Bollettino
Unione Matematica Italiana

Jolanda Berselli

Su una proprietà asintotica degli estremi delle funzioni cilindriche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.2, p. 161–168.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_161_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Su una proprietà asintotica degli estremi delle funzioni cilindriche

JOLANDA BERSELLI (Bologna)

Sunto. - *Viene migliorata una formula di Watson, che inquadra numericamente gli estremi delle funzioni*

$$\mathcal{C}_\nu(x) = J_\nu(x) \cos\alpha - Y_\nu(x) \operatorname{sen}\alpha,$$

liberandola dalla restrizione $\nu > \sqrt{3}/2$. *Seguono alcune valutazioni asintotiche.*

1. - Le proposizioni di Watson (1).

Seguendo le notazioni di WATSON, consideriamo le funzioni cilindriche

$$\mathcal{C}_\nu(x) = J_\nu(x) \cos\alpha - Y_\nu(x) \operatorname{sen}\alpha, \tag{1.1}$$

soluzioni dell'equazione di BESSEL.

Supponiamo che α, ν, x siano reali, $\nu \geq 0$, $x > 0$. Diciamo

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$$

gli infiniti punti in cui $\mathcal{C}_\nu(x)$ è stazionaria e supponiamo senz'altro $\mu_1 > \nu$ (2).

WATSON ha dimostrato le proposizioni seguenti:

PROPOSIZIONE I.

I valori assunti da

$$S_1(x) = (x^2 - \nu^2)^{\frac{1}{4}} \, | \mathcal{C}_\nu(x) | , \tag{1.2}$$

quando x *coincide con i valori* μ_1, μ_2, μ_3 ..., *formano una successione crescente il cui limite è* $\sqrt{2/\pi}$.

(1) G. N. WATSON, [8], p. 488.

(2) Nell'intervallo $[0, \nu]$ può esistere al più un punto di estremo (o di zero) per la funzione $\mathcal{C}_\nu(x)$.

Si veda per esempio M. PICONE - C MIRANDA, [5], p. 442.

PROPOSIZIONE II.

I valori assunti da

$$S_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \,|\, \mathcal{C}_\nu(x) \,| \,, \tag{1.3}$$

quando x *coincide con i valori* μ_r, μ_{r+1}, μ_{r+2} ..., *formano una successione decrescente il cui limite è* $\sqrt{2/\pi}$, *purchè siano soddisfatte le restrizioni*:

$$\nu > \frac{1}{2}\sqrt{3}\,, \quad \mu_r^2 > \nu^2 \,\{ 4\nu^2 + 4 + \sqrt{48\nu^2 + 13} \,\} / (4\nu^2 - 3)\,. \tag{1.4}$$

In questo lavoro si considera la (1.2) come soddisfacente, e si sostituisce la (1.3) con la più conveniente successione (2.1), in modo da evitare qualsiasi restrizione su ν, μ_r.

Particolare attenzione viene dedicata alla formula asintotica che deriva dalle (1.2) (2.1) e alla valutazione del resto.

2. - Nuova proposizione di monotonia e sue applicazioni asintotiche.

In sostituzione della proposizione (II) di WATSON enunciamo la seguente

PROPOSIZIONE III.

I valori assunti da

$$S_3(x) = (x^2 - \nu^2)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{\lambda}{x^2 - \nu^2}\right)^{\frac{1}{2}} |\, \mathcal{C}_\nu(x) \,| \,, \tag{2.1}$$

quando

$$\lambda = \frac{3}{8}(1 + \nu^2) \tag{2.2}$$

e x *coincide con i valori* μ_1, μ_2, μ_3 ..., *formano una successione decrescente il cui limite è* $\sqrt{2/\pi}$.

La dimostrazione di questa proposizione si trova nel paragrafo successivo. Vogliamo qui fare osservare alcune conseguenze delle proposizioni I e III.

Dalla doppia disuguaglianza

$$S_1(\mu_n) < \sqrt{\frac{2}{\pi}} < S_3(\mu_n)$$

deriva

$$\left| (\mu_n^2 - \nu^2)^{\frac{1}{4}} \,|\, \mathcal{C}_\nu(\mu_n) \,| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right| < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{\lambda}{\mu_n^2 - \nu^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} ; \tag{2.3}$$

tenendo conto che per $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$

$$(1+\alpha)^{-\frac{1}{2}} > 1 - \frac{1}{2}\alpha$$

e che

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu_n^2 - \nu^2} > 0\,,$$

si può semplificare l'espressione del resto ottenendo:

$$\left| (\mu_n^2 - \nu^2)^{\frac{1}{4}} \, | \mathcal{C}_\nu(\mu_n) | - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right| < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu_n^2 - \nu^2}\,. \tag{2.4}$$

Questa disuguaglianza mette in evidenza non soltanto che la $S_3(\mu_n)$ ha per limite $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, come già sapevamo, ma completa la formula asintotica

$$(\mu_n^2 - \nu^2)^{\frac{1}{4}} \, | \mathcal{C}_\nu(\mu_n) | \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,,$$

dandoci anche una maggiorazione del resto.

Una formula di questo tipo si sarebbe già potuta ottenere dalle proposizioni I e II di WATSON; sarebbe stata però soggetta alla limitazione sopra citata per ν, μ_r; in particolare la formula non avrebbe potuto essere scritta per $\nu = 0$.

La lacuna delle formule di WATSON per $\nu = 0$ era già stata rilevata ([3]); in sostituzione delle dette formule erano state scritte le disuguaglianze

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \mu_n}} \sqrt{1 - \frac{1}{2\mu_n}} < \left| J_0(\mu_n) \right| < \sqrt{\frac{2}{\pi \mu_n}}\,, \tag{2.5}$$

da cui si deduceva

$$\sqrt{\mu_n} \, | J_0(\mu_n) | - \sqrt{\frac{2}{\pi}} = O\,(\mu_n^{-1})\,. \tag{2.6}$$

Ora la formula (2.4), mostra che

$$\sqrt{\mu_n} \, | J_0(\mu_n) | - \sqrt{\frac{2}{\pi}} = O\,(\mu_n^{-2})\,. \tag{2.7}$$

([3]) U. RICHARD [2], p. 386. A proposito dell'ordine di grandezza del resto si veda anche [3], § 6.5, e [4].

La seguente tabella dimostra quanto stretta sia la maggiorazione ottenuta per il resto.

n	μ_n	$\left(\frac{2}{\pi\mu_n}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\lvert J_0(\mu_n)\rvert$	$\left(\frac{2}{\pi\mu_n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3/8}{\mu_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$
1	3,831.706	0,407.609	0,402.759	0,402.501
2	7,015.587	0,301.237	0,300.116	0,300.096
3	10,173.468	0,250.153	0,249.705	0,249.701

Il metodo qui sviluppato può essere esteso fino a costruire formule asintotiche a più termini, permettendo una precisione numerica molto elevata.

Di questa estensione mi occuperò in un prossimo lavoro.

3. - Dimostrazione.

Data l'equazione differenziale

$$(py')' + qy = 0, \tag{3.1}$$

consideriamo la funzione di LIAPUNOV

$$\Phi(x) = A(x)y^2 + 2B(x)ypy' + C(x)p^2y'^2, \tag{3.2}$$

dove $A(x)$ è data, e le funzioni $B(x)$, $C(x)$ sono determinate dalle condizioni

$$\begin{cases} A'(x) - 2qB(x) = 0 \\ A(x) + pB'(x) - pqC(x) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Tenuto conto dell'equazione differenziale (3.1) e della (3.3) si trova

$$\Phi'(x) = \left[\frac{A'(x)}{pq} + \left(\frac{A(x)}{pq}\right)' + \frac{1}{2}\{q^{-1}[q^{-1}A'(x)]'\}'\right](py')^2. \tag{3.4}$$

Supposto che $A(x)$ sia tale da soddisfare le condizioni

$$A(x) > 0, \tag{3.5}$$

$$L_x A(x) = \frac{A(x)}{pq} + \frac{A'(x)}{pq} + \frac{1}{2}\{q^{-1}[q^{-1}A'(x)]'\}' < 0, \tag{3.6}$$

la $\Phi(x)$ è decrescente per ogni y soluzione propria della (3.1), e, se $y'(\mu_n) = 0$, risulta decrescente la successione

$$\sqrt{\Phi(\mu_n)} = \sqrt{A(\mu_n)}\,|\,y(\mu_n)\,|\,. \tag{3.7}$$

Identifichiamo ora l'equazione (3.1) con l'equazione di BESSEL ponendo

$$p = x\,,\ q = \frac{x^2 - \nu^2}{x}\,. \tag{3.8}$$

Scegliendo poi ([4])

$$A(x) = (x^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\lambda}{x^2 - \nu^2}\right), \tag{3.9}$$

la dimostrazione si riduce a verificare l'esistenza di un $\lambda > 0$ tale che

$$L_x A(x) < 0\,.$$

Allo scopo di semplificare fortemente i lunghi calcoli che sarebbero necessari per la verifica della (3.6) procediamo al cambio di variabile indipendente

$$x = \sqrt{t^2 + \nu^2} \tag{3.10}$$

nell'equazione di BESSEL e in tutte le formule che verranno usate.

È appena necessario notare che il cambiamento dl variabile (3.10) non altera il problema, facendo corrispondere alle ascisse estremanti $x = \mu_n$ della funzione $\mathcal{C}_\nu(x)$, le ascisse $t = t_n$ (corrispondenti nella (3.10)) estremanti della $\mathcal{C}_\nu(\sqrt{t^2 + \nu^2})$.

Del resto l'operatore differenziale che appare a primo membro della (3.6) verifica una semplice proprietà d'invarianza rispetto ai cambiamenti di variabile indipendente.

Sia $x = x(t)$ una funzione di classe C^2, con derivata prima positiva.

Ponendo $x = x(t)$, l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)\,y = 0 \tag{3.11}$$

si trasforma nella

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{p}(t)\frac{d\bar{y}}{dt}\right] + \bar{q}(t)\,\bar{y} = 0 \tag{3.12}$$

([4]) Il metodo qui seguito è sostanziamente quello di WATSON. Ponendo $A(x) = (x^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}$, $A(x) = x$, si otterrebbero le proposizioni I e II.

dove

$$\bar{p}(t) = p[x(t)] \cdot \frac{1}{x'(t)}, \tag{3.13}$$

$$\bar{q}(t) = q[x(t)] \cdot x'(t),$$

$$\bar{y}(t) = y[x(t)].$$

Sia poi L_x l'operatore differenziale definito da

$$L_x A(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{A(x)}{p(x)q(x)}\right) + \frac{dA(x)}{dx} \cdot \frac{1}{p(x)q(x)} + \tag{3.14}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[q^{-1}(x)\frac{d}{dx}\left(q^{-1}(x)\frac{dA(x)}{dx}\right)\right].$$

Allora, posto

$$\bar{A}(t) = A[x(t)], \tag{3.15}$$

si ha l'identità

$$L_t \bar{A}(t) = x'(t) \cdot L_x A(x), \tag{3.16}$$

identità che costituisce l'enunciata proprietà di invarianza.

Riprendiamo dunque l'equazione di BESSEL che, col cambiamento di variabile (3.10), si trasforma nella

$$\left[\frac{t^2 + \nu^2}{t} y'\right]' + \frac{t}{t^2 + \nu^2} y = 0, \qquad t > 0. \tag{3.17}$$

Sviluppando ora le formule (3.1), (3.6) rispetto alla variabile t, avremo:

$$A = t + \lambda t^{-1}, \tag{3.18}$$

$$\frac{A'}{pq} + \left(\frac{A}{pq}\right)' = -4\lambda t^{-4},$$

$$\frac{A'}{pq} + \left(\frac{A}{pq}\right)' + \frac{1}{2}\left[q^{-1}(q^{-1}A')'\right]' = \tag{3.19}$$

$$= t^{-10}\left\{\left(\frac{3}{2} - 4\lambda\right)t^6 + \frac{5}{2}(4\nu^2 - 3\lambda)t^4 + \frac{7}{2}(3\nu^2 - 8\lambda)\nu^2 t^2 - \frac{45}{2}\lambda\nu^4\right\}.$$

Occorre ora trovare un valore di λ tale che il polinomio a secondo membro di (3.19) sia negativo per $t > 0$ e per ogni valore di ν.

Tale disuguaglianza può essere scritta sotto la forma

$$\frac{\frac{3}{2}t^6 + 10\nu^2 t^4 + \frac{21}{2}\nu^4 t^2}{4t^6 + \frac{15}{2}t^4 + 28\nu^2 t^2 + \frac{45}{2}\nu^4} \leq \lambda, \quad (\nu \geq 0,\ t \geq 0). \tag{3.20}$$

Il primo membro è una funzione limitata di t, per ogni ν, ma non limitata da una costante assoluta: si deve assumere $\lambda = \lambda(\nu)$.

Si può scrivere il primo membro della (3.20) sotto la forma:

$$\frac{\frac{3}{2}t^6}{4t^6 + \frac{15}{2}t^4 + 28\nu^2 t^2 + \frac{45}{2}\nu^4} + \nu^2 \frac{10t^4 + \frac{21}{2}\nu^2 t^2}{t^6 + \frac{15}{2}t^4 + 28\nu^2 t^2 + \frac{45}{2}\nu^4}; \tag{3.21}$$

ciò mostra che si può assumere

$$\lambda = A + B\nu^2, \tag{3.22}$$

con A, B costanti assolute.

La soluzione più semplice si avrebbe ponendo

$$\lambda = \frac{3}{8} + \frac{4}{3}\nu^2 \tag{3.23}$$

rendendo con ciò negativi o nulli tutti i termini del polinomio a secondo membro della (3.19).

La scelta di $A = \frac{3}{8}$ è buona; infatti per $\nu = 0$, $\frac{3}{8}$ è il valore non riducibile di λ.

Più difficile è una buona determinazione di B. Posto

$$\lambda = \frac{3}{8} + B\nu^2, \tag{3.24}$$

la disuguaglianza (3.20) si può riscrivere sotto la forma

$$\begin{aligned} & -t^2\nu^2\left\{4Bt^4 - \frac{5}{2}(4-3B)t^2 + \frac{21}{2}\right\} + \frac{7}{2}(3-8B)\nu^2 t^2 - \\ & -\frac{45}{16}t^4 - \frac{45}{2}\nu^4\left(\frac{3}{8} + B\nu^2\right) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Si vede ora che $B = \frac{3}{8}$ rende definito positivo il polinomio

$$4Bt^4 - \frac{5}{2}(4-3B)t^2 + \frac{21}{2} \tag{3.26}$$

e annulla il termine successivo; pertanto $B = \frac{3}{8}$ è una scelta possibile e assai semplice di B (*).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

BIBLIOGRAFIA

[1] U. RICHARD, *Sulle successioni di valori stazionari delle soluzioni di equazioni differenziali lineari del 2° ordine*, Rend. Sem. Mat. Torino, **9** (1949-50) pp. 309-324.

[2] — —, *Sulla rappresentazione asintotica degli estremi delle soluzioni di equazioni differenziali lineari del 2° ordine*, Rend. Accad. Lincei (8), **12** (1952) pp. 382-387.

[3] — —, *Sulla soluzione asintotico-numerica della equazione differenziale* $(py')' + qy = 0$ *nel caso oscillante*, Atti Accad. Scienze Torino, **97** (1962-63) pp. 857-890.

[4] — —, *Sulla maggiorazione del resto di una formula asintotica*, Comunicazione presentata al VII Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Genova 30 settembre - 5 ottobre 1964.

[5] M. PICONE - C. MIRANDA, *Esercizi di analisi matematica*, 2ª ed. Roma, Tumminelli, 1945.

[6] G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Bologna, Zanichelli, 2ª ediz. 1949-1956.

[7] F. G. TRICOMI, *Equazioni differenziali*, Torino, Boringhieri, 3ª ed. 1961.

[8] G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge, 2ª ed. 1958.

Pervenuta alla Segreteria dell'U M I.
il 30 settembre 1964