Bollettino Unione Matematica Italiana

Giulio Cesare Barozzi

Sul prodotto di polinomi quasi-ellittici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.2, p. 169–176.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_169_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

Sul prodotto di polinomi quasi-ellittici

GIULIO CESARE BAROZZI (Bologna) (*)

Sunto. - *Si trova una condizione necessaria e sufficiente sui multi-indici di due polinomi quasi-ellittici* $P^{(1)}$ *e* $P^{(2)}$ *affinchè il loro prodotto sia ancora quasi-ellittico. Inversamente si dimostra che se un polinomio quasi-ellittico P può fattorizzarsi nel prodotto di due polinomi* $P^{(1)}$ *e* $P^{(2)}$, *questi ultimi sono necessariamente quasi-ellittici.*

1. Sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ un punto dello spazio reale ad n dimensioni R^n. Porremo

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D = (D_1, \dots D_n),$$

e, se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ è un vettore a componenti intere non negative,

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$$

Sia $P(D)$ un operatore differenziale a coefficienti costanti complessi: con $P(\xi)$, $\xi \varepsilon R^n$, indicheremo il polinomio ottenuto formalmente sostituendo ξ_j e D_j -

Sia m_j il massimo esponente con cui ξ_j figura isolato in $P(\xi)$; supporremo $m_j \geq 1$, $j = 1, \dots, n$. Posto $m = \max\limits_{1 \leq j \leq n} m_j$, consideriamo il vettore

$$q = (q_1, \dots, q_n) = \left(\frac{m}{m_1}, \dots, \frac{m}{m_n}\right).$$

Definizione I. *Chiameremo* q- *grado del monomio* $a^{(\alpha)}\xi^\alpha$ *la quantità*

$$< q, \alpha > = \sum_1^n {}_j q_j \alpha_j = m \sum_1^n {}_j \frac{\alpha_j}{m_j};$$

chiameremo peso del monomio stesso la quantità

$$\sum_1^n {}_j \frac{\alpha_j}{m_j}.$$

Diremo poi q-*grado (peso) del polimonio* $P(\xi)$ *il più grande tra i* q-*gradi (pesi) dei suoi termini.*

Nel seguito indicheremo con $P_0(\xi)$ la somma dei termini di $P(\xi)$ aventi peso massimo.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n° 2 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1964-65.

Definizione 2. $P(\xi)$ *si dice quasi-ellittico se*

$$0 \neq \xi \varepsilon R^n \Rightarrow P_0(\xi) \neq 0.$$

È facile verificare che il q-grado (ed anche il grado ordinario) di un polinomio quasi-ellittico è precisamente $m = \max_j m_j$, dunque il peso di un tale polinomio è uguale ad uno. Si ha pertanto (cfr. VOLEVIC [4], par. 1, BAROZZI [1], n° 1)

$$P_0(\xi) = \sum_{\Sigma_j \alpha_j/m_j = 1} a^{(\alpha)} \xi^\alpha \ , \ a^{(\alpha)} \neq 0, \text{ per } \alpha = (0, .., m_j, .., 0)\,; \quad 1, ..., j, ..., n$$

nel seguito $P_0(\xi)$ verrà chiamata la *parte principale* di $P(\xi)$.

Definizione 3. *La ennupla* $(m_1, ... m_n)$ *costituita dagli esponenti dei termini puri di* $P_0(\xi)$ *verrà detta "multi-indice" del polinomio* P_0.

Definizione 4. *La ennupla di numeri naturali* $(m_1, ..., m_n)$ *verrà chiamata quasi-ellittica se esiste almeno un polinomio quasi-ellittico avente tale ennupla come multi-indice.*

Per $n = 2$, ogni coppia di numeri naturali (m_1, m_2) è quasi ellittica; sussiste peraltro il seguente

TEOREMA. *Se* $n \geq 3$, *condizione necessaria e sufficiente affinchè la ennupla* $(m_1, ..., m_n)$ *sia quasi-ellittica* è *che i numeri* m_j *siano tutti pari tranne al più uno* (cfr. BAROZZI [1], n° 2).

2. Siano $P^{(1)}(\xi)$ e $P^{(2)}(\xi)$ due polinomi quasi-ellittici di multi-indici rispettivamente $(m_1, .., m_n)$ e $(\mu_1, ..., \mu_n)$; si vogliono determinare delle condizioni su tali multi-indici affinchè il polinomio

$$P(\xi) = P^{(1)}(\xi)\, P^{(2)}(\xi)$$

risulti ancora quasi-ellittico.

Sussiste il seguente

TEOREMA 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè*

$$P(\xi) = P^{(1)}(\xi)\, P^{(2)}(\xi)$$

sia quasi-ellittico è che i multi-indici di $P^{(1)}$ *e di* $P^{(2)}$ *siano proporzionali.*

Sufficienza. Sia

$$P^{(1)}(\xi) = \sum_{\Sigma_j \alpha_j/m_j \geq 1} a^{(\alpha)} \xi^\alpha \ , \quad P^{(2)}(\xi) = \sum_{\Sigma_j \beta_j/\mu_j \geq 1} b^{(\beta)} \xi^\beta$$

con $m_j = \frac{1}{\lambda} \mu_j$ $(\lambda > 0)$, $j = 1, ..., n$. In $P(\xi)$ il massimo esponente con cui ξ_j figura isolato è $p_j = m_j + \mu_j$, $j = 1, .., n$.

Un termine generico di $P(\xi)$ si scriverà

$$c^{(\gamma)}\xi^{\gamma} = a^{(\alpha)}b^{(\beta)}\xi_1^{\alpha_1+\beta_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n+\beta_n};$$

e il suo peso in P sarà

$$\sum_1^n{}_j \frac{\alpha_j+\beta_j}{p_j} = \sum_1^n{}_j \frac{\alpha_j+\beta_j}{m_j(1+\lambda)} = \frac{1}{1+\lambda}\left[\sum_1^n{}_j \frac{\alpha_j}{m_j} + \lambda\frac{\beta_j}{\mu_j}\right].$$

Si hanno dunque le implicazioni

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^n{}_j \frac{\alpha_j}{m_j} \leq 1\\ \sum_1^n{}_j \frac{\beta_j}{\mu_j} \leq 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_1^n{}_j \frac{\alpha_j+\beta_j}{p_j} \leq 1,$$

dove il segno di uguaglianza nell' ultima relazione scritta sussiste evidentemente se e solo se si ha il segno di uguaglianza nelle due precedenti. Ne segue che in P il peso dei termini misti non supera quello dei termini puri, cioè non supera l' unità.

Posto

$$P_0(\xi) = \sum_{\Sigma_j\gamma_j/p_j=1} c^{(\gamma)}\xi^{\gamma},$$

si ha

$$P_0(\xi) = P_0^{(1)}(\xi)\,P_0^{(2)}(\xi) = [\sum_{\Sigma_j\alpha_j/m_j=1} a^{(\alpha)}\xi^{\alpha}]\cdot[\sum_{\Sigma_j\beta_j/\mu_j=1} b^{(\beta)}\xi^{\beta}],$$

donde, evidentemente, la quasi-ellitticità di P.

Necessità. Non è restrittivo supporre $\xi\in R^2$, perchè se fosse $n>2$ si potrebbero considerare le restrizioni di $P^{(1)}$ e di $P^{(2)}$ alla varietà dei vettori $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ aventi tutte le componenti nulle tranne due. (Si osservi che tali restrizioni sono ancora polinomi quasi-ellittici nelle variabili restanti).

Si supponga dunque che

$$P(\xi_1, \xi_2) = P^{(1)}(\xi_1, \xi_2)\,P^{(2)}(\xi_1, \xi_2)$$

sia un polinomio quasi-ellittico, essendo tali $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$. Dico che

$$\frac{m_1}{\mu_1} = \frac{m_2}{\mu_2}.$$

Se così non fosse una delle due quantità $\frac{m_1}{m_2}\frac{\mu_2}{\mu_1}$, $\frac{m_2}{m_1}\frac{\mu_1}{\mu_2}$ sarebbe maggiore di uno. Supponiamo che sia $\frac{m_2}{m_1}\frac{\mu_1}{\mu_2} > 1$. Il prodotto dei due monomi $a^{(\alpha)}\xi_2^{m_2}$ e $b^{(\beta)}\xi_1^{\mu_1}$ fornisce un termine di P il cui peso è

$$\frac{\mu_1}{m_1+\mu_1} + \frac{m_2}{m_2+\mu_2} > 1,$$

come mostra un calcolo elementare.

3. Nel presente numero supporremo $n > 2$. In base alla caratterizzazione dei multi-indici quasi-ellittici fornita dal Teorema citato alla fine del numero 1, siamo in grado di precisare meglio il risultato ora conseguito.

È chiaro che se $(m_1, \dots, m_n)$ é una ennupla quasi-ellittica, le ennuple multiple di essa sono ancora quasi-ellittiche; inversamente tra le ennuple intere sottomultiple di $(m_1, \dots, m_n)$, ne esiste una ben determinata che è ancora quasi-ellittica senza essere dotata di ennuple sottomultiple quasi-ellittiche. Una tale ennupla verrà chiamata il "*generatore*" di $(m_1, \dots, m_n)$, convenendo ancora di dire che una ennupla è *prima* se coincide con il suo generatore.

A seconda delle diverse alternative che possono verificarsi per una ennupla quasi-ellittica, indichiamo quale sarà il suo generatore. Se $m_1, \dots, m_{n-1}$ sono pari e m_n è dispari, detto c il massimo comune divisore degli m_j, $j = 1, \dots, n$, il generatore sarà $(\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n)$ con

$$\mathbf{m}_j = \frac{m_j}{c} .$$

Osserviamo infatti che, essendo c dispari, $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{n-1}$ sono pari e $\mathbf{m}_n$ è dispari, dunque $(\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n)$ è quasi-ellittica ed evidentemente prima.

Supponiamo ora che gli m_j siano tutti pari: poniamo

$$m_j = 2^{k_j} m_j^* \quad , \; j = 1, \dots, n$$

con gli m_j^* dispari. Posto $k = \min_{1 \leq j \leq n} k_j$, sia ancora

$$\mathbf{m}_j = \frac{m_j}{2^k} ,$$

e $\mathbf{c}$ il massimo comune divisore dei numeri $\mathbf{m}_j$. Se l'ennupla $(\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n)$ è quasi-ellittica (ciò che accade se e solo se risulta $k_j = k$ per un solo valore di j), allora il generatore in questione sarà $\left(\frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{c}}, \dots, \frac{\mathbf{m}_n}{\mathbf{c}}\right)$, cioè ancora $\left(\frac{m_1}{c}, \dots, \frac{m_n}{c}\right)$ essendo $c = 2^k \mathbf{c}$ il massimo comune divisore degli m_j.

Se viceversa $(\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n)$ non è quasi-ellittica (cioè se $k_j = k$ per almeno due valori dell'indice j), allora il generatore sarà $\left(2 \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{c}}, \dots, 2 \frac{\mathbf{m}_n}{\mathbf{c}}\right)$.

Ciò posto sussiste il seguente

Teorema 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il prodotto dei polinomi quasi-ellittici $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ sia ancora un polinomio* *quasi-ellittico è che i rispettivi multi-indici abbiano lo stesso generatore.*

La sufficienza segue immediatamente dal TEOREMA 1. Dimostriamo la necessità. Conservando le notazioni usate poco sopra, supponiamo $m_1, \ldots, m_{n-1}$ pari e m_n dispari. Il rapporto $\frac{m_j}{\mu_j}$ (che sappiamo essere costante) può scriversi nella forma

$$\frac{m_j}{\mu_i} = \frac{m^*}{\mu^*} \quad , \quad j = 1, \ldots, n \, ,$$

come m^* divisore comune degli m_j ed μ^* divisore comune dei μ_j.

Si può sempre supporre $m^* = c$, da cui

$$\mu_j = \mu^* \frac{m_j}{c} \, ,$$

dunque $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ è multipla dell'ennupla $\left(\frac{m_1}{c}, \ldots, \frac{m_n}{c}\right)$, ciò che equivale all'asserto.

Supponiamo ora gli m_j tutti pari e l'ennupla $(\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_n)$ quasi-ellittica. Posto come sopra

$$\frac{m_1}{\mu_1} = \frac{m^*}{\mu^*}$$

si può ancora supporre $m^* = c = 2^k \mathbf{c}$. Se ne trae

$$\mu_j = \mu^* \frac{\mathbf{m}_j}{c} = \mu^* \frac{\mathbf{m}_j}{c}$$

cioè ancora l'asserto. Se poi $(\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_n)$ non è quasi-ellittica (cioè se almeno due degli m_j sono dispari) si ha ugualmente

$$\mu_j = \mu^* \frac{\mathbf{m}_j}{\mathbf{c}} \, ;$$

avendo però $\frac{\mathbf{m}_j}{\mathbf{c}}$ la stessa parità di $\mathbf{m}_j$, μ^* è necessariamente pari

$$\mu^* = 2\,\mu' ,$$

perchè altrimenti almeno due dei μ_j sarebbero dispari. Si ha quindi

$$\mu_j = \mu' \frac{2\mathbf{m}_j}{\mathbf{c}} \, , \; j = 1, \ldots, n \, .$$

che equivale all'asserto.

OSSERVAZIONE. Per tutti i multi-indici $(m_1, \ldots, m_n)$ quasi-ellittici aventi lo stesso generatore $(p_1, \ldots, p_n)$, il vettore

$$q = \left(\frac{m}{m_1}, \ldots, \frac{m}{m_n}\right)$$

è il medesimo, essendo costantemente uguale a

$$\left(\frac{p}{p_1},\dots,\frac{p}{p_n}\right),\ p = \max_{1\le j\le n} p_j .$$

Le equazioni $P(D)\,u = 0$, se il multi-indice di P è del tipo ora specificato, possiedono soluzioni $u(x)$ appartenenti in R^n alla classe di GEVREY $G_{(p/p_1,\dots,p/p_n)}$ (cfr. PINI [3] e HÖRMANDER [2], Teor. 4.4.6 (*)). Ad esempio ogni multi-indice ellittico è generato dall'ennupla $(2,\dots,2)$; la relativa classe di GEVREY $G_{(1,\dots,1)}$ è, come ben noto, quella delle funzioni analitiche.

4. Prendiamo ora in considerazione un problema in un certo senso inverso di quello fin qui considerato. Sia $P(\xi)$ un polinomio quasi-ellittico; supponiamo che esso possa fattorizzari nella forma

$$P(\xi) = P^{(1)}(\xi)\ P^{(2)}(\xi) .$$

Vogliamo determinare la struttura dei polinomi fattori $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$. Sussiste il seguente

TEOREMA 2. *Se il polinomio quasi-ellittico $P(\xi)$ può scriversi nella forma*

$$P(\xi) = P^{(1)}(\xi)\ P^{(2)}(\xi)$$

(escludendo il caso banale che $P^{(1)}$ o $P^{(2)}$ si riducano ad una costante), allora $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ sono necessariamente quasi-ellittici.

Sia $(p_1,\dots,p_n)$ il multi-indice del polimonio P; poniamo $p = \max\limits_{1\le j\le n} p_j$. Analogamente siano m_j e μ_j gli esponenti massimi con cui ξ_j figura isolato rispettivamente in $P^{(1)}$ e in $P^{(2)}$. Si ha ovviamente

$$p_j = m_j + \mu_j \quad , \quad j = 1,\dots,n .$$

Cominciamo col dimostrare che si ha $m_j \geq 1$, $\mu_j \geq 1$, per ogni j. Supponiamo infatti che sia, ad es., $m_1 = 0$. Allora necessariamente $\mu_1 = p_1 \geq 1$. Dico che in tale ipotesi $P^{(1)}$ non contiene la variabile ξ_1. Se infatti contenesse un termine del tipo $a^{(1)}\xi_1^{\alpha_1},\dots,\xi_n^{\alpha_n}$, con $\alpha_1 > 0$, il prodotto di esso per il termine $b^{(\beta)}\xi_1^{\mu_1}$ ($b^{(\beta)} \neq 0$, $\mu_1 = p_1$) fornirebbe un termine di P il cui peso sarebbe

$$\frac{\alpha_1+\mu_1}{p_1} + \frac{\alpha_1}{p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{p_n} = \frac{\alpha_1+p_1}{p_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{p^n} > 1,$$

contro l'ipotesi che P è quasi-ellittico.

Dunque $P^{(1)}$ non dipende da ξ_1. Ma in tal caso $P^{(1)}$ si riduce ad una costante. Infatti non può essere $m_2 \geq 1$, perchè in tal ca-

(*) HÖRMANDER usa il termine *semi-ellittico* in luogo di quasi-ellittico.

so il prodotto del termine di $P^{(1)}$ contenente $\xi_2^{m_2}$ per il termine di $P^{(2)}$ contenente $\xi_1^{\mu_1} = \xi_1^{p_1}$, fornirebbe un termine di P per cui

$$\frac{\mu_1}{p_1} + \frac{m_2}{p_2} = 1 + \frac{m_2}{\mu_2 + m_2} > 1 .$$

È pertanto $m_2 = 0$. Ma ripetendo il ragionamento fatto poco sopra a partire dall'identità

$$P(0, \xi_2, ..., \xi_n) \equiv P^{(1)}(0, \xi_2, ..., \xi_n) \, P^{(2)}(0, \xi_2, ..., \xi_2) ,$$

si perviene a dimostrare che $P^{(1)}$ non dipende da ξ_2. Iterando n volte il procedimento ora esposto si trova $P^{(1)}(\xi) \equiv$ cost.

Escludendo dunque questo caso, si ha necessariamente

$$m_j \geq 1 , \quad \mu_j \geq 1 \quad , j = 1, ..., n .$$

Ragionando come per la dimostrazione del TEOREMA 1, si prova che $(m_1, ..., m_n)$ è proporzionale a $(\mu_1, ..., \mu_n)$:

$$\mu_j = \lambda \, m_j \quad , \; j = 1, ..., n ,$$

(si osservi che nel ragionamento ora citato non si è sfruttata la quasi-ellitticità di $P^{(1)}$ e di $P^{(2)}$).

È poi facile dimostrare che in $P^{(1)}$ e in $P^{(2)}$ non esistono termini il cui peso supera l'unità. Se infatti esistesse, per esempio in $P^{(1)}$, non monomio $a^{(\alpha)} \xi^\alpha$ per cui

$$\sum_1^n {}_j \frac{\alpha_j}{m_j} > 1 ,$$

il prodotto di esso per $b^{(\beta)} \xi_1^{\mu_1}$, fornirebbe in P un termine di peso

$$\frac{\alpha_1 + \mu_1}{m_1 + \lambda m_1} + \frac{\alpha_2}{m_2 + \lambda m_2} + ... + \frac{\alpha_n}{m_n + \lambda m_n} =$$
$$= \frac{1}{1+\lambda} \left(\frac{\alpha_1 + \lambda m_1}{m_1} + \frac{\alpha_2}{m_2} + .. + \frac{\alpha_n}{m_n} \right) = \frac{1}{1+\lambda} \left(\sum_1^n {}_j \frac{\alpha_j}{m_j} + \lambda \right) > 1 .$$

Si ha dunque

$$P_0(\xi) = P_0^{(1)}(\xi) \, P_0^{(2)}(\xi) ;$$

la quasi-ellitticità di P porta di conseguenza che

$$0 \neq \xi \in R^n \Rightarrow P_0^{(i)}(\xi) \neq 0 \quad , \quad i = 1,2 ,$$

cioè la quasi-ellitticità di $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. C. BAROZZI, *Sul multi-indice degli operatori quasi-ellittici*, "Bollettino U.M.I.", vol. 19 (1964), pagg. 289-299;

[2] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Berlin 1963;

[3] B. PINI, *Proprietà locali delle soluzioni di una classe di equazioni ipoellittiche*, "Rendiconti Sem. Mat. Università Padova", vol. XXXII (1962), pagg. 221-238;

[4] L. P. VOLEVIC, *Proprietà locali delle soluzioni dei sistemi quasi-ellittici*, "Mat. Sbornik", vol. 59 (101) (1962) pagg. 3-52 (in russo).

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 22 dicembre 1964