Giulio Cesare Barozzi

Sui polinomi propriamente quasi-ellittici in due variabili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.2, p. 185–190.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_185_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

Sui polinomi propriamente quasi-ellittici in due variabili.

GIULIO CESARE BAROZZI (Bologna) (*)

Sunto. - *Sia $P(D_1, D_2)$ un operatore quasi-ellittico in due variabili; sia $P_0(\xi_1, \xi_2)$ la parte principale del polinomio $P(\xi_1, \xi_2)$ associato. Considerate le equazioni $P_0(\lambda, \xi_2) = 0$ e $P_0(\xi_1, \mu) = 0$, si studiano i polinomi per i quali il numero delle radici λ della prima equazione aventi $I_m \lambda > 0$ è indipendente da ξ_2, ed ugualmente il numero delle radici μ della seconda equazione con $I_m \mu > 0$ è indipendente da ξ_1.*

1. - Ricordiamo brevemente alcune definizioni relative agli operatori quasi-ellittici, rimandando, per un'esposizione dettagliata, alla Nota [1].

Sia $P(\xi)$ un polinomio a coefficienti complessi costanti nella variabile $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$. Sia m_j, $j = 1, \ldots, n$, il massimo esponente con cui ξ_j compare isolato in P; supporremo $m_j \geq 1$, $\forall j$. Convenendo di porre

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_j \text{ intero } \geq 0,$$

$$m = \max_j m_j$$

$$q = \left(\frac{m}{m_1}, \ldots, \frac{m}{m_n}\right),$$

introduciamo la seguente

DEFINIZIONE 1. - *Si dice q-grado del monomio ξ^α la quantità*

$$(q, \alpha) = \sum_{j=1}^{n} \frac{m}{m_j} \alpha_j$$

Si chiama q-grado di P il più grande dei q-gradi dei suoi termini. Se il q-grado di $P = \sum a^{(\alpha)} \xi^\alpha$ è M, porremo $P_0(\xi) = \sum_{(q,\alpha)=M} a^{(\alpha)} \xi^\alpha$.

DEFINIZIONE 2. - *$P(\xi)$ si dice quasi-ellittico* (q.e.) *se*

$$0 \neq \xi \in R^n \Rightarrow P_0(\xi) \neq 0 .$$

Se P è q.e.; risulta $M = m$, dunque $P_0(\xi) = \sum_{\Sigma \alpha_j/m_j = 1} a^{(\alpha)} \xi^\alpha$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 2 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1964-65.

L'ennupla $(m_1, \dots, m_n)$ verrà detta brevemente il «*multi-indice*» di P.

DEFINIZIONE 3. – *L'ennupla di numeri naturali* $(m_1, \dots, m_n)$ *si dirà quasi-ellittica se esiste almeno un polinomio* q. e. *avente* $(m_1, \dots, m_n)$ *come multi-indice.*

TEOREMA 1. – *Per* $n = 2$, *ogni coppia* (m_1, m_2) *è* q.e.; *per* $n > 2$, $(m_1, \dots, m_n)$ *è* q.e. *se e solo se i numeri* m_j *sono tutti pari, tranne al più uno.*

Consideriamo le n equazioni

$$P_0(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \lambda, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) = 0, \qquad j = 1, \dots, n;$$

se $0 \neq \xi^* = (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \xi_n)$, essa è dotata di $m_j^+(\xi^*)$ radici con $I_m \lambda > 0$, e $m_j^-(\xi^*)$ radici con $I_m \lambda < 0$, essendo

$$m_j^+(\xi^*) + m_j^-(\xi^*) = m_j.$$

Per $n > 2$, essendo connesso l'insieme $R^{n-1} \setminus \{0\}$, i numeri $m_j^+(\xi^*)$ e $m_j^-(\xi^*)$ sono indipendenti da ξ^*; scriveremo semplicemente m_j^+ e m_j^-. Ciò non è più vero, come è ben noto, per $n = 2$.

DEFINIZIONE 4. – *Il polinomio* $P(\xi)$ *si dirà propriamente quasi-ellittico* (p.q.e.), *se* $m_j^+(\xi^*)$ *è indipendente da* $\xi^* \in R^{n-1} \setminus \{0\}$ *per ogni* $j = 1, \dots, n$ (cfr. J. PEETRE [3]).

Si è appena visto che per $n > 2$ ogni polinomio q.e. è anche p.q.e.; la definizione posta ha dunque interesse solo per i polinomi in due variabili di cui ci occuperemo d'ora in avanti.

DEFINIZIONE 5. – *La coppia di interi non negativi* (μ_1^+, μ_2^+) *si dirà compatibile col multi-indice* (m_1, m_2) *se esiste un polinomio* p.q.e. $P(\xi_1, \xi_2)$ *per cui* $m_j^+ = \mu_j^+$, $j = 1, 2$.

In ciò che segue ci si propone di caratterizzare, in relazione al multi-indice (m_1, m_2), i polinomi p.q.e., e, subordinatamente all'esistenza o meno di polinomi di tale tipo, di individuare le coppie compatibili col multi-indice.

2. – Supponiamo dapprima m_1 e m_2 entrambi dispari. Sia P un polinomio q.e. di multi-indice (m_1, m_2); poniamo

$$P_0(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha_1/m_1 + \alpha_2/m_2 = 1} a^{(\alpha_1, \alpha_2)} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}.$$

Le soluzioni intere non negative (α_1, α_2) dell'equazione

$$\frac{\alpha_1}{m_1} + \frac{\alpha_2}{m_2} = 1$$

sono tali che $\alpha_1 + \alpha_2$ è dispari (v. [1] n° 3). Dunque

$$P_0(\xi_1, \xi_2) = -P_0(-\xi_1, -\xi_2).$$

Se ne deduce

$$m_j^+(1) = m_j^-(-1),$$
$$m_j^-(1) = m_j^+(-1), \qquad j = 1, 2;$$

d'altra parte, dovendo essere $m_j^+(1) + m_j^-(1) = m_j$ dispari, è necessariamente $m_j^+(1) \neq m_j^-(1) = m_j^+(-1)$.

Se ne conclude

TEOREMA 2. - *Se m_1 e m_2 sono entrambi dispari, nessun polinomio P* q.e. *di multi-indice (m_1, m_2) è* p.q.e..

3. - Supponiamo ora m_1 pari e m_2 dispari. Sia $d = m.c.d.(m_1, m_2)$,

$$\overline{m}_j = \frac{m_j}{d}, \qquad j = 1, 2.$$

Ovviamente $\overline{m}_1$ è pari, $\overline{m}_2$ è dispari. Esaminiamo le soluzioni intere non negative dell'equazione

$$\frac{\alpha_1}{m_1} + \frac{\alpha_2}{m_2} = 1;$$

si ha

$$\alpha_1 = m_1 \frac{m_2 - \alpha_2}{m_2} = \frac{\overline{m}_1}{\overline{m}_2}(m_2 - \alpha_2).$$

Essendo $\overline{m}_1$ e $\overline{m}_2$ primi tra loro, α_1 è intero solo a patto che $m_2 - \alpha_2$ sia divisibile per $\overline{m}_2$:

$$\frac{m_2 - \alpha_2}{\overline{m}_2} = j, \qquad 0 \leq j \leq d.$$

Se ne deduce per P_0

$$P_0(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^{d} a_j \xi_1^{\overline{m}_1 j} \xi_2^{(d-j)\overline{m}_2}.$$

Poichè ξ_1 compare in P_0 soltanto con esponente pari, si ha subito

$$m_1^+(\xi_2) \equiv m_1^-(\xi_2) \equiv \frac{m_1}{2}.$$

Per la stessa ragione, essendo $P_0(\xi_1, \xi_2) = P_0(-\xi_1, \xi_2)$, si ha anche $m_2(\xi_1) \equiv$ cost., dunque P è p.q.e..

Restano da caratterizzare le coppie (m_1^+, m_2^+) compatibili con (m_1, m_2), di cui, per ora, sappiamo solo che è necessariamente $m_1^+ = m_1/2$. Posto $\lambda^* = (\lambda)^{\overline{m}_2}$, l'equazione $P_0(\xi_1, \lambda) = 0$ si scrive

$$\sum_{j=0}^{d} a_j \xi_1^{\overline{m}_1 j} (\lambda^*)^{d-j} = 0 ;$$

ognuna delle d radici λ^* di tale equazione fornisce $(\overline{m}_2 + 1)/2$ radici λ con $I_m \lambda > 0$, oppure $(\overline{m}_2 - 1)/2$ radici dello stesso tipo. Dunque m_2^+ è certamente compreso tra $(m_2 - d)/2$ e $(m_2 + d)/2$. Viceversa, ogni numero naturale $m_2^+ = (m_2 + h)/2$, con h (dispari) in valore assoluto non ssperiore a d, fornisce una coppia $(m_1/2, m_2^+)$ compatibile con (m_1, m_2). Basta considerare i polinomi q.e.

$$(\xi_1^{\overline{m}_1} + i \xi_2^{\overline{m}_2}) \quad \text{e} \quad (\xi_1^{\overline{m}_1} - i \xi_2^{\overline{m}_2}) ;$$

il prodotto

$$P(\xi) = (\xi_1^{\overline{m}_1} + i \xi_2^{\overline{m}_2})^{\frac{d+h}{2}} (\xi_1^{\overline{m}_1} - i \xi_2^{\overline{m}_2})^{\frac{d-h}{2}}$$

è q.e (v. [2]) di multi-indice (m_1, m_2), e per esso si ha $m_1^+ = m_1/2$, $m_2^+ = (m_2 + h)/2$.

Concludendo

TEOREMA 3. - *Se m_1 è pari e m_2 è dispari, ogni polinomio* q.e. *di multi-indice (m_1, m_2) è* p.q.e.; *le coppie compatibili con (m_1, m_2) sono tutte e sole quelle del tipo $\left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2 + h}{2}\right)$ con h (dispari) in valore assoluto non superiore a d (massimo comun divisore tra m_1 e m_2).*

4. - Supponiamo infine che m_1 e m_2 siano entrambi pari. Posto, come in precedenza, $\overline{m}_j = m_j / d$, $j = 1, 2$, supponiamo che uno dei due numeri $\overline{m}_j$, per esempio $\overline{m}_1$, sia pari, e l'altro sia dispari.

Si ha allora

TEOREMA 4'. - *Se m_1 e m_2 sono pari. $\overline{m}_1$ è pari e $\overline{m}_2$ è dispari, ogni polinomio* q.e. *di multi indice (m_1, m_2) è* p.q.e.; *le coppie compatibili con (m_1, m_2) sono tutte e sole quelle del tipo $\left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2 + h}{2}\right)$ con h (pari) in valore assoluto non superiore a d.*

La dimostrazione è identica a quella del teorema 3 con la sola variante che attualmente d è pari.

Supponiamo che i numeri $\overline{m}_1$ e $\overline{m}_2$ siano entrambi dispari. Si può porre allora

$$m_j = 2^k m_j^*, \qquad j = 1, 2$$

con m_j^* entrambi dispari

Nel caso in esame possono aversi polinomi p.q.e. e polinomi che non sono p.q e.: si considerino infatti i due esempi

$$(\xi_1 + i\xi_2)^2, \ (\xi_1 + i\xi_2)\ (\xi_1 - i\xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 .$$

Si abbia un polinomio P, con multi-indice del tipo in esame, che sia p.q e.; le soluzioni intere non negative di

$$\frac{\alpha_1}{m_1} + \frac{\alpha_2}{m_2} = 1 .$$

che può scriversi

$$\frac{\alpha_1}{m_1^*} + \frac{\alpha_2}{m_2^*} = 2^k ,$$

sono tali che $\alpha_1 + \alpha_2$ è pari. Ne segue

$$P_0(\xi_1, \xi_2) = P_0(-\xi_1, -\xi_2)$$

da cui ancora

$$m_j^+(1) = m_j^-(-1)$$

$$m_j^-(1) = m_j^+(-1), \qquad j = 1, 2 .$$

Ma essendo per ipotesi $m_j^\pm(1) = m_j^\pm(-1)$, segue

$$m_j^+ = \frac{m_j}{2}, \qquad j = 1, 2.$$

Concludendo:

TEOREMA 4″. - *Se* m_1 *e* m_2 *sono entrambi pari,* $\overline{m}_1$ *e* $\overline{m}_2$ *sono entrambi dispari, un polinomio* q.e. *di multi-indice* (m_1, m_2) *può essere o meno* p.q.e.; *tuttavia se esso è* p.q.e. *la sola coppia compatibile con* (m_1, m_2) *è* $\left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2}{2}\right)$.

OSSERVAZIONE - Notiamo esplicitamente che i polinomi p.q.e. del tipo considerato nel teorema precedente, non sono necessariamente *fortemente quasi-ellittici* (v. [1], n° 7 e 8); si consideri, ad esempio, il polinomio

$$[\xi_1 + (\sqrt{2} + i)\xi_2]\,[\xi_1 - (\sqrt{2} - i)\xi_2] .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] G. C. BAROZZI, *Sul multi-indice degli operatori quasi-ellittici*, Boll. U.M.I., vol. 19 (1964), pp. 289-299.

[2] — —, *Sul prodotto di polinomi quasi-ellittici*, Boll. U.M.I. vol. 20 (1965) (in corso di stampa).

[3] J. PEETRE, *On estimating the solutions of hypoelliptic differential equations near the boundary*, Math. Scand. 9 (1961) pp. 337-351.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 5 aprile 1965