbf{B} \cdot dt,$$

che è la formula che volevamo stabilire.

⁽³⁾ Cfr. *loco cit.* in (1), pg. 125, (10).