Bollettino
Unione Matematica Italiana

Cataldo Agostinelli

Magnetofluidodinamica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.1, p. 1–79.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

MAGNETOFLUIDODINAMICA

CATALDO AGOSTINELLI

Introduzione.

È ben noto oramai come la Magnetofluidodinamica si occupa dell'influenza dei fenomeni elettromagnetici sul movimento di masse fluide elettricamente conduttrici e delle interazioni che ne nascono e che modificano lo stato di moto del fluido e la distribuzione del campo.

Questi fenomeni erano già noti da tempo e il loro studio si può dire interessò soprattutto i cultori di Geofisica e di Astrofisica. Già intorno al 1927 SYDNEY CHAPMANN, coadiuvato da un giovane laureato, quello che oggi è il professor V. FERRARO dell'Università di Londra, aveva iniziato lo studio teorico delle proprietà dinamiche di una corrente di elettroni e di ioni (o se si vuole di un *plasma*), in un campo magnetico, ponendo le basi per lo sviluppo di una teoria tendente a spiegare i fenomeni delle aurore boreali e delle tempeste geomagnetiche, le quali pare siano dovute alle collisioni con la Terra delle correnti di plasma emesse dal Sole.

L'interesse dei fenomeni di magnetofluidodinamica (m.f.d.) in Astrofisica deriva dal fatto che le stelle si possono considerare costituite di masse fluide ad alta temperatura e di elevata conduttività elettrica, dotate di un campo magnetico proprio, o immerse in campi magnetici più generali, quelli degli ammassi o delle galassie cui appartengono. Così pure la materia interstellare si ritiene conduttrice dell'elettricità e soggetta all'influenza dei campi magnetici.

L'esistenza di stelle, come il Sole, dotate di un campo magnetico, è ben nota. Campi magnetici molto intensi, dell'ordine di 5000 gauss, sono stati riscontrati, come si sa, nelle macchie solari, messi in evidenza da HALE e rivelati dal fenomeno dell'effetto ZEEMANN. Lo stesso fenomeno inoltre ha mostrato l'esistenza di un campo magnetico generale del Sole, analogo a quello terrestre. con l'asse poco inclinato rispetto a quello di rotazione solare, e dell'ordine di 50 gauss.

Campi magnetici variabili, di forte intensità, sono stati poi trovati da BABKOCH in alcune stelle. Diversi argomenti vi sono infine che conducono a ritenere l'esistenza di un campo magnetico generale galattico. Il più importante è quello della *polarizzazione*, scoperto da ILTNER e da HALE. Invero le osservazioni mostrano che la luce di molte stelle è piano-polarizzata, cioè l'intensità luminosa di una stella, esaminata attraverso un prisma di NICOL, presenta un massimo in una data posizione del prisma e un minimo nella posizione perpendicolare alla precedente. Questo si può spiegare soltanto ammettendo che la luce di quelle stelle attraversi gli strati interstellari costituiti da particelle o grani allungati, tutti orientati in una determinata direzione, e questa orientazione non può essere prodotta che da un campo magnetico.

La ripresa degli studi teorici dei fenomeni elettromagnetici nei fluidi conduttori, per molto tempo abbandonati, o poco considerati, rimonta al 1850, ed è dovuta principalmente al professor H. ALFVÈN di Stoccolma, che aveva sopratutto di mira la loro applicazione alla elettrodinamica cosmica. Egli si è interessato particolarmente dello studio della propagazione ondosa, o meglio della formazione in un liquido conduttore di *onde* dette *magnetoidrodinamiche*, ora dette onde di ALFVÈN, onde che effettivamente sono state realizzate sperimentalmente da LUNDQUIST in un cilindro di mercurio in presenza di un campo magnetico, in cui mediante agitazione si era provocata la generazione di un vortice. Sulla formazione di queste onde lo stesso ALFVÈN ha poi fondato una sua teoria sulle macchie solari.

Lo studio della propagazione di onde magnetoidrodinamiche, che inizialmente era ristretto al caso più semplice dei fluidi incompressibili, è andato assumendo uno sviluppo sempre più ampio. perfezionandosi con la considerazione dei casi più complessi di fluidi gassosi comprimibili, dando luogo a numerosissime ricerche che hanno trovato applicazione non solo per la spiegazione dei fenomeni a cui ho accennato, ma anche per l'analisi di fenomeni più complicati che si verificano nella ionosfera, nella cromosfera solare, nelle nebulose spirali, ecc., o che interessano i rami più moderni della fisica, come la Fisica delle alte temperature e la Fisica nucleare.

Ora è proprio per la realizzazione dei reattori termonucleari che sono nati i più grossi e più difficili problemi della m.f.d., o, come si dice anche in questo caso, della *Dinamica* del *plasma*, denominazione che come si sa fu introdotta nella scienza da Langmuir per indicare un gas parzialmente o totalmente ionizzato. Questi problemi derivano dal fatto che il confinamento del plasma ad elevatissima temperatura, di diversi milioni di gradi, entro tubi cilindrici, o torici, è ottenuto mediante l'applicazione di intensi campi magnetici che contrabilanciano la pressione del gas.

Ed ecco così la necessità di conoscere il comportamento dinamico di queste colonne od anelli di plasma, in presenza di campi magnetici, e come questi devono essere applicati per realizzare un confinamento stabile.

Dirò ancora come un'altra importante applicazione della m.f.d. si va delineando nei problemi di volo ad alta velocità in cui mediante campi magnetici si cerca di influenzare le correnti ipersoniche onde limitare l'incremento di temperatura sulla superficie degli aerei.

Lo studio dei moti magnetofluidodinamici può essere effettuato secondo due punti di vista differenti. Un primo punto di vista è quello di servirsi come si suol dire delle *equazioni del continuo*, secondo il quale il fluido, sia esso un liquido, un gas, o una miscela di ioni ed elettroni, cioè un plasma, si considera distribuito con continuità nell'intero dominio in cui esso si muove. È questo il modo con cui sono stati trattati i primi problemi detti di magnetoidrodinamica, inizialmente mediante equazioni semplificate e poi con criteri più dettagliati e completi, tenendo conto della compressibilità del fluido e delle variazioni di temperatura. Questo punto di vista si applica con vantaggio in tutti i casi in cui il cammino libero medio delle particelle che costituiscono il fluido è relativamente molto piccolo in confronto delle altre lunghezze che occorre considerare per lo studio del suo movimento.

In questi casi detto punto di vista offre, con le sue equazioni, una ottima base di indagine, e per le preziose informazioni che ha permesso di ottenere in molti problemi esso ha conseguito un'importanza ampiamente riconosciuta per cui continuerà ad essere utilizzato con notevole profitto in questo ordine di ricerche.

Ma vi sono dei casi, come nella dinamica del plasma, in cui non è più sufficiente considerare i diversi elementi distribuiti con continuità, poichè lo spazio in cui essi si muovono è generalmente vacante, e la ricorrenza di particelle costituisce un evento per cui ciascuna di esse andrebbe considerata separatamente. Si ricorre allora ai ***metodi statistici***, introducendo una ***funzione*** di ***distribuzione*** per la velocità delle particelle e facendo ricorso all'equazione di BOLTZMANN.

Ho già detto come la teoria della propagazione di onde magnetoidrodinamiche ha permesso di giustificare la formazione delle macchie del Sole, di dar ragione inoltre di fenomeni più complessi che si verificano nella fotosfera solare, di spiegare la formazione delle braccia nelle nebulose spirali, ecc.

Una questione connessa con la propagazione ondosa è quella dei fronti d'onda, cioè dello studio di quelle superficie che si propagano in conseguenza di una perturbazione, in corrispondenza delle quali sono discontinue le derivate prime degli elementi del moto, e che sono le superficie caratteristiche delle equazioni differenziali che governano il movimento e la distribuzione del campo.

Ma in un fluido comprimibile, elettricamente conduttore, in seguito a una perturbazione di carattere esplosivo, si può avere un fronte d'urto attraverso il quale sono discontinui le velocità, la pressione, la densità, la temperatura e il campo magnetico. Fenomeni del genere si presume che avvengano nella cromosfera solare e nei gas interstellari e portano il nome di *onde d'urto*.

Particolarmente importanti in m. f. d. sono anche gli studi sui moti vorticosi, che possono trovare applicazione per spiegare il meccanismo di formazione delle stelle in seno alle masse nebulari, e portare inoltre un contributo alla cosidetta *dinamoteoria*, che attribuisce la permanenza del magnetismo terrestre a moti vorticosi nella massa fluida interna.

A questo proposito devo ricordare che un suggestivo tentativo per spiegare la permanenza del magnetismo terrestre è dovuto a BULLARD che l'attribuisce a speciali moti convettivi interni, escludendo l'influenza del moto di precessione e di nutazione della Terra. Altri studi sull'argomento, come quelli di ELSASSER, conducono piuttosto a considerare le variazioni secolari del magnetismo terrestre. Ma una dimostrazione soddisfacente non può essere data che cercando una soluzione delle equazioni magnetoidrodinamiche basata sulla teoria dei moti vorticosi e che rispecchi le carrateristiche del fenomeno.

Ugualmente importante in m. f. d. è la considerazione dei moti turbolenti, che, come ha mostrato BATCHELOR, possono dar luogo alla formazione spontanea di campi magnetici, e molti studiosi ritengono che il campo magnetico terrestre, e quello generale delle stelle, siano dovuti a moti turbolenti delle masse fluide interne.

Sulla teoria invariante della turbolenza isotropa in magnetoidrodinamica vi sono alcuni lavori di CHANDRASEKHAR, ma molto vi è ancora da lavorare in questo campo che presenta svariate questioni aperte alla indagine.

Per la complessità delle equazioni che regolano i moti magnetofluidodinamici e la grande difficoltà di trovare soluzioni corrispondenti a dati valori iniziali e ad assegnate condizioni ai limiti, spesso può essere opportuno riferirsi a soluzioni corrispondenti a moti stazionari che trovano la loro applicazione in svariatissimi casi e fra i moti stazionari sono particolarmente importanti, per l'applicazione all'Astrofisica, quelli di masse gassose altamente conduttrici dell'elettricità, rotanti attorno a un asse.

Dai moti stazionari. o più in particolare ancora dalle configurazioni di equilibrio magnetostatico, si può passare allo studio delle piccole oscillazioni e affrontare quindi il problema della stabilità di quelle configurazioni o di quei movimenti.

Il problema della stabilità in m. f. d. è veramente una grande questione. di capitale importanza specialmente nella dinamica del plasma, dove nei processi di confinamento si riscontrano due tipi di instabilità, quella cosidetta a "*gomito*" e quella a "*salciccia*". Ma esso ha anche notevole importanza nell'Astrofisica e nella Cosmogonia dove interessa conoscere i limiti di instabilità delle masse fluide stellari, soggette alla propria gravitazione e a diverse cause perturbatrici, o delle masse nebulari, che, dalla forma ellissoidale schiacciata, evolvendosi dànno luogo alle nebulose spirali. In questi casi si dimostra che i campi magnetici agiscono in favore della stabilità.

Ma l'importanza dei problemi di stabilità in m. f. d. deriva anche dalla grande difficoltà che presentano e dalla mancanza di metodi generali per la loro risoluzione. Sono stati dati recentemente dei criteri, basati su considerazioni energetiche, per riconoscere la stabilità o meno di una data configurazione di equilibrio. Questi criteri sono stati ultimamente estesi al caso dei moti stazionari, in particolare a quello dei moti rotatori assiali; ma lo studio della stabilità generale in m. f. d. è ancora una questione aperta, che offre ai giovani un vasto campo di ricerca.

§ 1. Le equazioni fondamentali della magnetofluidodinamica.

1. Le equazioni maxwelliane ed euleriane.

Le equazioni che governano i fenomeni di interazione fra il campo elettromagnetico e il movimento di un fluido elettricamente conduttore sono basate sull'ipotesi della validità delle equazioni di MAXWELL, che, scritte nel sistema M K S, di GIORGI, risultano

$$\text{rot}\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\text{rot}\, \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\text{div}\, \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.3}$$

$$\text{div}\, \boldsymbol{D} = \rho_e \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1.6}$$

dove $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, ed $\boldsymbol{I}$ sono i vettori che rappresentano rispettivamente l'intensità del campo magnetico e del campo elettrico, l'induzione magnetica, l'induzione elettrica, o vettore spostamento, e la densità di corrente, mentre ρ_e è la densità delle cariche elettriche, e infine ε è il potere dielettrico del fluido e μ la permeabilità magnetica, che ordinariamente si ritengono costanti.

La densità di corrente $\boldsymbol{I}$, espressa dalla legge di Ohm, è data a sua volta dall'equazione

$$\boldsymbol{I} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}) + \rho_e \boldsymbol{v} \tag{1.7}$$

essendo σ la conduttività elettrica del fluido e $\boldsymbol{v}$ la velocità delle particelle fluide.

Alle equazioni di MAXWELL vanno associate le equazioni euleriane del moto, in cui si tenga conto delle forze elettromagnetiche, e cioè dell'azione elettrostatica e della forza deflettente di LORENTZ. Se $\boldsymbol{F}$ è inoltre la forza di natura non elettromagnetica, riferita all'unità di massa, agente sul fluido, tenendo ancora conto della viscosità, avremo

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho_e \boldsymbol{E} + \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} + \rho \boldsymbol{F} - \text{grad}\, p + (\lambda' + \mu')\, \text{grad div}\, \boldsymbol{v} + \mu' \Delta_2 \boldsymbol{v} \tag{1.8}$$

dove ρ è la densità del fluido, p è la pressione idrodinamica, e λ', μ' sono i coefficienti di viscosità, analoghi alle costanti di LAMÉ della teoria della elasticità. Nel caso di un fluido perfetto i termini dipendenti dalla viscosità ovviamente svaniscono. Nel caso di un gas, se si ammette che ogni elemento gassoso si dilati ugualmente in tutte le direzioni si ha

$$\lambda' = -\frac{2}{3}\mu'$$

All'equazione del moto (1.8) va aggiunta l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1.9}$$

che esprime il principio della conservazione della massa del fluido durante il movimento, ed inoltre l'equazione di stato, che per un fluido barotropico è della forma.

$$f(\rho, p) = 0\,. \tag{1.10}$$

Nel caso più generale l'equazione di stato stabilisce un legame tra la densità ρ, la pressione p e la temperatura assoluta T di un fluido, ed è quindi della forma

$$F(\rho, p, T) = 0\,.$$

Ma se mediante ipotesi particolari si viene ad eliminare la temperatura T, ci si riduce ad un'equazione del tipo (1.10). Il caso più importante è quello dei gas perfetti in cui l'equazione di stato risulta

$$p = R\rho T$$

dove R è la costante del gas. In questo caso si introduce una nuova variabile incognita, la temperatura T, e per questo occorre un'altra equazione oltre quelle considerate. Questa ulteriore equazione è *l'equazione dell'energia*. Si è condotti in tal caso alla Magnetogasdinamica (§ 2, n° 3). Un altro caso importante è quello di un gas perfetto in condizioni adiabatiche che si evolve cioè senza perdita e senza assorbimento di calore; la relazione tra la densità e la pressione in questo caso è della forma

$$p = C\rho^{\gamma}$$

dove C e γ sono delle costanti, la seconda delle quali è il rapporto tra il calore specifico del gas a pressione costante e quello a volume costante ($\gamma \simeq 1{,}408$).

Se il fluido infine è un liquido a temperatura costante, la densità ρ è costante.

2. Equazioni ridotte.

Osserviamo che prendendo il rotore di ambo i membri della (1.1) ed eliminando quindi il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ e la densità di corrente $\boldsymbol{I}$, servendosi delle equazioni (1.2), (1.5) e (1.8) si ricava

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = \frac{1}{\sigma\mu}\left\{\Delta_2 \boldsymbol{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \operatorname{rot}(\rho_e \boldsymbol{v})\right\}. \tag{1.11}$$

In assenza di movimento, cioè per $\boldsymbol{v} = 0$, la (1.11) si riduce all'equazione della telegrafia con filo

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu}\Delta_2 \boldsymbol{H} - \frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}\,. \tag{1.12}$$

e se non vi sono oscillazioni di alta frequenza sarà in generale

$$\frac{\varepsilon}{\sigma}\left|\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}\right| \ll \left|\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right|$$

cioè sarà trascurabile nella (1.12) il termine nella $\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$, nel qual caso essa si ridurrà ad un' equazione del tipo della conduzione del calore, e sotto questa forma è per esempio usata per analizzare lo skineffect nei conduttori che trasportano corrente alternata.

Ora nei problemi magnetofluidodinamici di effettivo interesse, anche se vi sono sorgenti di oscillazione di alta frequenza, queste involgeranno generalmente un piccolo ammontare di energia e pertanto potranno essere ignorate, cioè nella (1.11) può essere trascurato il termine contenente la $\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$. Questo equivale a trascurare nella (1.1), secondo l' approssimazione proposta da ALFVÈN, la *corrente di spostamento* in confronto della corrente di conduzione $\boldsymbol{I}$, e a scrivere quindi

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}. \tag{1.13}$$

Osserviamo ancora come la *corrente di convezione* è molto piccola in confronto della corrente di conduzione, per cui, trascurandola, la (1.7) si riduce alla

$$\boldsymbol{I} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \tag{1.14}$$

Per la stessa ragione nella (1.11) può essere trascurato il termine rot $(\rho_e \boldsymbol{v})$, e l' equazione da considerare risulta

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = \eta \Delta_2 \boldsymbol{H} \quad , \quad \mathrm{con}\ \eta = \frac{1}{\sigma\mu} \tag{1.15}$$

e

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0\,. \tag{1.15'}$$

I risultati precedenti equivalgono dunque a trascurare la corrente di spostamento e la corrente di convezione in confronto della corrente di conduzione. In tal modo le equazioni di MAXWELL e di EULERO che reggono i fenomeni magnetofluidodinamici si riducono alle seguenti:

$$\text{(A)}\qquad \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} \\
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \\
\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{I} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \\
\rho \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} + \rho \boldsymbol{F} - \mathrm{grad}\, p + (\lambda' + \eta')\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{v} + \mu' \Delta_2 \boldsymbol{v} \\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\
f(\rho, p) = 0
\end{array}\right.$$

Prendendo il rotore dalla prima delle equazioni (A), e tenendo conto della quinta e della seconda, si deduce, per il campo magnetico, l'equazione (1.15), alla quale va associata la condizione di solenoidalità $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$, che segue dalla seconda delle (A) per $\mu =$ costante.

Una ulteriore semplificazione delle equazioni della m. f. d. si ottiene nel caso dei fluidi incompressibili in cui la densità ρ è costante. In questo caso l'equazione (1.9) di continuità diventa più semplicemente

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{1.16}$$

La magnetofluidodinamica prende allora più particolarmente il nome di *magnetoidrodinamica* e le equazioni relative risultano

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} \\ & \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ & \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \\ & \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \\ & \boldsymbol{I} = \sigma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \\ & \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} + \rho \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p + \rho \nu \Delta_2 \boldsymbol{v} \\ & \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \\ & \rho = \text{cost}, \end{aligned} \right.$$

dove nell'equazione del moto è $\nu = \frac{\mu'}{\rho}$, il cosidetto *coefficiente* di *viscosità cinematica.*

Poichè risulta

$$\boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \mu \boldsymbol{H} = \mu \left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \boldsymbol{H}^2 \right)$$

dove $\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}$ è l'omografia vettoriale che esprime la derivata del vettore $\boldsymbol{H}$ rispetto al punto, l'equazione del moto si può ora scrivere

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mu \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} - \operatorname{grad} \left(p + \frac{1}{2} \mu \boldsymbol{H}^2 \right) + \rho \boldsymbol{F} + \rho \nu \Delta_2 \boldsymbol{v}, \tag{1.17}$$

dove $\frac{1}{2} \mu \boldsymbol{H}^2$ è la *pressione magnetica.*

Nel caso dei fluidi di alta conduttività elettrica come quelli che si considerano nell'Astrofisica e nella Fisica del plasma, ritenendo la conduttività elettrica infinita, e il fluido perfetto, le equazioni del quadro (A) si semplificano ancora e si ha

$$
(C) \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \\ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} = 0 \\ \rho \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} + \rho \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ f(\rho, p) = 0 \end{cases}
$$

In questo caso, essendo $\eta = 0$, l'equazione (1.15) del campo magnetico diventa

$$
(1.18) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = 0 .
$$

3. Analogia tra il campo magnetico e la vorticità. Teorema di Alfvèn.

Riferendoci al caso di un fluido incompressibile in cui le forze di massa $\boldsymbol{F}$ derivano da un potenziale U, se per un momento supponiamo che il fuido considerato non sia conduttore, l'equazione (1.17) del moto diventa

$$
(1.19) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^2 - U \right) + \nu \Delta_2 \boldsymbol{v} .
$$

Prendendo il rotore di ambo i membri, e indicando con $\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ il *vortice*, si ha

$$
(1.20) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{rot} (\omega \wedge \boldsymbol{v}) = \nu \Delta_2 \omega , \quad \text{con } \operatorname{div} \omega = 0
$$

Queste equazioni sono formalmente identiche alle equazioni (1.15) e (1.15'), dove in luogo della viscosità ν vi è la costante η, che ha il carattere di diffusività magnetica.

Dunque la vorticità ω di un fluido non conduttore e il campo magnetico $\boldsymbol{H}$ relativo al moto di un fluido conduttore sono due vettori solenoidali formalmente analoghi. Ne segue che molti dei risultati della teoria dei vortici dell'idrodinamica classica possono essere, nella magnetoidrodinamica, interpretati in termini del campo magnetico. Per esempio, il teorema di Helmholtz, il quale afferma che in un fluido perfetto le linee vorticose si muovono col fluido, mostra che in un fluido per cui $\eta=0$, cioè di conduttività elettrica infinita, le linee di forza magnetica sono trasportate dal mezzo. Questo significa anche che il moto relativo del fluido rispetto alle linee di forza del campo è nullo, e, seguendo ALFVÈN si può dire che le linee di forza sono *congelate* (frozen) nel fluido.

Una conseguenza immediata del fatto che in un fluido perfetto di alta conduttività elettrica le linee di forza magnetica, così come le linee vorticose, si muovono col fluido, è data dal teorema di ALFVÈN, il quale afferma che nell'ipotesi in cui il coefficiente di diffusività magnetica sia nullo, il flusso del campo attraverso una qualsiasi superficie fluida si mantiene costante.

4. Il sistema di stress derivante dalle forze elettromagnetiche.

Ritornando a porci dal punto di vista generale in cui si tenga conto anche della corrente di convezione, e della corrente di spostamento, osserviamo che la forza elettromagnetica per unità di volume, $\rho_e \boldsymbol{E} + \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B}$, può essere così scritta

$$(1.21) \qquad \rho_e \boldsymbol{E} + \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E})}{\partial t} + \mu \left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \boldsymbol{H}^2 \right) + \varepsilon \left(\operatorname{div} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{d\boldsymbol{E}}{dP} \boldsymbol{E} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \boldsymbol{E}^2 \right).$$

In questa equazione soltanto il primo termine del secondo membro è una forza di massa, che deriva dalla variazione rispetto al tempo del vettore di POYNTING $\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}$. I rimanenti termini del secondo membro della (1.21) rappresentano le forze derivanti da un sistema di sforzi interni (o *stress*), definiti dal gradiente dell'omografia vettoriale Φ, che e più precisamente una *dilatazione*, espressa dalla

$$(1.22) \qquad \Phi = \mu \left[\mathcal{H} (\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}) - \frac{1}{2} H^2 \right] + \varepsilon \left[\mathcal{H} (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}) - \frac{1}{2} E^2 \right]$$

dove $\mathcal{H}$ è il simbolo di una *diade*.

Dunque la forza elettromagnetica per unità di volume è data da

$$\rho_e \boldsymbol{E} + \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} = -\varepsilon\mu \frac{\partial(\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H})}{\partial t} + \operatorname{grad} \Phi .$$

Questo sistema di sforzi interni può essere considerato come prodotto da tubi di forza elettrica e di forza magnetica esercitanti trazioni longitudinali rispettivamente di grandezza $\frac{1}{2}\varepsilon E^2$, $\frac{1}{2}\mu H^2$, e pressioni laterali della stessa grandezza.

Nel caso in cui siano trascurabili la corrente di convezione e quella di spostamento, la detta forza elettromagnetica si riduce a quella di LORENTZ $\boldsymbol{I}\wedge\boldsymbol{B}$, e si ha

$$(1.23)\qquad \boldsymbol{I}\wedge\boldsymbol{B}=\operatorname{grod}\Phi=\eta\operatorname{grad}\left[\mathcal{H}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})-\frac{1}{2}H^2\right]=\mu\left[\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H}-\frac{1}{2}\operatorname{grad}H^2\right]$$

Ora, se s_H è la lunghezza di arco di una linea di forza magnetica, $\tau=\dfrac{dP}{ds_H}$ è il versore della tangente nel punto P, R il raggio di curvatura ed $\boldsymbol{n}$ il versore della normale principale, si ha

$$\mu\,\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H}=\frac{d}{ds_H}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right)\cdot\tau+\frac{\mu H^2}{R}\boldsymbol{n},$$

e quindi

$$(1.24)\qquad \boldsymbol{I}\wedge\boldsymbol{B}=\frac{d}{ds_H}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right)\cdot\tau+\frac{\mu H^2}{R}\boldsymbol{n}-\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right).$$

Il primo termine del secondo membro di questa equazione rap presenta una forza tangenziale alla linea di forza magnetica, la quale determina lungo di essa una tensione $\frac{1}{2}\mu H^2$. Il secondo termine è la forza trasversale che produce l'inflessione della linea di forza. Il terzo termine infine è la forza che determina la pressione magnetica $\frac{1}{2}\mu H^2$.

§ 2. Le equazioni fondamentali della dinamica del plasma e della magnetogasdinamica.

1. Le equazioni della Dinamica del plasma.

Ponendoci ora da un punto di vista più generale, stabiliremo le equazioni del movimento dei diversi componenti di un gas ionizzato, cioè di un plasma. Da esse si deducono le equazioni globali considerando il plasma come un continuo, e quindi le equazioni della magnetogasdinamica.

Un plasma, consiste in un gas parzialmente o totalmente ionizzato, nel caso più generale può essere considerato come una miscela di n specie di componenti, costituite di ioni, elettroni, e particelle neutre. Per ciascuna di queste specie occorre considerare la temperatura, la pressione gasdinamica, la densità e la velocità. Indicheremo rispettivamente con T_s, p_s, ρ_s, v_s^i, la temperatura, la pressione, la densità e le componenti cartesiane della velocità della specie s^{ma}, con $s=1,2,\ldots,n$. Inoltre occorre considerare le componenti E^i del campo elettrico $\boldsymbol{E}$ e quelle H^i del campo magnetico $\boldsymbol{H}$, per cui si hanno in totale $6n+6$ quantità incognite. Sono invece da ritenere note le masse m_s delle particelle di ciascuna specie e la carica elettrica e_s.

Per lo studio delle $6n+6$ quantità incognite $T_s, p_s, \rho_s, v_s^i, E^i, H^i$, occorrono $6n+6$ equazioni scalari che le connettono. Di queste equazioni $6n$ sono fornite dalla gasdinamica, le altre sei sono le equazioni elettromagnetiche.

Le equazioni gasdinamiche, in numero di sei per ogni specie, sono precisamente:

a) L'*equazione di stato*, che collega la temperatura, la pressione e la densità di ciascuna specie. b) L'*equazione di continuità*, che esprime per ciascuna specie la conservazione della massa. c) *L'equazione del moto*, che in generale è equivalente a tre equazioni scalari e che esprime il principio della conservazione della quantità di moto. d) L'*equazione dell'energia*, che esprime per ogni specie il principio della conservazione dell'energia.

A queste equazioni gasdinamiche occorre associare le equazioni di MAXWELL, in numero di sei, atte a descrivere il campo elettromagnetico.

a) *Equazione di stato.*

Per ogni costituente del plasma vi è una relazione funzionale fra p_s, ρ_s e T_s della forma

$$p_s = f(\rho_s, T_s), \tag{2.1}$$

e se la densità è sufficientemente bassa, con molta buona approssimazione è sufficiente la semplice equazione di stato di un gas perfetto che può essere scritta

$$p_s = R\nu_s T_s \tag{2.2}$$

dove R è la costante universale dei gas e $\nu_s = \frac{\rho_s}{m_s}$, è il numero di densità della s^{ma} specie.

b) *Equazione di continuità.*

L'equazione di continuità per l's^{ma} specie risulta

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_s \boldsymbol{v}_s) = \sigma_s \tag{2.3}$$

nella quale σ_s rappresenta la massa sorgente nell'unità di tempo e per unità di volume della s^{ma} specie, che può essere dovuta a processi di ionizzazione o a reazioni chimiche. Se non vi sono reazioni chimiche e il grado di ionizzazione del plasma si mantiene costante, allora è $\sigma_s = 0$.

In ogni caso se alcune delle σ_s non sono nulle, per la conservazione della massa del plasma, considerato nel suo insieme, si ha

$$\sum_{s=1}^{n} \sigma_s = 0. \tag{2.4}$$

c) *L' equazione del moto.*

L'equazione del moto per ciascuna specie può essere così scritta

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_s \boldsymbol{v}_s\right) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_s v_s^i \boldsymbol{v}_s\right) = \operatorname{grad}\left(\tau_s - p_{ts}\right) + \boldsymbol{F}_{gs} + \boldsymbol{F}_{es} + \sigma_s \boldsymbol{Z}_s \tag{2.5}$$

dove $\sigma_s \boldsymbol{Z}_s$ è la variazione della quantità di moto nell' unità di tempo, dovuta alle sorgenti, e riferita all' unità di volume. La somma di queste quantità di moto per tutte le specie di cui è costituito il plasma, è nulla, cioè

$$\sum_{s=1}^{n} \sigma_s \boldsymbol{Z}_s = 0 \tag{2.6}$$

La τ_s è l'omografia degli sforzi interni per la specie s^{ma}. dovuti alla viscosità, mentre p_{ts} è la pressione totale relativa alla stessa specie, che è la somma della pressione p_s del gas e della pressione di radiazione p_{rs}. A temperature basse, o moderatamente alte, la pressione di radiazione è ordinariamente trascurabile ed essa vien considerata soltanto a temperature molto alte.

Il vettore $\boldsymbol{F}_{gs}$ rappresenta la forza di massa, per unità di volume, di natura non elettromagnetica, come la forza gravitazionale, mentre $\boldsymbol{F}_{es}$ rappresenta la forza elettromagnetica, anch' essa riferita all' unità di volume, che può essere così scritta

$$\boldsymbol{F}_{es} = \rho_{es}(\boldsymbol{E} + \mu\, \boldsymbol{v}_s \wedge \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{F}_{so} \tag{2.7}$$

dove $\rho_{es} = \nu_s\, e_s$ è la densità di carica elettrica della specie s^{ma}, e_s è la carica di una particella della stessa specie e ν_s è il numero di queste particelle per unità di volume.

Il vettore $\boldsymbol{F}_{so}$ rappresenta infine l'interazione risentità dalla s^{ma} specie per effetto della presenza di altre particelle del plasma. Per il principio dell' azione e reazione sarà

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_{so} = 0\,. \tag{2.8}$$

Le altre quantità che figurano nella (2.7) hanno il solito significato.

d) *Equazione dell' energia.*

L' equazione che esprime la conservazione dell' energia per la specie s^{ma} risulta

$$\frac{\partial \mathcal{E}_s}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\mathcal{E}_s \boldsymbol{v}_s - \tau_s \boldsymbol{v}_s + p_{ts} \boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{Q}_s\right) = \varepsilon_s \tag{2.9}$$

dove $\mathcal{E}_s = \rho_s\, \mathcal{E}_{ms}$ è l'energia totale per unità di volume della specie s^{ma}, essendo $\mathcal{E}_{ms}$ l'energia totale della stessa specie per unità di massa. Più specificatamente, indicando, sempre per la specie

s^{ma} e per unità di massa, con U_{ms} l'energia interna, con $\frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}_s^2$ l'energia cinetica, con Φ_s l'energia potenziale, e con E_{rs} l'energia di radiazione per unità di volume, si ha

$$\mathcal{E}_{ms} = U_{ms} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}_s^2 + \Phi_s + \frac{E_{rs}}{\rho_s}\,. \tag{2.10}$$

Il primo termine del primo membro dell'equazione (2.9) rappresenta allora, per la specie s^{ma}, la variazione col tempo della energia per unità di volume. Il termine div $(\mathcal{E}_s\boldsymbol{v}_s)$ dà la variazione della corrente di energia di convenzione; il termine — div $(\tau_s\boldsymbol{v}_s)$ dà la variazione dell'energia di dissipazione per viscosità, mentre — div $\boldsymbol{Q}_s$, rappresenta la variazione di energia dovuta al flusso di calore, il quale è composto del flusso di calore di conduzione $\boldsymbol{Q}_{cs}$ e del flusso di calore di radiazione $\boldsymbol{Q}_{rs}$.

Infine il secondo membro ε_s rappresenta l'energia per unità di volume dovuta alle sorgenti di energia, che è composta di quella E_{es} generata dal campo elettromagnetico e di quella generata dalle reazioni chimiche o nucleari.

e) *Le equazioni del campo elettromagnetico.*

Alle equazioni precedenti occorre associare le equazioni di Maxwell che governano il campo elettromagnetico, e cioè:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2.11}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\,\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \tag{2.12}$$

essendo al solito $\boldsymbol{H}$ l'intensità del campo magnetico, $\boldsymbol{E}$ l'intensità del campo elettrico, $\boldsymbol{I}$ la densità di corrente elettrica, $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ il vettore spostamento dielettrico e $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ il vettore induzione magnetica.

La capacità o potere dielettrico ε, detta comunemente costante dielettrica, e la permeabilità magnetica μ per un mezzo isotropo sono ordinariamente costanti.

Ma per un mezzo anisotropo devono essere considerate quantità tensoriali, o se si vuole omografie vettoriali, per cui in questo caso i vettori $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ non sono più paralleli rispettivamente ad $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$.

L'interazione tra il campo elettromagnetico e il movimento del plasma è espressa per mezzo della corrente $\boldsymbol{I}$ che è data da

$$\boldsymbol{I} = \sum_{s=1}^{n} \rho_{es}\boldsymbol{v}_s\,. \tag{2.13}$$

Questa corrente è dunque dovuta al moto delle varie particelle cariche del plasma.

2. Variabili macroscopiche ed equazioni globali.

Per descrivere il movimento di un plasma spesso, invece delle variabili parziali ρ_s, p_s, T_s, $\boldsymbol{v}_s'$, è più conveniente riferirsi a quantità macroscopiche, considerando il plasma nel suo insieme.

Le relazioni fra le grandezze macroscopiche e le corrispondenti variabili parziali sono definite nel modo che segue.

Si definisce intanto il numero densità ν del plasma come la somma dei numeri di densità ν_s delle diverse specie:

$$\nu = \sum_{s=1}^{n} \nu_s \tag{2.14}$$

e quindi la densità ρ del plasma é data da

$$\rho = m\nu = \sum_{s=1}^{n} m_s \nu_s = \sum_{s=1}^{n} \rho_s\,, \tag{2.15}$$

dove m è la massa media delle particelle.

La pressione p del plasma è la somma delle pressioni parziali p_s delle diverse specie

$$p = \sum_{s=1}^{n} p_s \tag{2.16}$$

e la temperatura è data da

$$T = \frac{1}{\nu} \sum_{s=1}^{n} \nu_s T_s\,. \tag{2.17}$$

Si definisce poi la velocità $\boldsymbol{v}$ del plasma mediante la relazione

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^{n} \rho_s \boldsymbol{v}_s \tag{2.18}$$

e quindi la velocità di diffusione $\boldsymbol{w}_s$ della specie s^{ma} risulta

$$\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}\,. \tag{2.19}$$

Si considera inoltre l'eccesso di carica elettrica ρ_e come la somma delle densità di carica ρ_{es} di tutte le specie

$$\rho_e = \sum_{s=1}^{n} \rho_{es} = \sum_{s=1}^{n} e_s \nu_s\,. \tag{2.20}$$

Infine la densità di corrente elettrica del plasma è definita dalle

$$\boldsymbol{I} = \sum_{s=1}^{n} \rho_{es} \boldsymbol{v}_s = \sum_{s=1}^{n} \rho_{es} \boldsymbol{w}_s + \sum_{s=1}^{n} \rho_{es} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + \rho_e \boldsymbol{v} \tag{2.21}$$

dove $\boldsymbol{i}$ è la corrente di conduzione e $\rho_e \boldsymbol{v}$ è la corrente di convezione.

Le equazioni fondamentali globali della dinamica del plasma e della magnetogasdinamica, espresse per mezzo delle grandezze macroscopiche, si deducono ora facilmente da quèlle già date per mezzo delle variabili parziali.

a) *L'equazione di stato* si ottiene sommando le n equazioni del tipo (2.2), e si ha

(2.22) $$p = \sum_{s=1}^{n} p_s = R \sum_{s=1}^{n} \nu_s T_s = R \nu T = R_g \rho T ,$$

dove $R_g = \frac{R}{m}$ è la costante del gas.

b) Così pure *l'equazione di continuità* si ottiene sommando le n equazioni (2.3), e si ricava

(2.23) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 .$$

c) Per avere ora *l'equazione globale del moto*, indichiamo con

(2.24) $$\boldsymbol{F}_g = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_{gs}$$

la forza di natura non elettromagnetica, e con

(2.25) $$\boldsymbol{F}_e = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_{es} = \rho_e \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{H}$$

la forza elettromagnetica.

Sommando le equazioni (2.5), osservando che

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_s \boldsymbol{v}_s{}' \boldsymbol{v}_s) = \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} + \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{v} + \operatorname{grad} \sum_{s=1}^{n} \mathcal{H}(\rho_s \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{w}_s)$$

e ponendo ancora

(2.26) $$\tau = \sum_{s=1}^{n} [\tau_s - \mathcal{H}(\rho_s w_s, w_s)]$$

si ottiene

(2.27) $$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} + \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad}(\tau - p_t) + \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_e .$$

Tenendo conto dell'equazione (2.23) di continuità si può scrivere ancora

(2.27') $$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} = \operatorname{grad}(\tau - p_t) + \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_e .$$

L'omografia vettoriale τ degli sforzi interni di viscosità, definita dalla (2.26), dipende in modo molto complicato dal moto molecolare. In prima approssimazione, in accordo colle relazioni di Navier-Stokes, si può assumere

(2.28) $$\tau = 2 \mu' D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} + \lambda' \operatorname{div} \boldsymbol{v}$$

dove

(2.29) $$D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dP} + K \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \right) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} - \frac{1}{2} (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \wedge$$

è la *dilatazione* dell'omografia $\frac{dv}{dP}$; inoltre μ' e λ' sono i coefficienti di viscosità.

Prendendo il gradiente di ambo i membri della (2.28) si ha

$$\text{grad}\, c = (\lambda' + \mu')\,\text{grad div}\, \boldsymbol{v} + \mu'\,\Delta_2 \boldsymbol{v}. \tag{2.30}$$

La pressione totale p_t è la somma della pressione gasdinamica p a della pressione di radiazione p_r:

$$p_t = \sum_{s=1}^{n} p_{st} = \sum_{s=1}^{n} p_s + \sum_{s=1}^{n} p_{rs} = p + p_r. \tag{2.31}$$

La pressione gasdinamica p è quella che interviene nell'equazione di stato.

La pressione di radiazione p_r è invece determinata da un fenomeno di radiazione molto complicato. Tuttavia nelle applicazioni ai problemi di Astrofisica e di Ingegneria si può usare la formula molto semplice

$$p_r = \frac{1}{3}\, a_r\, T^4 \tag{2.32}$$

essendo a_r la costante di STEFAN-BOLTZMANN.

d) Consideriamo ora l'*equazione globale dell'energia*, che si ottiene sommando le equazioni del tipo (2.9); si ha così

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\mathcal{E}_m) + \text{div}(\rho\,\mathcal{E}_m\,\boldsymbol{v}) = \text{div}(\tau\boldsymbol{v} - p_t\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{Q}) + \varepsilon_t. \tag{2.33}$$

In questa equazione $\mathcal{E}_m$ rappresenta l'energia totale del plasma per unità di massa, che per la (2.10) è data da

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{\rho}\sum_{s=1}^{n} \rho_s\,\mathcal{E}_{ms} = U_m + \frac{1}{2}v^2 + \Phi + \frac{E_r}{\rho} \tag{2.34}$$

dove

$$U_m = \frac{1}{\rho}\sum_{s=1}^{n}\left(\rho_s\, U_m + \frac{1}{2}\rho_s\, w_s^2\right)$$

è l'energia totale interna del plasma, $\frac{1}{2}v^2$ è l'energia cinetica, e

$$\Phi = \frac{1}{\rho}\sum_{s=1}^{n} \rho_s\,\Phi_s$$

è l'energia potenziale, tutte e tre riferite all'unità di massa, mentre $E_r = \sum_{s=1}^{n} E_{rs}$ è l'energia totale di radiazione per unità di volume.

In una prima approssimazione, conformemente alla (2.32), si ha

$$E_r = a_r\, T^4 = 3\,p_r. \tag{2.35}$$

Il vettore $\boldsymbol{Q}$, che rappresenta la corrente di calore nel plasma, è il risultante dei vettori $\boldsymbol{Q}_c$, $\boldsymbol{Q}_r$, che rappresentano rispettivamente il flusso di calore di conduzione e quello del calore di radiazione: $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_c + \boldsymbol{Q}_r$. Il flusso del calore di conduzione dipende in modo molto complicato dal moto molecolare e in prima approssimazione si può assumere

$$\boldsymbol{Q}_c = \varkappa \operatorname{grad} T \tag{2.36}$$

dove $\varkappa$ è il coefficiente di conducibilità del calore, che in generale è una funzione della temperatura e della composizione del plasma.

Così pure il flusso di calore di radiazione è dovuto a un fenomeno molto complesso e in prima approssimazione si può assumere

$$\boldsymbol{Q}_r = \frac{c}{3\chi\rho} \operatorname{grad} E_r = \frac{c}{\chi\rho} \operatorname{grad} p_r \tag{2.37}$$

dove c è la velocità della luce e χ è il cosidetto *coefficiente di opacità*, o coefficiente di assorbimento medio di ROSELAND, che in generale dipende dalla temperatura T e dalla densità ρ.

Infine nella (2.33) ε_t rappresenta l'energia totale sorgente, che è la somma di quella ε_e dovuta al campo elettromagnetico e di quella $\varepsilon_c = \rho\, \varepsilon_r$ dovuta alle reazioni chimiche o nucleari, essendo ε_r il *coefficiente di generazione dell'energia*, cioè l'energia generata nell'unità di tempo e per unità di massa a causa delle reazioni nucleari. In quanto all'energia ε_e dovuta al campo elettromagnetico risulta

$$\varepsilon_e = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{I}.$$

e) Occorre considerare ancora l'equazione di conservazione delle cariche elettriche. Per questo osserviamo che moltiplicando ambo i membri della equazione di continuità (2.3) per il fattore $\gamma_s = \dfrac{e_s}{m_s}$, poichè

$$\frac{\rho_s e_s}{m_s} = \nu_s\, e_s = \rho_{es}$$

è la densità di carica elettrica della specie s^{ma}, si ottiene

$$\frac{\partial \rho_{es}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{es} \boldsymbol{v}_s) = \gamma_s\, \sigma_s \tag{2.38}$$

che è l'equazione di conservazione della carica di ciascuna specie che possiede una carica elettrica.

Sommando le n equazioni (2.38), e osservando che per la conservazione della carica totale del plasma risulta $\sum_{s=1}^{n} \gamma_s\, \sigma_s = 0$, si ottiene

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{I} = 0\,, \tag{2.39}$$

che è l'equazione di conservazione della carica elettrica del plasma, o l'equazione di continuità elettrica.

f) Rimane infine da considerare l'equazione della corrente elettrica. Per questo moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione (2.5) del moto della specie s^{ma} per γ_s, e sommiamo per tutti i valori di s. Abbiamo così

$$\begin{aligned}(2.40) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{I}}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_{es} \boldsymbol{v}_s' v_i) &= \\ = \sum_{s=1}^{n} \operatorname{grad} [\gamma_s (\tau_s - p_{ts})] &+ \sum_{s=1}^{n} \gamma_s (\boldsymbol{F}_{gs} + \boldsymbol{F}_{se} + \sigma_s \boldsymbol{Z}_s)\end{aligned}$$

che è l'equazione della corrente elettrica. Essa è molto complicata, per cui nello studio della dinamica del plasma ordinariamente si sostituisce ad essa una relazione più semplice che esprime la legge di OHM generalizzata e cioè

$$(2.41) \qquad \boldsymbol{I} = \sigma(\boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}) + \rho_e \boldsymbol{v},$$

dove σ è la conduttività elettrica del plasma.

3. Le equazioni fondamentali della magnetogasdinamica e le condizioni ai limiti.

Considerando un plasma come un unico fluido ed applicando ad esso le equazioni globali stabilite nel numero precenente, con le approssimazioni ivi indicate, si hanno quelle che si possono chiamare le equazioni fondamentali della magnetogasdinamica che qui riuniamo:

$$(2.42\text{a}) \qquad p = R_g \rho T$$

$$(2.42\text{b}) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

$$(2.42\text{c}) \qquad \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \operatorname{grad}(\tau - p_t) + \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_e$$

$$(2.42\text{d}) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathcal{E}_m) + \operatorname{div}(\rho \mathcal{E}_m \boldsymbol{v}) = \operatorname{div}(\tau \boldsymbol{v} - p_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{I} + \varepsilon_r \rho$$

$$(2.42\text{e}) \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} + \frac{\partial(\varepsilon \boldsymbol{E})}{\partial t}$$

$$(2.42\text{f}) \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial(\mu \boldsymbol{H})}{\partial t}$$

$$(2.42\text{g}) \qquad \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{I} = 0$$

$$(2.42\text{h}) \qquad \boldsymbol{I} = \sigma(\boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}) + \rho_e \boldsymbol{v},$$

dove è

$$\tau = 2\mu' D\frac{d\boldsymbol{v}}{dP} + \lambda' \operatorname{div}\boldsymbol{v} \tag{2.43}$$

$$\operatorname{grad}\tau = (\lambda' + \mu')\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \mu'\Delta_2\boldsymbol{v} \tag{2.44}$$

$$p_t = p + p_r \quad , \quad p_r = \frac{1}{3}a_r T^4 \tag{2.45}$$

$$\boldsymbol{F}_e = \rho_e\boldsymbol{E} + \mu\boldsymbol{I}\wedge\boldsymbol{H} \tag{2.46}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_c + \boldsymbol{Q}_r = \varkappa \operatorname{grad} T + \frac{c}{3\chi\rho}\operatorname{grad}(a_r T^4) \,. \tag{2.47}$$

Se si ammette che ogni elemento di gas si dilati ugualmente in tutte le direzioni, allora risulta, come si sa, $\lambda' = -\frac{2}{3}\mu'$,

Le equazioni (2.42a) - (2.42h) equivalgono a un sistema di 16 equazioni scalari nelle 16 quantità incognite

$$T,\ p,\ \rho,\ v^i,\ E^i,\ H^i,\ \rho_e,\ I^i\,.$$

È da osservare che dalla (2.42f) segue la condizione

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = \operatorname{div}(\mu\boldsymbol{H}) = 0\,,$$

e se la permeabilità μ del mezzo è costante, come si ritiene ordinariamente, si ha

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0\,. \tag{2.48}$$

Inoltre, prendendo la divergenza di ambo i membri della (2.42e), si deduce, per $\varepsilon =$ costante, l'altra condizione

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho_e\,. \tag{2.49}$$

Alle equazioni (2.42a) - (2.42h) occorre associare ancora le *condizioni ai limiti*, quelle cioè che devono essere verificate ai confini del campo in cui si muove il gas.

Se per esempio il campo è limitato da una parete solida le proprietà elettromagnetiche cambieranno bruscamente attraverso la superficie che limita il fluido dalla parete solida. In tal caso si hanno le seguenti quattro condizioni:

1) La componente normale dell'induzione magnetica è continua, cioè, indicando con 1 e 2 le regioni immediatamente adiacenti a quella superficie si ha

$$(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1)\times\boldsymbol{n} = 0\,, \tag{2.50}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale alla superficie di discontinuità.

2) L'andamento del campo magnetico al detto confine è defi-

nito dalla relazione

$$(H_2 - H_1) \wedge n = I_s \tag{2.51}$$

dove I_s è la densità di corrente superficiale. Se la conduttività elettrica è finita la I_s è nulla: se invece la conduttività elettrica è infinita la I_s può essere non nulla.

3) La componente tangenziale del campo elettrico è continua, cioè

$$(E_2 - E_1) \wedge n = 0 . \tag{2.52}$$

4) Il comportamento dello spostamento dielettrico $D = \varepsilon E$ al confine è espresso dalla relazione

$$(D_2 - D_1) \times n = \rho_{es}, \tag{2.53}$$

dove ρ_{es} è la densità delle cariche elettriche libere in superficie.

Nella maggior parte dei problemi di magnetogasdinamica la densità di corrente superficiale I_s e la densità ρ_{es} delle cariche elettriche superficiali sono trascurabili, per cui le condizioni ai limiti (2.51) e (2.53) diventano più semplicemente

$$(H_2 - H_1) \wedge n = 0 \tag{2.51'}$$

$$(D_2 - D_1) \times n = 0 \tag{2.53'}$$

Le condizioni ai limiti esprimono quindi che le componenti tangenziali di H ed E e le componenti normali di B e D sono continue attraverso la superficie di separazione di un fluido da una parete solida, o di due fluidi differenti.

È da osservare che la distinzione tra H e B, e tra E e D è qui necessaria poichè i valori di ε e μ sono differenti nelle due regioni separate dalla superficie limite.

In molti problemi, interessanti soprattutto l'Astrofisica, il soprascritto sistema di equazioni (2.42a)-(2.42h), può essere semplificato nello stesso modo come si è fatto nel § 1 per le equazioni della magnetofluidodinamica, riducendo lo studio alla considerazione dell'interazione tra le grandezze gasdinamiche v, p, ρ, T e il campo magnetico H.

Invero in magnetogasdinamica la conduttività elettrica è generalmente molto grande e tende ad infinito. Perciò la corrente di spostamento $\frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t}$ è trascurabile in confronto della corrente di conduzione, così pure è trascurabile la corrente di convenzione.

Le equazioni (2.42e), (2.42f), (2.42h), si riducono allora alle seguenti

$$\text{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} \tag{2.54}$$

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{2.55}$$

$$\boldsymbol{I} = \sigma(\boldsymbol{E} + \mu\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H}) \tag{2.56}$$

dalle quali, eliminando il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ e il vettore densità di corrente $\boldsymbol{I}$, supponendo σ e μ costanti. Si deduce per il campo magnetico l' equazione

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \text{rot}\left(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{v}\right) = \eta\Delta_2\boldsymbol{H} \quad ; \quad \left(\eta = \frac{1}{\mu\sigma}\right). \tag{2.57}$$

con

$$\text{div}\,\boldsymbol{H} = 0\,. \tag{2.58}$$

Inoltre l' equazione del moto può essere così scritta

$$\begin{aligned}\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\,\text{grad}\,p_t + \mu\,\text{rot}\,\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{H} +& \\ + \boldsymbol{F}_g + (\lambda' + \mu')\,\text{grad div}\,\boldsymbol{v} + \mu'\Delta_2\boldsymbol{v}&\end{aligned} \tag{2.59}$$

oppure

$$\begin{aligned}\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mu\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} - \text{grad}\left(p_t + \frac{1}{2}\mu H^2\right) +& \\ + \boldsymbol{F}_g + (\lambda' + \mu')\,\text{grad div}\,\boldsymbol{v} + \mu'\Delta_2\boldsymbol{v}\,.&\end{aligned} \tag{2.59'}$$

4. Trasformazione dell' equazione dell' energia.

L' equazione (2.42d) dell' energia può essere opportunamente trasformata nel modo che segue. Osserviamo intanto che, essendo

$$\mathcal{E}_m = U_m + \frac{1}{2}v^2 + \Phi + \frac{E_r}{\rho}$$

l' energia totale per unità di massa, in virtù dell' equazione di continuità risulta

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\rho\mathcal{E}_m)}{\partial t} + \text{div}\,(\rho\,\mathcal{E}_m\boldsymbol{v}) = \\ &= \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho\boldsymbol{v})\right]\mathcal{E}_m + \rho\left(\frac{\partial\mathcal{E}_m}{\partial t} + \text{grad}\,\mathcal{E}_m\times\boldsymbol{v}\right) = \rho\frac{d\mathcal{E}_m}{dt}\,,\end{aligned}$$

e pertanto l' equazione dell' energia si può scrivere

$$\rho\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \text{div}\,(\tau\boldsymbol{v} - p_t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{I} + \varepsilon_r\rho\,. \tag{2.60}$$

Ora, se C_v è il calore specifico del gas a volume costante (misurato in unita meccaniche), l' energia totale interna per unità di massa è data da

$$U_m = C_v T$$

Per l'equazione del moto si ha inoltre

$$\frac{1}{2}\rho \frac{dv^2}{dt} = \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{v} = (-\operatorname{grad} p_t + \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} + \operatorname{grad} \tau + \boldsymbol{F}_g) \times \boldsymbol{v},$$

e risulta

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I} \times \left(\frac{\boldsymbol{I}}{\sigma} - \mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}\right) = \frac{I^2}{\sigma} + \mu \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{v}$$

oppure

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{I} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \times \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}\right).$$

Perciò, sostituendo nella (2.60), semplificando, e osservando che

$$\operatorname{div}(\tau \boldsymbol{v}) - \operatorname{grad} \tau \times \boldsymbol{v} = I_1 \left(\tau \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right)$$

dove $I_1 \left(\tau \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right)$ è l'*invariante primo* dell'omografia $\tau \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}$, si ha

$$\rho \frac{d}{dt}\left(C_v T + \frac{E_r}{\rho}\right) = I_1 \left(\tau \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right) - \tag{2.61}$$
$$- p_t \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{F}_g \times \boldsymbol{v} + \frac{I^2}{\sigma} + \operatorname{div} \boldsymbol{Q} + \varepsilon_r \rho.$$

dove è $E_r = a_r T^4$, mentre il flusso di calore $\boldsymbol{Q}$ è espresso dalla (2.47).

Un'altra forma dell'equazione dell'energia, nel caso dei gas perfetti, possiamo ottenerla osservando che, essendo C_p il calorico specifico del gas a pressione costante, la costante R_g del gas, come si sa dalla termodinamica, è data da $R_g = C_p - C_v$, e quindi l'equazione di stato (2.42a) si può scrivere

$$p = (C_p - C_v) \rho T. \tag{2.62}$$

Ne segue che si ha ancora

$$U_m = C_v T = C_p T - \frac{p}{\rho}$$

da cui, avendo riguardo all'equazione di continuità, si ricava

$$\rho \frac{d(C_v T)}{dt} = \rho \frac{d(C_p T)}{dt} - \frac{dp}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d(C_p T)}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(p \boldsymbol{v})$$

e perciò la (2.60) diventa

$$\rho \frac{d}{dt}\left(C_p T + \frac{1}{2} v^2 + \Phi + \frac{E_r}{\rho}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \tag{2.63}$$
$$+ \operatorname{div}(\tau \boldsymbol{v} - p_r \boldsymbol{v} + \boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{I} + \varepsilon_r \rho,$$

dove $C_p T + \frac{1}{2} v^2$ è l'entalpia del gas.

È opportuno ricordare come nel caso, particolarmente importante per le applicazioni, in cui il gas si espande adiabaticamente, cioè senza scambio di calore con l'esterno, e il lavoro di espansione viene effettuato a spese dell'energia interna, dall'equazione di stato si può eliminare la temperatura T.

Invero se indichiamo con dq la quantità di calore spesa per unità di massa per incrementare di dU_m l'energia interna del gas e compiere il lavoro di espansione $pdv = pd\,\frac{1}{\rho}$, si ha in generale

$$dq = dU_m + pd\,\frac{1}{\rho}\,. \tag{2.64}$$

Nel caso di un'espansione adiabatica è $dq = 0$. Allora, essendo per un gas perfetto $U_m = C_v T$, avendo riguardo all'equazione di stato (2.62), si ricava

$$\frac{dp}{p} - \gamma\frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad , \quad \frac{dT}{T} - (\gamma - 1)\frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad , \quad \left(\gamma = \frac{C_p}{C_v}\right)$$

da cui integrando si ottiene

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \quad , \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} , \tag{2.65}$$

la prima delle quali è l'equazione di stato nel caso dell'espansione adiabatica.

Se si considera l'*entropia* S del gas, che è una variabile di stato definita dalla relazione $dS = \frac{dq}{T}$, si ha che se un gas si espande adiabaticamente l'entropia si mantiene costante. Questo cambiamento di stato di può chiamare perciò *isoentropico*.

5. Analisi dimensionale e considerazione di alcuni parametri fondamentali.

Introducendo alcuni parametri caratteristici le equazioni della m. f. d. si possono porre sotto forma adimensionale, che in molti problemi permette di dedurre utili informazioni circa l'ordine di grandezza dei vari termini involti, e di vedere se certe circostanze fisiche sono o no dominanti.

Per questo sia L una lunghezza caratteristica del campo del moto, V una velocità caratteristica, t_0 un tempo dell'ordine di $\frac{L}{V}$, tale che il parametro

$$R_t = \frac{t_0 V}{L} \tag{2.66}$$

sia dell'ordine dell'unità. Ciò significa che non consideriamo fenomeni di alta frequenza.

Sia inoltre H_0 un valore caratteristico dell' intensità del campo magnetico, mentre il campo elettrico sia caratterizzato da un valore E_0 dello stesso ordine di grandezza del campo elettrico indotto $\mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}$, tale cioè che il parametro adimensionale

$$R_e = \frac{E_0}{\mu_0 H V} \tag{2.67}$$

sia dell' ordine dell' unità, o più piccolo. Questa è una buona approssimazione per fluidi di conduttività elettrica σ molto grande, poichè per $\sigma \to \infty$ dall' equazione della corrente elettrica si ha $\boldsymbol{E} = -\mu\, \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}$.

Dalla stessa equazione si ha che in tal caso l' intensità della corrente $\boldsymbol{I}$ è dell' ordine di $\sigma\mu H_0 V$.

Supporremo poi che la velocità della corrente fluida sia molto più piccola della velocità della luce, cioè

$$R_c = \frac{V^2}{c^2} = V^2 \varepsilon\mu \ll 1\,. \tag{2.68}$$

Nelle ipotesi ammesse risultano trascurabili nelle equazioni fondamentali la corrente di spostamanto $\frac{\partial(\varepsilon \boldsymbol{E})}{\partial t}$ e i termini dipendenti dalle cariche elettriche ρ_e.

In questo caso tutte le grandezze elettromagnetiche possono essere espresse in termini del campo magnetico.

Ciò premesso introduciamo le seguenti quantità adimensionali

$$x^* = \frac{x}{L}\,,\quad t^* = \frac{t}{t_0}\,,\quad \boldsymbol{v}^* = \frac{\boldsymbol{v}}{V}\,,\quad \boldsymbol{E}^* = \frac{\boldsymbol{E}}{E_0}\,,\quad \boldsymbol{H}^* = \frac{\boldsymbol{H}}{H_0}$$

$$\boldsymbol{I}^* = \frac{\boldsymbol{I}}{\sigma\mu H_0 V}$$

e gli operatori adinensionali

$$\text{grad}^* = L\,\text{grad}\quad,\quad \text{rot}^* = L\,\text{rot}\quad,\quad \text{div}^* = L\,\text{div}$$

Allora l' equazione di Maxwell (2.42e) diventa

$$\frac{1}{R_m}\,\text{rot}^*\, \boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{I}^* + \frac{R_c\, R_e}{R_t\, R_m}\, \frac{\partial \boldsymbol{E}^*}{\partial t^*}\,, \tag{2.69}$$

dove

$$R_m = \sigma\mu\, VL = \frac{VL}{\eta} \tag{2.70}$$

è il *numero di Reynolds magnetico*.

Nell' equazione (2.69) tutte le quantità sono adimensionali, e poichè R_e ed R_t sono dell' ordine dell' unità, mentre $R_c \ll 1$, si riconosce subito che il termine dovuto alla corrente di spostamento è molto piccolo in confronto degli altri, e perciò trascurabile. L' equazione (2.42e) si riduce perciò alla (2.54).

Analogamente l' equazione (2.42h) della corrente elettrica, dove $\rho_e = \mathrm{div}\,(\varepsilon \boldsymbol{E})$, nelle variabili adimensionali, diventa

$$\boldsymbol{I}^* = (R_e \boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{v}^* \wedge \boldsymbol{H}^*) + \frac{R_c\, R_e}{R_m}\, \mathrm{div}^* \boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{v}^* .$$

Questa equazione mostra che, essendo $\frac{R_c}{R_m} \ll 1$, la corrente di convezione è trascurabile in confronto della corrente di conduzione, e ci si riduce pertanto all' equazione (2.56).

Introducendo ora nell' equazione (2.57) del campo magnetico, grandezze adimensionali, essa diventa

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial t^*} = R_t \,\mathrm{rot}^* (\boldsymbol{v}^* \wedge \boldsymbol{H}^*) + \frac{R_t}{R_m} \Delta_2^* \boldsymbol{H}^* , \tag{2.71}$$

dove R_t è dell' ordine dell' unità.

Ora il numero di Reynolds magnetico $R_m = \frac{VL}{\eta}$, può essere considerato come il rapporto tra la dimensione L del campo del moto e la lunghezza caratteristica L_e definita da

$$L_e = \frac{1}{\sigma \mu V} = \frac{\eta}{V}$$

oppure il rapporto tra la grandezza media V della velocità del fluido e la velocità caratteristica V_e espressa dalla

$$V_e = \frac{1}{\sigma \mu L} = \frac{\eta}{L}$$

La lunghezza caratteristica L_e può essere considerata come la lunghezza di cui si spostano le linee di forza magnetica in direzione trasversale alla direzione del moto. Perciò se $L \gg L_e$, e quindi $R_m \gg 1$, il campo magnetico si muoverà con la corrente, sarà cioè *congelato* col fluido, e sarà molto influenzato dal suo movimento.

Se al contrario $L \ll L_e$, cioè $R_m \ll 1$, il campo magnetico non sarà molto influenzato dal molto del fluido. La velocità caratteristica V_e può essere considerata come quella con cui si muove il campo magnetico trasversalmente alla direzione del moto del fluido. Allora se $V \gg V_e$, cioè $R_m \gg 1$, il campo sarà praticamente forzato a seguire il fluido nel suo moto e sarà fortemente influenzato da questo moto. In questo caso il secondo termine del secondo membro della (2.71) è trascurabile in confronto del primo, e l' equazione (2.57) diventa

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}). \tag{2.72}$$

Se invece è $V \ll V_\rho$, cioè $R_m \ll 1$. nell' equazione (2.71) sarà trascurabile il primo termine del secondo membro in confronto del secondo, e la (2.57) si ridurrà alla

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \eta\, \Delta_2 \boldsymbol{H} . \tag{2.73}$$

In questo caso il movimento del fluido non ha più influenza sensibile sul campo magnetico. Ciò equivale a trascurare il campo magnetico indotto.

Poichè la (2.73) si identifica con l'equazione della diffusione del campo magnetico in un conduttore, diffusione che dà luogo ad un decadimento del campo, dall'analisi dimensionale risulta che il tempo di decadimento è dell' ordine di $\dfrac{L^2}{\eta} = \sigma\mu L^2$.

Consideriamo ora l'equazione del moto (2.59'), che, supponendo trascurabili le forze di natura non elettromagnetica, possiamo scrivere nella forma

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mu \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} - \operatorname{grad}\left(p_t + \frac{1}{2}\mu \boldsymbol{H}^2\right) + \rho\, \nu\, \tau \tag{2.75}$$

dove è

$$\tau = \frac{\lambda' + \mu'}{\mu'} \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{v} + \Delta_2 \boldsymbol{v}$$

e $\nu = \dfrac{\mu'}{\rho}$ è il coefficiente di viscosità cinematica.

Ponendo ancora

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0} \quad , \quad p_t^* = \frac{p_t}{\rho_0 V^2} \quad , \quad \nu^* = \frac{\nu}{\nu_0} \quad , \quad \tau^* = \frac{L^2 \tau}{V} \quad ,$$

dove ρ_0 e ν_0 sono valori caratteristici di ρ e ν, si ha la forma adimensionale

$$\rho^* \frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt^*} = P_m R_t \frac{d\boldsymbol{H}^*}{dP^*} \boldsymbol{H}^* - R_t \operatorname{grad}^* \cdot \left(p_t^* + \frac{1}{2} P_m H^{*2}\right) + \frac{R_t}{R} \rho^* \nu^* \tau^* , \tag{2.75'}$$

nella quale è

$$P_m = \frac{\mu \boldsymbol{H}_0^2}{\rho_0 V^2} = \frac{V_a^2}{V^2} \tag{2.76}$$

il *numero di pressione magnetica*, ed $R = \dfrac{VL}{\nu_0}$ l' ordinario nunero di Reynolds della fluidodinamica.

Il numero di pressione magnetica P_m risulta uguale al rapporto tra la pressione magnetica $\dfrac{1}{2}\mu H_0^2$ e la pressione dinamica $\dfrac{1}{2}\rho_0 V^2$.

Se P_m è dell' ordine dell' unità, o più piccolo, il moto del fluido sarà poco influenzato dal campo magnetico. Esso risulta anche uguale al rapporto $\frac{V_a^2}{V^2}$, tra il quadrato della velocità caratteristica $V_a = H_0 \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$, e il quadrato della velocità media V del fluido.

La velocità V_a è quella comunemente detta delle onde di ALFVÈN, poichè fu ALFVÈN il primo che mostrò che in un fluido incompressibile e non viscoso, di densità ρ_0 e di alta conduttività elettrica $(\sigma = \infty)$ soggetto a un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{H}_0$, le perturbazioni si propagano come un' onda, con velocità V_a, nella direzione di $\boldsymbol{H}_0$.

In un fluido compressibile le onde magnetofluidodinamiche sono molto più complicate delle onde semplici di ALFVÈN, ma esse hanno stretta relazione con queste onde, poichè la velocità caratteristica V_a è la medesima.

Il numero di REYNOLDS ordinario $R = \frac{VL}{\nu_0}$ dà una misura del rapporto tra le forze d' inerzia e le forze viscose. Se per un dato fluido il numero R è piccolo le forze viscose sono predominanti e l' effetto della viscosità è importante in tutto il campo del moto. Invero il coefficiente del termine d' inerzia nell' equazione adimensionale del moto è $\frac{\rho_0 V}{t_0} = \frac{\rho_0 V^2}{L}$, mentre quello del termine dovuto alle forze viscose è $\rho_0 \nu_0 \frac{V^2}{L^2}$, e il rapporto di questi coefficienti risulta $R = \frac{VL}{\nu_0}$.

Se invece il numero R di REYNOLDS è grande risultano predominanti le forze d' inerzia e l' effetto di viscosità si fa sentire in una stretta regione, o in uno *strato limite*, in prossimità di confini solidi. o in ogni altra regione in cui si verificano grandi variazioni di velocità, come nell' interno di un' *onda d' urto*.

6. Forma adimensionale dell' equazione di stato e dell' equazione dell' energia.

Ponendoci ora più specificatamente dal punto di vista della magnetogasdinamica, e considerando l' equazione di stato e l' equazione della energia, saremo condotti a introdurre due altri importanti parametri, Per questo poniamo ancora

$$(2.77)\qquad \begin{array}{lll} C^*_p = \dfrac{C_p}{C_{p0}} \;, & \gamma = \dfrac{C_{p0}}{C_{v0}} \;, & \varkappa^* = \dfrac{\varkappa}{\varkappa_0} \\ \mu'^* = \dfrac{\mu'}{\mu'_0} \;, & \tau^* = \dfrac{L\tau}{\mu_0' V} \;, & T^* = \dfrac{T}{T_0} \end{array}$$

dove C_{p0} , C_{v0} , $\varkappa_0$. μ'_0 , T_0 , sono rispettivamente dei valori di riferimento di C_p , C_v , $\varkappa$, μ' , T .

L'equazione di stato si può scrivere allora

$$(2.78)\qquad \gamma M^2_0 p^* = \rho^* T^* ,$$

dove

$$(2.79)\qquad M_0 = \frac{V}{\sqrt{\gamma R_g T_0}}$$

è il *numero di Mach.*

Analogamente l'equazione dell'energia, presa sotto la forma (2.63), in cui supponiamo trascurabili le forze non elettromagnetiche, come pure i termini radiattivi, in forma adimensionale risutta

$$(2.80)\qquad \begin{aligned} \rho^* \frac{d}{dt^*}\left[C^*_p T^* + \frac{1}{2}(\gamma-1) M^2_0 v^{*2}\right] &= (\gamma-1) M^2_0 \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \\ + \frac{R_t}{R}(\gamma-1) M^2_0 \operatorname{div}^*(\tau^* v^*) &+ \frac{R_t}{P_r R} \operatorname{div}^*(\varkappa^* \operatorname{grad}^* T^*) + \\ + P_m R_t(\gamma-1) M^2_0 \operatorname{rot}^* H^* &\times \left(\frac{1}{R_m} \operatorname{rot}^* H^* - v^* \wedge H^*\right. \end{aligned}$$

dove

$$(2.81)\qquad P_r = \frac{C_{p0}\mu'_0}{\varkappa_0}$$

è il ***numero di Prandtl***, e gli altri simboli hanno il significato già detto.

Il numero M_0 di MACH dà una misura della compressibilità del gas dovuta alla sua velocità ed è definito come ii rapporto tra la velocità caratteristica V della corrente e la velocità V_s del suono nel mezzo che si considera. Invero la velocità del suono in un gas in condizioni adiabatiche è data da

$$V^2_s = \frac{\partial p}{\partial \rho} \doteq \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma R_g T \ .$$

Si può dimostrare facilmente che il rapporto tra la variazione di densità del fluido e la variazione di velocità è, in prima approssimazione, proporzionale al quadrato del numero di MACH della corrente. Allora, per numeri di MACH molto piccoli la variazione di densità, e quindi l'offetto di compressioue, dovuto alla variazione di velocità, è trascurabile e il fluido può essere considerato come incompressibile. Per grandi numeri di MACH occorre invece considerare l'effetto della compressibilità.

Il numero P_r di PRANDTL dà una misura dell'importanza relativa della viscosità e del calore di conduzione.

Scrivendolo nella forma

$$P_r = \nu_0 \Big/ \frac{\varkappa_0}{\rho_0 C_{p_0}} \quad , \quad \left(\nu_0 = \frac{\mu'}{\rho_0}\right),$$

esso risulta uguale al rapporto tra la viscosità cinematica ν_0 e la difiusità termica $\dfrac{\varkappa_0}{C_{p_0}\rho_0}$ dovuta al calore di conduzione.

Se l'effetto della viscosità si manifesta soltanto in una stretta regione e in questa regione ν_0 è molto piccolo, essa vien chiamata *strato limite*. Analogamente se la diffusività termica si manifesta soltanto in una stretta regione e in essa è $\dfrac{\varkappa_0}{C_{p_0}\rho_0}$ molto piccolo, si ha uno strato limite termico.

7. Ulteriori semplificazioni delle equazioni della magnetogasdinamica.

Le equazioni fondamentali della magnetogasdinamica possono essere ulteriormente semplicate quando alcuni dei parametri adimensionali che in esse intervengono sono di un ordine di grandezza molto piccolo in confronto dell'unità. I casi più importanti sono i seguenti.

a) Il numero di REYNOLDS magnetico R_m è molto piccolo e gli effetti radiativi sono trascurabili; allora, supponendo che le forze non elettromagnetiche siano nulle, le equazioni si riducono alle seguenti

$$(2.82)\quad \begin{aligned} & p = R_g \rho T \\ & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ & \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mu \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} - \operatorname{grad}\left(p + \frac{1}{2}\mu H^2\right) + \\ & \qquad + (\lambda' + \mu') \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu' \Delta_2 \boldsymbol{v} \\ & \rho \frac{d}{dt}\left(C_p T + \frac{1}{2} v^2\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\tau \boldsymbol{v} + \varkappa \operatorname{grad} T) + \\ & \qquad + \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \times \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}\right), \end{aligned}$$

dove l'omografia τ degli sforzi di viscosità è definita dalla (2.43).

In questo caso il campo magnetico $\boldsymbol{H}$ si può ritenere assegnato ed uguale a quello esterno, e le incognite da considerare sono $\boldsymbol{v}$, p, ρ, T.

b) Il numero di pressione magnetica P_m è molto piccolo. In questo caso le equazioni della gasdinamica sono praticamente indipendenti dal campo magnetico e il moto del fluido può essere determinato colle equazioni pure della gasdinamica:

$$
(2,83) \qquad
\begin{aligned}
& p = R_g \rho T \\
& \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\
& \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = - \operatorname{drad} p + (\lambda' + \mu') \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu' \Delta_2 \boldsymbol{v} \\
& \rho \frac{d}{dt}\left(C_p T + \frac{1}{2} v^2\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\tau \boldsymbol{v} + \varkappa \operatorname{grad} T)
\end{aligned}
$$

le quali definiscono le incognite $\boldsymbol{v}$, ρ, p, T. Determinate queste quantità, l'equazione (2.57) con la condizione (2.58), forniranno il campo magnetico.

In questo caso dunque, mentre il moto del fluido non è sensibilmente influenzato dal campo magnetico, questo, per effetto del moto risente delle variazioni che possono essere studiate mediante l'equazione (2.57).

c) Caso di un numero di Mach molto piccolo, in cui il fluido può essere considerato come incompressibile. In tal caso l'equazione di stato può essere sostituita dalla $\rho = \rho_0$ (costante). Le incognite sono allora $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{v}$, p, T, e le equazioni si possono dividere in due gruppi.

Le equazioni del primo gruppo contengono le incognite $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{v}$, e p, e sono

$$
(2.84) \qquad
\begin{aligned}
& \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \\
& \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mu \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} - \operatorname{grad}\left(p + \frac{1}{2} \mu H^2\right) + \mu' \Delta_2 \boldsymbol{v} \\
& \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = \eta \Delta_2 \boldsymbol{H} \\
& \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,
\end{aligned}
$$

dove μ ed η sono supposti costanti. Le (2.84) sono anche le equazioni della magnetoidrodinamica.

Dall'equazione dell'energia, se $M_0 \to 0$, mentre $M_0^2 P_m$ ed

$\frac{M_0^2 P_m}{R_m}$ non sono trascurabili, deduciamo, per la determinazione della temperatura T, l'equazione

$$\rho \frac{d}{dt}(C_p T) = \operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T) + \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \times \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}\right), \tag{2.84'}$$

dove si è supposto che il calore di JOULE e il lavoro dovuto alle forze magnetiche siano dello stesso ordine di grandezza dell'energia termica.

Se poi amche $M_0^2 P_m$ ed $\frac{M_0^2 P_m}{R_m}$ sono tsascurabili, l'equazione dell'energia diventa

$$\rho \frac{d(C_p T)}{dt} = \operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T), \tag{2.84''}$$

che è l'equazione termica dell'ordinaria gasdinamica a numero di mach molto basso.

d) Caso di un gas perfetto ideale la cui viscosità è nulla e la conduttività elettrica è infinita. In questo caso è $R = \infty$ ed $R_m = \infty$; l'equazione dell'energia si riduce alla

$$\rho \frac{d}{dt}\left(C_p T + \frac{1}{2} v^2\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{v} \tag{2.85}$$

e l'equazione del moto e quella del campo magnetico diventano

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} - \operatorname{grad} p \tag{2.86}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = 0 \tag{2.87}$$

e) Caso di un gas radiativo. A temperature molto alte, come quelle che si riscontrano nei gas stellari, i termini radiativi nelle equazioni fondamentali possono non essere più trascurabili e allora le equázioni da considerare sono le seguenti

$$\begin{aligned} & p = R_0 \rho T \\ & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ & \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad}(p + p_r) + \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} + \\ & \qquad + (\lambda' + \mu') \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu' \Delta_2 \boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = -\eta\, \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H}$$

$$(2.88) \qquad \rho \frac{d}{dt}\left(C_v T + \frac{E_r}{\rho}\right) = I_1\left(\tau \frac{dv}{dP}\right) - (p + p_r)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + \frac{I^2}{\sigma} +$$

$$+ \mathrm{div}\left(\varkappa\, \mathrm{grad}\, T + \frac{c}{\varkappa \rho}\, \mathrm{grad}\, p_r\right) + \varepsilon_r \rho$$

dove E_r, p_r e τ hanno i valori già noti.

Naturalmente si possono applicare anche qui le semplificazioni considerate nei casi precedenti.

È da osservare che nel caso in cui la forza di massa non elettromagnetica non è trascurabile, occorre tenerne conto nell' equazione del moto e nell' equazione dell' energia. Il caso più importante è quello in cui il fluido è soggetto alla propria gravitazione. In tal caso, se U è il potenziale delle forze di mutua attrazione newtoniana, occorre aggiungere nel secondo membro dell' equazione del moto il termine $\boldsymbol{F}_g = \rho\, \mathrm{grad}\, U$.

Inoltre nell' equazione dell' energia, l' energia totale riferita all' unità di massa sarà $C_v T + \frac{1}{\rho} E_r + \Phi = C_v T + \frac{1}{\rho} E_r - U$.

Va rilevato inoltre che nei punti interni alla massa fluida il potenziale U dovrà verificare l' equazione di Poisson

$$(2.89) \qquad \Delta_2 U = -4\pi f \rho\,,$$

dove f è la costante di attrazione universale.

§ 3. Magnetoidrostatica e moti stazionari in Magnetofuidodinamica.

1. Magnetoidrostatica.

La magnetoidrostatica è limitata alla considerazione dello stato di equilibrio di un fluido elettricamente conduttore immerso in un campo magnetico. In generale l' azione del campo magnetico sulle correnti elettriche che scorrono nel fluido, fa nascere delle forze meccaniche non equilibrate che determinano un movimento del fluido stesso. Tuttavia, in certi casi, le azioni magnetiche o svaniscono o sono equilibrate dalla pressione del fluido, cosichè il fluido rimane in equilibrio.

Se un fluido conduttore è in equilibrio sotto l' azione di un campo magnatico $\boldsymbol{H}$, e soggetto a forze gravitazionali derivanti da un potenziale U, essendo $\boldsymbol{v} = 0$, le equazioni da considerare sono

$$(3.1) \qquad \mathrm{grad}\, p = \mu\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} + \rho\, \mathrm{grad}\, U$$

$$(3.2) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma} \Delta_2 \boldsymbol{H}$$

$$(3.3) \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 ,$$

Nell' equazione (3.1) di equilibrio il termine $\mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H}$ rappresenta la forza elettromagnetica di LORENTZ. Una prima classe di problemi magnetoidrostatici si ha allora quando la forza di LORENTZ si annulla, cioè

$$(3.4) \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} = 0 .$$

In questo caso il campo magnetico non esercita alcuna azione sul fluido e l' equilibrio idrostatico è lo stesso di quello che si ha in assenza di campo magnetico.

Il campo magnetico in questo caso è chiamato *campo di forze libero* (force-free field), ed esso decade in accordo con l'equazione (3.2).

Un altro caso di configurazione di equilibrio si ha quando la pressione idrostatica bilancia sia l'azione elettromagnetica di LORENTZ che le forze gravitazionali. Se si tratta di un fluido incompressibile (ρ = cost), scrivendo la (3.1) sotto forma

$$(3.5) \qquad \operatorname{grad} \left(p - \rho U + \frac{1}{2} \mu H^2\right) = \mu \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} .$$

si ha che le linee di forza magnetica si comportano come linee elastiche soggette a tensioni longitudinali di grandezza $\frac{1}{2} \mu H^2$ e a una pressione laterale totale $p - \rho U + \frac{1}{2} \mu H^2$,

Prendendo il rotore di ambo i membri pella (3.1) si ha che in generale, per l' equilibrio il campo magnetico deve soddisfare all' equazione

$$(3.6) \qquad \mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H}) + \operatorname{grad} \rho \wedge \operatorname{grad} U = 0 .$$

e se si tratta di un liquido si deve avere

$$(3.7) \qquad \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H}) = 0 .$$

Inoltre, se il campo che si considera è limitato da una superficie che lo separa da un altro fluido, attraverso questa superficie limite la somma $p + \frac{1}{2} \mu H^2$ della pressione idrostatica e della pressione magnetica deve essere continua: così pure deve essere continua la componente normale B_n dell' induzione $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$.

2. Moti stazionari - Moti rotatori assiali

Particolarmente importanti in Astrofisica è la considerazione di masse fluide altamente conduttrici dell'elettricità, in moto permanente, tali cioè che gli elementi del campo e del moto sono, in un dato posto, invariabili col tempo, ma variano da luogo a luogo.

Fra i moti permanenti hanno importanza preminente, specialmente nella fisica stellare, i moti rotatori assiali. In generale questa rotazione non è uniforme, ma, come dimostrano le osservazioni effettuate per il Sole, la velocità angolare di rotazione varia sia colla latitudine, sia colla distanza dall'asse.

Ora, se la velocità angolare di rotazione ω è indipendente dall'angolo di rotazione φ, ma dipende solo dalle coordinate cilindriche r, z, cioè $\omega = \omega(r, z)$, essendo r la distanza di un punto dall'asse e z la coordinata assiale, allora la distribuzione del campo magnetico, della densità e della pressione è necessariamente a simmetria assiale.

Infatti, nel caso considerato, essendo $\boldsymbol{v}$ la velocità di una particella fluida, si ha

$$\boldsymbol{v} = r^2\omega \operatorname{grad} \varphi \tag{3.8}$$

e risulta div $\boldsymbol{v} = 0$.

L'equazione di continuità, che nel caso dei moti stazionari si riduce alla div $(\rho\boldsymbol{v}) = 0$, porge allora

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = 0, \tag{3.9}$$

cioè la densità ρ è indipendente dall'anomalia φ. Dall'equazione di stato $f(\rho, p) = 0$, si ha che anche la distribuzione della pressione p è a simmetria assiale.

L'equazione del campo magnetico risulta ora

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}) = 0, \tag{3.10}$$

e questa mostra che esiste una funzione Φ tale che

$$\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H} = \operatorname{grad} \Phi \tag{3.11}$$

con Φ necessariamente indipendente dall'anomalia φ.

Dalla (3.11) si ricava

$$r\omega H_z = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad r\omega H_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{3.12}$$

da cui segue che la componente radiale H_r e quella assiale H_z del camdo magnetico saranno indipendenti dall'anomalia φ.

Dalla (3.11) si ha inoltre

$$\operatorname{grad}\Phi \times \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{grad}\Phi \times \boldsymbol{v} = 0,$$

e quindi le linee di forza magnetica appartengono alle superficie $\Phi = \text{cost}$ e queste sono anche superficie fluide.

Eliminando la funzione Φ fra le equazioni (3.12) si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\omega H_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\omega H_z) = 0. \tag{3.13}$$

D'altra parte l'equazione di condizione $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$, porge

$$\frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rH_z) + \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \tag{3.14}$$

e da queste due ultime equazioni si deduce

$$rH_r\frac{\partial \omega}{\partial r} + rH_z\frac{\partial \omega}{\partial z} - \omega\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \tag{3.15}$$

Ma ω, H_r, H_z sono indipendenti da φ, perciò anche la componente H_φ, che dovrà essere una funzione uniforme, sarà indipendente da φ.

Le equazioni (3.14) e (3.15) si riducono allora alle seguenti

$$\frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rH_z) = 0 \tag{3.16}$$

$$rH_r\frac{\partial \omega}{\partial r} + rH_z\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0. \tag{3.17}$$

Dalla (3.16) si ha che dovrà esistere una funzione $V(r, z)$ che si può chiamare *funzione del campo,* tale che

$$H_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \tag{3.18}$$

e pertanto la (3.17) diventa

$$\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$$

la quale mostra che la velocità angolare ω è una funzione di V,

$$\omega = \omega(V). \tag{3.19}$$

Dalla (3.18) si ha che il campo magnetico meridiano, o *poloidale*, $\boldsymbol{H}_m$, è dato da

$$\boldsymbol{H}_m = \operatorname{grad} V \wedge \operatorname{grad}\varphi, \tag{3.20}$$

e quindi in un piano meridiano il vettore $\boldsymbol{H}_m$, che rappresenta il campo magnetico meridiano, è tangente in ogni punto alla linea

$V =$ costante passante per quel punto, cioè queste linee sono le linee di forza del campo magnetico meridiano.

Inoltre dalla (3.19) si ha che la velocità angolare ω è costante su ogni superficie $V =$ cost, generata dalla rotazione intorno all'asse di una linea di forza del campo magnetico meridiano. Questo teorema, che porta il nome di *legge di isorotazione* fu messo in evidenza per primo da FERRARO (¹) nel 1937 e poi ritrovato da ALFVÈN come conseguenza del suo teorema sul « congelamento » delle linee di forza magnetica in un fluido di alta conduttività elettrica. Esso fu dedotto ammettendo a priori la simmetria del campo magnetico intorno all'asse di rotazione e supponendo nulla la componente trasversale, e *toroidale* di esso. L'autore ha completato questi risultati dimostrando, come si è visto, che, nell'ipotesi di un movimento rotatorio stazionario, indipendente dall'anomalia φ, il campo magnetico è necessariamente a simmetria assiale, anche ammettendo l'esistenza della componente toroidale H_φ. È altresì a simmetria assiale la distribuzione della densità e della pressione (²). In particolare le proprietà di simmetria sussistono anche nel caso della rotazione uniforme (³).

È da rilevare che la legge di isorotazione, nella forma più completa qui formulata, è solamente una conseguenza della alta conduttività del fluido ed è indipendente dall'equazione del movimento.

Ma se teniamo conto di questa equazione, che nel caso considerato si riduce alla

$$\text{(3.21)} \qquad \operatorname{grad} p = \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} + \frac{1}{2}\omega^2\rho \operatorname{grad} r^2 + \rho \operatorname{grad} U,$$

dove U è il potenziale delle forze di mutua attrazione newtoniana, possiamo dedurre un'altra conseguenza importante e cioè che il momento rH_φ del campo magnetico, rispetto all'asse, è anche una funzione di V.

(¹) V. C. A. FERRARO. *Non-uniform Rotation of the Sun and its Magnetic Fields*, « M.N.A.R.S. », 97,458 (1937). Cfr. anche [12], Cap. I, § 1:6.

(²) Cfr. C. AGOSTINELLI, *Sull'equilibrio adiabatico magnetodinamico di una massa fluida gassosa gravitante in rotazione non uniforme*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », Serie VIII, vol. XXVII, fasc. 3, marzo 1960.

(³) Cfr. AGOSTINELLI, *Sull'equilibrio relativo magnetoidrodinamico di masse fluide elettricamente conduttrici uniformemente rotanti e gravitanti.* Boll. U.M.I., vol. 14, pp. 95-101. 1959.

Cfr. AGOSTINELLI, *Sulle equazioni dell'equilibrio adiabatico magnetodinamico di una massa fluida gassosa uniformemente rotante e gravitante.* «Rend. Acc. Naz. Lincei», Serie VIII, vol. XXVIII, 1959.

Infatti, essendo per le (3.18)

$$H = \operatorname{grad} V \wedge \operatorname{grad} \varphi + rH_\varphi \cdot \operatorname{grad} \varphi, \tag{3.22}$$

si ricava

$$\operatorname{rot} H = - \nabla_2 V \cdot \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} (rH_\varphi) \wedge \operatorname{grad} \varphi, \tag{3.23}$$

dove per semplicità si è posto

$$\nabla_2 V = r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{3.24}$$

Si ricava inoltre

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H \wedge H = & - \frac{\nabla_2 V}{r^2} \operatorname{grad} V - \frac{1}{2r^2} \operatorname{grad} (rH_\varphi)^2 - \\ & - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial r}\right] \cdot \operatorname{grad} \varphi. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Ora, poichè la pressione p, la densità ρ, e quindi anche il potenziale U delle forze di mutua attrazione newtoniana delle particelle fluide, sono indipendenti dall'anomalia φ. prendendo di ambo i membri della (3.21) la componente trasversale (nel senso in cui varia φ), si ha

$$(\operatorname{rot} H \wedge H)_\varphi = 0,$$

cioè, avendo riguardo alla (3.25) si deduce

$$\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

e quindi, giusto quanto si è affermato, si ha

$$rH_\varphi = F(V). \tag{3.26}$$

Questa mostra che su una superficie di rotazione $V = \text{cost}$, la componente toroidale H_φ del campo magnetico varia in ragione inversamente proporzionale alla distanza dall'asse di rotazione.

La (3.25) porge inoltre

$$\operatorname{rot} H \wedge H = - \frac{1}{r^2}\left(\nabla_2 V + \frac{1}{2}\frac{dF^2}{dV}\right) \operatorname{grad} V. \tag{3.27}$$

Supponendo ora che la pressione p sia funzione della sola densità ρ, ponendo

$$\mathcal{P}(\rho) = \int \frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho},$$

dall'equazione (3.21) del moto si deduce

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\left[\mathcal{P}(\rho) - U - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right] = & - \\ = - & \left[\frac{\mu}{r^2 \rho}\left(\nabla_2 V + \frac{1}{2}\frac{dF^2}{dV}\right) + \frac{1}{2} r^2 \frac{d\omega^2}{dV}\right] \operatorname{grad} V. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Questa equazione è integrabile se la quantità fra parentesi quadre è una funzione di V, che indichiamo con $\frac{dG}{dV}$, cioè

$$\frac{\mu}{r^2\rho}\left(\triangle_2 V + \frac{1}{2}\frac{dF^2}{dV}\right) + \frac{1}{2} r^2 \frac{d\omega^2}{dV} = \frac{dG}{dV}. \tag{3.29}$$

In questo caso dalla (3.28) si ottiene l'integrale

$$\mathcal{F}(\rho) - U - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + G(V) = \text{cost.} \tag{3.30}$$

Da questa equazione si può eliminare il potenziale U delle forze gravitazionali, applicando ad ambo i membri il Δ_2 di LAPLACE e ricordando l'equazione di POISSON. Si ha così

$$\Delta_2\left[\mathcal{F}(\rho) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + G(V)\right] + 4\pi f\rho = 0. \tag{3.31}$$

Assegnando allora le funzioni $F(V)$, $G(V)$ ed $\omega(V)$, le equazioni (3.29) e (3.31) costituiscono un sistema di due equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine in cui sono incognite la funzione V del campo magnetico e la densità ρ.

Nel caso particolarmente importante in cui il fluido è in condizioni adiabatiche, e quindi $\mathcal{F}(\rho) = \frac{C\gamma}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1}$, con C costante, ed inoltre le funzioni ω, F, G si suppongono lineari in V, cioè della forma

$$\omega = \omega_0 + \alpha_0 V; \quad F = kV; \quad G = h_0 V, \tag{3.32}$$

dove ω_0, α_0, k e h_0 sono delle costanti, l'integrale (3.30) e le equazioni (3.29) e (3.31) diventano

$$U + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - h_0 V - \frac{C\gamma}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1} = \text{cost.} \tag{3.33}$$

$$\frac{\mu}{r^2\rho}(\nabla_2 V + k^2 V) + \alpha_0 r^2(\omega_0 + \alpha_0 V) = h_0 \tag{3.34}$$

$$\Delta_2\left[\frac{C\gamma}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1} - \frac{1}{2} r^2(\omega_0 + \alpha_0 V)^2 + h_0 V\right] + 4\pi f\rho = 0. \tag{3.35}$$

Se più in particolare ancora il moto di rotazione è uniforme, cioè ω è costante ($\alpha_0 = 0$), e inoltre si suppone nullo il campo magnetico trasversale ($k = 0$), le (3.34) e (3.35) si riducono alle seguenti

$$\nabla_2 V = \frac{h_0}{\mu} r^2\rho \tag{3.36}$$

$$\Delta_2\left(\frac{C\gamma}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1} + h_0 V\right) + 4\pi f\rho = 2\omega_0^2. \tag{3.37}$$

In questo caso, servendosi dell'identità

$$\Delta_2(\Delta_2 V - \nabla_2 V) - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\nabla_2 V) = 0,$$

ci si riduce all'equazione differenziale alle derivate parziali del 4° ordine

$$\Delta_2[\Delta_2 \rho^{\gamma-1} + (\alpha^2 + \beta^2 r^2)\rho] + \frac{2\beta^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho) = 0, \tag{3.38}$$

in cui è incognita la sola densità ρ e nella quale si è posto

$$\alpha^2 = \frac{4\pi f(\gamma - 1)}{C\gamma}, \quad \beta^2 = \frac{h_0^2(\gamma - 1)}{C\gamma\mu}. \tag{3.39}$$

Determinata la densità ρ, con la condizione che essa si annulli sulla superficie limite, se si tratta di una massa gassosa libera, mediante la (3.36) si otterà la funzione V, e quindi le componenti del campo magnetico.

§ 4. Moti vorticosi in Magnetofluidodinamica.

1. Due relazioni notevoli per il campo magnetico.

La teoria classica di Helmholtz sui moti vorticosi è basata, come si sa, sulla considerazione di un fluido perfetto in cui la densità è funzione della sola pressione, in particolare di un fluido incompressibile, soggetto a forze di massa conservative. In tal caso l'accelerazione delle particelle fluide deriva da un potenziale e nell'ipotesi ancora che tutti gli elementi del moto siano funzioni uniformi delle coordinate del punto, si ha che la circolazione lungo una linea fluida chiusa è costante nel tempo e le linee vorticose si muovono col fluido.

Considerando ora un fluido elettricamente conduttore, soggetto o no a campi magnetici esterni, in cui si manifestano delle correnti elettriche, e quindi dei campi elettrici che interagiscono col moto del fluido, vogliamo stabilire intanto, per il campo magnetico, due relazioni notevoli, ed estendere quindi ai moti magnetofluidodinamici vorticosi le equazioni di Cauchy e di Helmholtz dell'idrodinamica classica.

Ci riferiremo per questo a un fluido perfetto di grande conduttività elettrica e supporremo che le forze di massa non elettromagnetiche derivino da un potenziale U. Le equazioni da considerare sono allora

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = 0, \tag{4.1}$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \tag{4.1'}$$

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} - \operatorname{grad} p + \rho \operatorname{grad} U \tag{4.2}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{4.3}$$

$$p = p(\rho). \tag{4.4}$$

Osserviamo che tenendo conto della (4.1'), l'equazione (4.1) si può scrivere

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \left(\operatorname{div} \boldsymbol{v} - \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right) \boldsymbol{H} + \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{v} = 0,$$

cioè, avendo riguardo all'equazione di continuità, si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{H}}{\rho} - \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \frac{\boldsymbol{H}}{\rho} = 0. \tag{4.5}$$

Questa equazione è, per il campo magnetico, l'analoga di quella che sintetizza le equazioni di HELMHOLTZ sui vortici nella fluidodinamica classica, e mostra ancora l'analogia tra il campo magnetico e la vorticità.

Se ora consideriamo il moto dal punto di vista lagrangiano, chiamiamo $P_0(a, b, c)$ la posizione iniziale della particella fluida che all'istante t occupa la posizione $P(x, y, z)$, con P funzione di P_0 e di t, introducendo l'omografia vettoriale

$$\alpha = \frac{dP}{dP_0} \tag{4.6}$$

si ottiene

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dP} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dP_0} \frac{dP_0}{dP} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{dP_0}\right) \frac{dP_0}{dP} = \frac{d\alpha}{dt} \alpha^{-1}.$$

Applicando allora a sinistra di ambo i membri della (4.5) l'operatore α^{-1} e osservando che

$$\alpha^{-1} \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} = \alpha^{-1} \frac{d\alpha}{dt} \alpha^{-1} = - \frac{d\alpha^{-1}}{dt}$$

si deduce

$$\alpha^{-1} \frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{H}}{\rho} + \frac{d\alpha^{-1}}{dt} \frac{\boldsymbol{H}}{\rho} = \frac{d}{dt}\left(\alpha^{-1} \frac{\boldsymbol{H}}{\rho}\right) = 0,$$

da cui, integrando e indicando con $\boldsymbol{H}_0$, ρ_0 i valori di $\boldsymbol{H}$, ρ per $t = 0$, poichè all'istante iniziale è $\alpha = 1$, si ha

$$\alpha^{-1} \frac{\boldsymbol{H}}{\rho} = \frac{\boldsymbol{H}_0}{\rho_0}. \tag{4.7}$$

Ma per l'equazione lagrangiana di continuità è $I_3\alpha \cdot \rho = \rho_0$ essendo $I_3\alpha$ l'*invariante terzo* dell'omografia α, o se si vuole lo jacobiano di x, y, z rispetto ad a, b, c, perciò la (4.7) si può scrivere

$$\boldsymbol{H} = \frac{\alpha \boldsymbol{H}_0}{I_3 \alpha} \tag{4.8}$$

che è un'altra notevole relazione la quale esprime l'intensità del campo magnetico in un istante generico t in funzione dell'intensità all'istante iniziale, analoga a quella di CAUCHY che nella fluidodinamica classica esprime il vortice in un istante t, per mezzo del vortice all'istante iniziale.

2. Le equazioni di Cauchy e di Helmholtz nella magnetofluidodinamica.

Per vedere come si modificano le equazioni di HELMHOLTZ e di CAUCHY in m.f.d., dividiamo per ρ ambo i membri dell'equazione (4.2) del moto, e prendiamo quindi il rotore di ambo i membri. Poichè

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}\int \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\,d\rho$$

si ottiene

$$\frac{\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v}) = \operatorname{rot}\left(\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \wedge \frac{\boldsymbol{B}}{\mu\rho}\right), \quad (\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}),$$

dalla quale, tenendo conto dell'equazione di continuità, si deduce

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}}{\rho}\right) - \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\,\frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}}{\rho} = \frac{1}{\rho}\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \wedge \frac{\boldsymbol{B}}{\mu\rho}\right), \tag{4.9}$$

la quale generalizza le equazioni di HELMHOLTZ.

L'equazione (4.9) si può ancora integrare considerando il moto dal punto di vista lagrangiano, e l'integrale di essa ci darà l'estensione dell'equazione di CAUCHY. Invero, applicando a sinistra di ambo i membri dell'equazione (4.9) l'operatore α^{-1}, si ottiene

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha^{-1}\frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}}{\rho}\right) = \frac{\alpha^{-1}}{\rho}\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \wedge \frac{\boldsymbol{B}}{\mu\rho}\right)$$

Integrando rispetto al tempo a partire dall'istante $t = 0$, fino all'istante t generico, si deduce

$$\alpha^{-1}\frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}}{\rho} = \frac{\operatorname{rot}_0\boldsymbol{v}_0}{\rho_0} + \int_0^t \frac{\alpha^{-1}}{\rho}\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \wedge \frac{\boldsymbol{B}}{\mu\rho}\right)dt$$

dove l'indice o sta ad indicare che gli elementi sono calcolati nel punto $P_0(a, b, c)$, posizione iniziale di $P(x, y, z)$.

Essendo $\rho = \dfrac{\rho_0}{I_3\alpha}$, ed $\alpha^{-1} = \dfrac{KR\alpha}{I_3\alpha}$, dove $KR\alpha$ è la *coniugata* (o trasposta) dell'omografia vettoriale $R\alpha$, *reciproca* di α, si deduce ancora

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \frac{\alpha}{I_3\alpha}\left[\operatorname{rot}_0\boldsymbol{v}_0 + \int_0^t KR\alpha \operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \wedge \frac{\boldsymbol{B}}{\mu\rho}\right)dt\right]. \tag{4.10}$$

Questa, che è la cercata estensione dell'equazione di CAUCHY alla m. f. d. esprime il vortice in un istante generico t, per mezzo del vortice all'istante iniziale e per mezzo del campo magnetico. Da essa risulta manifesta l'influenza del campo magnetico sulla creazione dei vortici. Anche se inizialmente il vortice è nullo, nel movimento di un fluido perfetto. elettricamente conduttore, per effetto del campo magnetico può nascere un moto vorticoso.

Nel caso della m. f. d. il teorema di LAGRANGE relativo alla conservazione del moto irrotazionale di un fluido perfetto, in generale dunque non sussiste più.

§ 5. Onde Magnetofluidodinamiche.

1. Equazioni linearizzate.

Uno dei problemi più importanti nella m. f. d. é quello che riguarda la formazione e la propagazione di onde dovute a piccole perturbazioni. I moti ondosi nei fluidi elettricamente conduttori presentano lineamenti caratteristici assai interessanti ed essi trovano applicazioni in molti problemi geofisici ed astrofisici.

Il primo a dimostrare la possibilità della formazione di onde in un liquido conduttore fu ALFVÈN nel 1942. Per analogia con le vibrazioni trasversali di un filo teso egli ammise che quando un liquido è disturbato dalla sua posizione di riposo i tubi di forza magnetica compiono delle vibrazioni trasversali con velocità di fase delle onde generate uguale a $\left(\frac{\mu \boldsymbol{H}^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$, onde che egli chiamò magnetoidrodinamiche.

Qui ci limiteremo a stabilire le equazioni delle piccole oscillazioni riferendoci al caso di un fluido gassoso a riposo con pressione p_0, temperatura T_0, densità ρ_0 e soggetto a un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{H}_0$ che, con riferimento ad una terna di assi cartesiani ortogonali (x, y, z), sia diretto parallelamente al piano $x=0$. Le sue componenti saranno parciò $(0, H_{oy}, H_{oz})$,

Il fluido sia perturbato da una piccola perturbazione e nel moto che ne nasce sia $\boldsymbol{v}$ la velocità, e siano p' , ρ' , T' , $\boldsymbol{h}$ gli incrementi della pressione della densità, della temperatura e del campo magnetico. Sia inoltre $\boldsymbol{E}$ il campo elettrico, $\boldsymbol{I}$ la densità di corrente di conduzione e ρ_e la densità delle cariche elettriche.

Le quantità $\boldsymbol{v}'$, p' , ρ' , T' , $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{I}$ e ρ_e saranno supposte motto piccole e tali da poter trascurare i termini di ordine superiore al primo rispetto a queste quantità. Supporremo inoltre che esse siano funzioni soltanto di z e t. Considereremo perciò onde piane che si propagano nella direzione dell'asse z.

Le equazioni di MAXWELL e quelle che esprimono la legge generalizzata di OHM e la legge di conservazione delle cariche elettriche, da prendere in considerazione sono:

$$\text{rot}\, \boldsymbol{h} = \boldsymbol{I} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{5.1}$$

$$\text{rot}\, \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t}, \quad (\text{div}\, \boldsymbol{h} = 0) \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{I} = \sigma(\boldsymbol{E} + \mu\, \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}_0) \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div}\, \boldsymbol{I} = 0 \tag{5.4}$$

dove ε, μ e σ sono supposte costanti.

Queste equazioni, nell'ipotesi che gli elementi dipendano soltanto da z e da t, porgono le seguenti equazioni scalari

$$-\frac{\partial h_y}{\partial z} = I_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{5.1a}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial h_x}{\partial t} \tag{5.2a}$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial z} = I_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \tag{5.1b}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial h_y}{\partial t}, \tag{5.2b}$$

$$I_x = \sigma[E_x + \mu(H_{0z} v_y - H_{0y} v_z)] \tag{5.3a}$$

$$I_y = \sigma(E_y - \mu H_{0z} v_x) \tag{5.3b}$$

$$I_z = \sigma(E_z + \mu H_{0y} v_x), \tag{5.3c}$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\partial I_z}{\partial z} = 0. \tag{5.4a}$$

Dall'equazione di stato

$$p = R\rho T \tag{5.5}$$

dove R è la costante del gas, si ricava

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0}, \tag{5.5'}$$

e da quella di continuità

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, \text{div}\, \boldsymbol{v} = 0, \tag{5.6}$$

si ha

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{5.6'}$$

L'equazione vettoriale del moto

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\text{grad}\, p + \mu\, \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{H} + \mu \left(\Delta_2 \boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\, \text{grad div}\, \boldsymbol{v}\right)$$

si riduce alla

$$(5.7) \qquad \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = - \operatorname{grad} p + \mu \, \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{H}_0 + \mu' \left(\Delta_2 \boldsymbol{v} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right)$$

che porge le equazioni scalari

$$(5.7a) \qquad \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = \mu \left(H_{0z} I_y - H_{0y} I_z \right) + \mu' \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

$$(5.7b \qquad \rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} = - \mu H_{0z} I_x + \mu' \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} .$$

$$(5.7c) \qquad \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu H_{0y} I_x + \frac{4}{3} \mu' \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} .$$

Infine, l'equazione dell'energia, che assumeremo nella forma semplificata

$$(5.8) \qquad \rho \frac{d}{dt} \left(C_p T + \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \varkappa \Delta_2 T + \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \times \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H} \right) ,$$

nel caso considerato si riduce alla

$$(5.9) \qquad \rho_0 C_p \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t} + \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Osserviamo che la componente h_z del campo magnetico indotto figura soltanto nell'equazione (5.2c), che porge $\frac{\partial h_z}{\partial t} = 0$, Poichè d'altra parte dalla condizione $\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0$, si ha $\frac{\partial h_z}{\partial z} = 0$, si deduce che è $h_z = \text{cost}$, e si può assumere $h_z = 0$.

Le rimanenti equazioni si possono suddividere in due gruppi. Un primo gruppo comprende le puantità v_x, h_x, I_y, I_z, E_y, E_z, ρ_e, che sono governate dalle equazioni.

$$(5.1b) \qquad I_y + \varepsilon \frac{\partial h_z}{\partial t} = \frac{\partial h_x}{\partial z}$$

$$(5.1c) \qquad I_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$(5.2a) \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial h_x}{\partial t}$$

$$(5.3b) \qquad I_y = \sigma \left(E_y - \mu H_{0z} v_x \right)$$

$$(5.3c) \qquad I_z = \sigma \left(E_z + \mu H_{0y} v_x \right)$$

$$(5.4a) \qquad \frac{\partial I_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$$

$$(5.7a) \qquad \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = \mu \left(H_{0z} I_y - H_{0y} I_z \right) + \mu' \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

Poichè queste equazioni sono relative alle componenti v_x, h_x della velocità e del campo magnetico indotto, che sono perpendicolari al campo magnetico uniforme $\boldsymbol{H}_0$ applicato, le onde corrispondenti si sogliono chiamare *onde trasversali.*

Un secondo gruppo comprende le quantità v_y, v_z, h_y, I_x, E_x, p', ρ', T' e le equazioni che le governano sono

$$\frac{\partial h_y}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + I_x = 0 \tag{5.1a}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = - \mu \frac{\partial h_y}{\partial t} \tag{5.2b}$$

$$I_x = \sigma[E_x + \mu(H_{0z} v_y - H_{0y} v_z)] \tag{5.a}$$

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0} \tag{5.5'}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{5.6'}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} = - \mu H_{0z} I_x + \mu' \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \tag{5.7b}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu H_{0y} I_x + \frac{4}{3} \mu' \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \tag{5.7c}$$

$$\rho_0 C_p \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t} + \varkappa \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} . \tag{5.9}$$

Questo secondo gruppo dà luogo ad onde che spesso sono chiamate *onde longitudinali.*

Eliminando dalle equazioni del primo gruppo le incognite I_y ed I_z ci si siduce al sistema di equazioni

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h_x}{\partial t} = H_{0z} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{\mu\sigma} \frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial^2 h_x}{\partial t^2} \\ &\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = \mu H_{0z} \frac{\partial h_x}{\partial z} + \mu\varepsilon \left(H_{0y} \frac{\partial E_z}{\partial t} - H_{0z} \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) + \mu' \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ &\sigma(E_y - \mu H_{0z} v_x) + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial h_x}{\partial z} \\ &\sigma(E_z + \mu H_{0y} v_x) + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0, \end{aligned} \tag{5.10}$$

in cui sono incognite h_x, v_x, E_y, E_z.

Dalle ultime tre delle equazioni (2.10) si possono anche eliminare facilmente E_y ed E_z e si ottiene l'equazione

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \right) &= \mu H_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial h_x}{\partial t} + h_x \right) - \\ &- \mu\varepsilon \left(\frac{H_{0z}}{\sigma} \frac{\partial^2 h_x}{\partial z \partial t} + \mu H_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) + \mu' \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \right), \\ &(H_0^2 = H_{0y}^2 + H_{0z}^2), \end{aligned} \tag{5.11}$$

che é un'equazione nelle sole incognite h_x, v_x, che va associata alla prima delle (5.10). Determinate queste due incognite, dalla 3ª e 4ª delle (5.10) si ricavano E_y ed E_z con semplici quadrature. Le (5.3b) e (5.3c) dànno poi I_y ed I_z; infine dalla (5.4a) si ricava ρ_e.

Analogamente, eliminando dalle equazioni del 2º gruppo le incognite E_x, I_x, si ottiene il sistema

$$\frac{\partial h_y}{\partial t} = H_{0z}\frac{\partial v_y}{\partial z} - H_{0y}\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\mu^2 \sigma H_{0z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} - \mu' \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) \tag{5.12 a}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} = \mu H_{0z}\frac{\partial h_y}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu' \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - \rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t}\right) + \mu' \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - \varepsilon \mu^2 H_{0z}\left(H_{0z}\frac{\partial v_y}{\partial t} - H_{0y}\frac{\partial v_z}{\partial t}\right) \tag{5.12 b}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{H_{0y}}{H_{0z}}\left(\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} - \mu' \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + \frac{4}{3}\mu' \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \tag{5.12 c}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{5.12 d}$$

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0} \tag{5.12 e}$$

$$\rho_0 C_p \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t} + \varkappa \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2}. \tag{5.12 f}$$

2. Oscillazioni periodiche rispetto al tempo. Onde piane.

Delle equazioni ottenute nel nº precedente consideriamo soluzioni periodiche in cui tutte le quantità perturbate sono proporzionali al fattore esponenziale $e^{i(\omega t - kz)}$ dove k é il numero d'onda ed ω é la pulsazione.

In questo caso le equazioni ridotte del primo gruppo, é cioé la prima delle (5.10) e la (5.11), si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} &\left(i\omega - \frac{\varepsilon}{\sigma}\omega^2 + \frac{k^2}{\mu\sigma}\right) h_x + ikH_{0z} v_x = 0 \\ &\left[ik\frac{\mu H_{0z}}{\rho_0}\left(i\omega\frac{E}{\sigma} + 1\right) + \frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\mu H_{0z}}{\rho_0}\omega k\right] h_x + \\ &\qquad + \left[(i\omega + \nu k^2)\left(i\omega\frac{\varepsilon}{\sigma} + 1\right) + i\omega\varepsilon\mu V_a^2\right] v_x = 0, \end{aligned} \tag{5.13}$$

dove $\nu = \dfrac{\mu'}{\rho_0}$ é la viscosità cinematica, e $V_a^2 = \dfrac{\mu H_0^2}{\rho}$, é il quadrato della velocità delle onde di ALFVÉN. Eliminando fra le equazioni

(5.13) il rapporto $\dfrac{h_x}{v_x}$, abbiamo l'equazione determinante

$$(5.14)\qquad \left(i\omega - \frac{\varepsilon}{\sigma}\omega^2\right)\left[\left(i\omega - \frac{\varepsilon}{\sigma}\omega^2 + \frac{k^2}{\mu\sigma}\right)(i\omega + \nu k^2) + (k^2 - \omega^2\varepsilon\mu)V_z^2\right] - \\ - \omega^2\varepsilon\mu\left(i\omega - \frac{\varepsilon}{\sigma}\omega^2 + \frac{k^2}{\mu\sigma}\right) V_y^2 = 0,$$

dove é

$$V_y^2 = \frac{\mu H_{0y}^2}{\rho_0}, \quad V_z^2 = \frac{\mu H_{0z}^2}{\rho_0}.$$

La (5.14) é un'equazione quadratica in k^2 e vi sono perciò due differenti modi di propagazione di onde trasversali. In assenza di campo magnetico ($V_y = V_z = 0$), la (5.14) si riduce alla

$$\left(i\omega - \frac{\varepsilon}{\sigma}\omega^2\right)\left(i\omega - \frac{\varepsilon}{\sigma}\omega^2 + \frac{k^2}{\mu\sigma}\right)(i\omega + \nu k^2) = 0$$

e si hanno le due soluzioni

$$k_1^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega, \quad k_2 = -\frac{i\omega}{\nu}$$

che definiscono rispettivamente le onde luminose e le onde viscose. In presenza di campo magnetico vi é accoppiamento fra questi due modi.

Il fattore $i\omega - \dfrac{\varepsilon}{\sigma}\omega^2$ rappresenta onde elettromagnetiche smorzate.

Nel caso sia trascurabile la corrente di spostamento ($\varepsilon = 0$), l'equazione (5.14) diventa

$$(5.15)\qquad \left(i\omega + \frac{k^2}{\mu\sigma}\right)(i\omega + \nu k^2) + k^2 V_z^2 = 0,$$

e le onde trasversali risultano indipendenti da V_y, e risultano anche indipendenti dall'effetto di compressibilità del fluido.

Per un fluido non viscoso ($\nu = 0$), di conduttività elettrica infinita ($\sigma = \infty$), la (5.15) dà

$$(5.15')\qquad \frac{\omega^2}{k^2} = V_z^2$$

che definisce le onde trasversali di Alfvén.

Per le onde longitudinali occorre considerare le equazioni (5.12). Dalle ultime due di esse si può eliminare la temperatura T' e si ricava

$$(5.16)\qquad \frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{C_p \dfrac{p_0}{\rho_0}}{C_p - \dfrac{p_0}{\rho_0 T_0}} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\varkappa \dfrac{p_0}{\rho_0}}{C_p - \dfrac{p_0}{\rho_0 T_0}} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{p'}{p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0}\right).$$

Ma, essendo V_s^2 la velocità del suono nel mezzo non perturbato, si ha ora

$$(5.17)\qquad V_s^2 = \frac{C_p \frac{p_0}{\rho_0}}{C_p - \frac{p_0}{\rho_0 T_0}} = \frac{C_p R T_0}{C_p - R} = \gamma R T_0, \quad \left(R = C_p - C_v, \ \gamma = \frac{C_p}{C_v}\right),$$

e l'equazione precedente si può scrivere

$$(5.18)\qquad \frac{\partial p'}{\partial t} = V_s^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \varkappa T_0 (\gamma - 1) \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{p'}{p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0}\right).$$

Il sistema si riduce dunque alle equazioni (5.12 a), (5,12 b), (5.12 c), (5.12 d) e (5.18). Ponendo in esse al posto delle incognite h_y, v_y, v_z, p', ρ' delle quantità proporzionali all'esponenziale $e^{i(\omega t - kz)}$, si hanno le equazioni

$$(5.19)\qquad \begin{aligned}
&i\omega h_y + \left[ik H_{0z} - \frac{k}{\mu^2 \sigma H_{0z}}(\rho_0 \omega - ik^2\mu')\right] v_y - ikH_{0y} v_z = 0\\
&ik\mu H_{0z} h_y + \left[(\rho_0 i\omega + \mu' k^2)\left(1 + i\omega \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + i\omega\varepsilon\mu^2 H_{0z}^2\right] v_y - i\omega\varepsilon\mu^2 H_{0y} H_{0z} v_z = 0\\
&\frac{H_{0y}}{H_{0z}}(\rho_0 i\omega + \mu' k^2) v_y + \left(\rho_0 i\omega + \frac{4}{3}\mu' k^2\right) v_z - ikp' = 0\\
&\qquad\qquad - ik\rho_0 v_z + i\omega \rho' = 0\\
&\left[i\omega + \frac{\varkappa T_0}{p_0}(\gamma - 1) k^2\right] p' - \left[i\omega V_s^2 + \frac{\varkappa T_0}{\rho_0}(\gamma - 1) k^2\right] \rho' = 0.
\end{aligned}$$

Uguagliando a zero il determinante dei coefficienti di queste equazioni, si ha, per la determinazione dei valori del numero d'onda k, l'equazione

$$(5.20)\qquad \begin{aligned}
&\left\{\varkappa T_0(\gamma - 1)\left(\frac{1}{\rho_0} + i\frac{4}{3}\frac{\nu\omega}{p_0}\right) k^4 - \left[\omega^2 \frac{\varkappa T_0}{p_0}(\gamma - 1) + \right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. + \frac{4}{3}\nu\omega^2 - i\omega V_s^2\right] k^2 - i\omega^3\right\} \cdot\\
&\cdot \left\{(i\omega + \nu k^2)\left[\frac{1}{\mu\sigma}(k^2 - \varepsilon\mu\omega^2) + i\omega\right] + (k^2 - \varepsilon\mu\omega^2) V_z^2\right\} -\\
&- (k^2 - \varepsilon\mu\omega^2)(i\omega + \nu k^2)\left[\omega^2 - i\omega \frac{\varkappa T_0}{p_0}(\gamma - 1) k^2\right] V_y^2 = 0.
\end{aligned}$$

Se trascuriamo la corrente di spostamento ($\varepsilon = 0$), questa equazione si riduce alla seguente

$$
(5.21) \qquad \begin{aligned}
&\left\{ \varkappa T_0 (\gamma - 1) \left(\frac{1}{\rho_0} + i \frac{4}{3} \frac{\nu\omega}{p_0} \right) k^4 - \left[\frac{\varkappa T_0}{p_0} (\gamma - 1) \omega^2 + \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. + \frac{4}{3} \nu\omega^2 - i\omega V_s^2 \right] k^2 - i\omega^3 \right\} \cdot \\
&\qquad \cdot \left\{ (i\omega + \nu k^2) \left(\frac{k^2}{\sigma\mu} + i\omega \right) + k^2 V_z^2 \right\} - \\
&- k^2 (i\omega + \nu k^2) \left[\omega^2 - i\omega \frac{\varkappa T_0}{p_0} (\gamma - 1) k^2 \right] V_y^2 = 0.
\end{aligned}
$$

La quantità racchiusa fra le prime due parentesi storte di questa equazioue rappresenta onde sonore in un fluido viscoso in cui si ha diffusione del calore. In questo caso, se non vi é campo magnetico trasversale, cioè $H_{oy} = 0$, e quindi $V_{oy} = 0$, non vi è accoppiamento fra le onde sonore e le onde magnetiche definite dall' equazione

$$
\frac{\nu}{\mu\sigma} k^4 + \left[V_z^2 + i \left(\nu + \frac{1}{\mu\sigma} \right) \omega \right] k^2 - \omega^2 = 0.
$$

Se invece é $V_y \neq 0$ vi é accoppiamento tra i tre modi basici costituiti di onde sonore, onde viscose ed onde magnetiche.

L'effetto della componente trasversale H_{0y} del campo magnetico sulle onde sonore si vede chiaramente considerando il caso più semplice di un gas ideale in cui la viscosità é nulla ($\nu = 0$), la conducibilità elettrica é infinita ($\sigma = \infty$), e la conducibilità termica é nulla ($\varkappa = 0$, ed inoltre é $H_{0z} = 0$. In tal caso l' equazione (5.21) si riduce alla seguente

$$
(5.22) \qquad \frac{\omega^2}{k^2} = V_s + V_y^2.
$$

Questa mostra che l' effettiva velocità del suono V_e in un plasma ideale, con $H_{0y} \neq 0$, é data dalla relazione

$$
V_e^2 = V_s^2 + V_y^2.
$$

Nel caso ancora di un plasma ideale, sotto l'azione di un campo magnetico generale ($H_{0y} \neq 0$, $H_{0z} \neq 0$), l' equazione (5.21) si riduce alla seguente

$$
\left(\frac{\omega^2}{k^2} - V_s^2 \right) \left(\frac{\omega^2}{k^2} - V_z^2 \right) - \frac{\omega^2}{k^2} V_y^2 = 0.
$$

Vi sono quindi in questo caso due velocità di propagazione. Poiché sussiste ancora la (5.15') che definisce le onde trasversali di ALFVÈN, possiamo dire che in un plasma ideale, sotto l'azione di un campo magnetico generale, vi sono tre differenti velocità di propagazione.

Nel caso più generale corrispondente all'equazione (5.20) si ha ancora accoppiamento con onde luminose.

Se il campo magnetico trasversale è nullo ($V_y = 0$), l'equazione (5.20) si scinde nelle due

$$\varkappa T_0(\gamma - 1)\left(\frac{1}{\rho_0} + i\frac{4}{3}\frac{\omega\nu}{p_0}\right)k^4 - \left[\frac{\varkappa T_0}{p_0}(\gamma - 1)\omega^2 + \right. \tag{5.23}$$

$$\left. + \frac{4}{3}\nu\omega^2 - i\omega V_s^2\right]k^2 - i\omega^3 = 0$$

$$(i\omega + \nu k^2)\left[\frac{1}{\mu\sigma}(k^2 - \varepsilon\mu\omega^2) + i\omega\right] + (k^2 - \varepsilon\mu\omega^2)V_z^2 = 0 \tag{5.24}$$

la prima delle quali rappresenta onde sonore in un fluido viscoso dotato di conducibilità termica, mentre la seconda rappresenta onde magnetiche accoppiate con onde viscose ed onde luminose.

Nel caso di un gas ideale in cui $\nu = 0$, $\varkappa = 0$, $\sigma = \infty$, la (5.20) si riduce alla

$$[1 + \varepsilon\mu(V_y^2 + V_z^2)]\frac{\omega^4}{k^4} - [V_s^2 + V_y^2 + \tag{5.25}$$

$$+ V_z^2 + \varepsilon\mu V_s^2 V_z^2]\frac{\omega^2}{k^2} + V_s^2 V_z^2 = 0$$

che mostra l'effetto della componente trasversale H_{0y} del campo magnetico.

Se più in particolare il campo magnetico é tutto trasversale ($H_z = 0$, dalla (5.25) si ricava

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{V_s^2 + V_y^2}{1 + \varepsilon\mu V_y^2}$$

Cioé in questo caso la velocità di propagazione é un pò più piccola della corrispondente effettiva velocità del suono espressa dalla (5.22), che si ha nel caso in cui si trascura la corrente di spostamento.

3. Superficie d'onda in Magnetofluidodinamica.

Una questione di notevole interesse nella m.f.d. é quella della determinazione del fronte d'onda in una propagazione ondosa, utilizzando il metodo ben noto delle caratteristiche di un sistema differenziale.

Qui ci riferiremo al caso di un fluido compressibile, di alta conduttività elettrica, tale da poterla ritenere infinita, e nella ipotesi di ALFVÉN che si possa trascurare la corrente di spostamento in confronto della corrente di conduzione.

Le equazioni da considerare sono in questo caso

$$(5.26)\qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = 0, \qquad (5.26')\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$$

$$(5.27)\qquad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \boldsymbol{F}$$

$$(5.28)\qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Considerando la discontinuità delle derivate prime del campo magnetico $\boldsymbol{H}$, della velocità $\boldsymbol{v}$ e della densità ρ, attraverso una eventuale superficie d'onda $\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \text{cost.}$, dalle equazioni precedenti si deducono le seguenti

$$(5.29)\qquad \Delta \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \Delta \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = 0. \qquad (5.29')\ \Delta \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

$$(5.30)\qquad \Delta \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\mu}{\rho} (\Delta \operatorname{rot} \boldsymbol{H}) \wedge \boldsymbol{H} - \frac{1}{\rho} \Delta \operatorname{grad} p$$

$$(5.31)\qquad \Delta \frac{d\rho}{dt} + \rho\Delta \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Se indichiamo ora con $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{w}$ i vettori caratteristici che rappresentano rispettivamente la discontinuità delle derivate prime del campo magnetico e della velocità, le equazioni (5.29) e (5.29′) porgono

$$(5.32)\qquad \frac{d\varphi}{dt} \boldsymbol{h} + \operatorname{grad} \varphi \wedge (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{w}) = 0, \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi \times \boldsymbol{v}\right),$$

$$(5.32')\qquad \operatorname{grad} \varphi \times \boldsymbol{h} = 0$$

la seconda delle quali è conseguenza della prima, e mostra che il vettore caratteristico $\boldsymbol{h}$ è tangente alla superficie d'onda. Dalla (5.32) si ha inoltre $\boldsymbol{h} \wedge \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{H} = 0$; cioè i vettori caratteristici $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{w}$ sono complanari col campo magnetico $\boldsymbol{H}$.

Nell'ipotesi che la pressione p sia funzione della sola densità ρ, indicando con δ il parametro di discontinuità delle derivate di ρ, le equazioni (5.30) e (5.31) porgono

$$(5.33)\qquad \frac{d\varphi}{dt} \boldsymbol{w} + \frac{\mu}{\rho} \boldsymbol{H} \wedge (\operatorname{grad} \varphi \wedge \boldsymbol{h}) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \delta \operatorname{grad} \varphi = 0$$

$$(5.34)\qquad \delta \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \rho \operatorname{grad} \varphi \times \boldsymbol{w} = 0.$$

Le equazioni (5.32), (5.33) e (5.34), che costituiscono le *condizioni di compatibilità dinamica*, danno luogo a sette equazioni lineari omogenee nei sette parametri h_i, w_i $(i = 1, 2, 3)$, e δ, i primi dei quali sono le componenti cartesiane dei vettori caratteristici $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{w}$. L'eliminazione di queste quantità fornisce, come si sa, l'equazione differenziale alle derivate parziali delle varietà caratteristiche relative al sistema differenziale (5.26) e (5.28).

Ora l'eliminazione di δ ed $\boldsymbol{h}$ dà luogo all'equazione

$$(5.35) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \boldsymbol{w} - \frac{\mu}{\rho} \boldsymbol{H} \wedge \{ \operatorname{grad} \varphi \wedge [\operatorname{grad} \varphi \wedge (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{w})] \} - \\ - \frac{dp}{d\rho} \operatorname{grad} \varphi \times \boldsymbol{w} \cdot \operatorname{grad} \varphi = 0$$

che é lineare omogenea nel solo vettore caratteristico $\boldsymbol{w}$. Introducendo le *diadi* $\mathcal{H}(\boldsymbol{H}, \operatorname{grad} \varphi)$, $\mathcal{H}(\operatorname{grad} \varphi, \boldsymbol{H})$, $\mathcal{H}(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi)$, e ponendo

$$(5.36) \qquad V_s^2 = \frac{dp}{d\rho}, \qquad \boldsymbol{V}_a = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \boldsymbol{H},$$

ed inoltre

$$(5.37) \qquad A = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - (\operatorname{grad} \varphi \times \boldsymbol{V}_a)^2, B = \operatorname{grad} \varphi \times \boldsymbol{V}_a$$

esendo V_s la velocità del suono nel mezzo che si considera, $\boldsymbol{V}_a$ il vettore velocità delle onde di ALFVÈN, ed A, B quantità scalari, la (3.53) si può scrivere

$$(5.38) \qquad [A - (V_a^2 + V_s^2) \mathcal{H}(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi) + B \{ \mathcal{H}(\boldsymbol{V}_a, \operatorname{grad} \varphi) + \\ + \mathcal{H}(\operatorname{grad} \varphi, \boldsymbol{V}_a) \}] \boldsymbol{w} = 0$$

o più semplicemente

$$(5.38') \qquad (A + \alpha) \boldsymbol{w} = 0$$

avendo indicato con α l'omografia vettoriale

$$(5.39) \qquad \alpha = B \{ \mathcal{H}(\boldsymbol{V}_a, \operatorname{grad} \varphi) + \mathcal{H}(\operatorname{grad} \varphi, \boldsymbol{V}_a) \} - \\ - (V_a^2 + V_s^2) \mathcal{H}(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi).$$

La (5.38') mostra che l'omografia $A + \alpha$ è *degenere*, e pertanto è nullo il suo *invariante terzo*, cioè

$$(5.40) \qquad I_3(A + \alpha) = 0$$

la quale non è altro che l'equazione ottenuta uguagliando a zero il determinante dei coefficienti delle tre equazioni lineari omogenee nelle tre componenti cartesiane del vettore $\boldsymbol{w}$, cui dà luogo la (5.35). La (5.40) è pertanto, in sintesi, la cercata equazione differenziale delle varietà caratteristiche.

In base ad una nota formula di calcolo vettoriale omografico la (5.40) equivale alla

$$(5.40') \qquad A^3 + A^2 I_1 \alpha + A I_2 \alpha + I_3 \alpha = 0.$$

Essendo l'omografia α definita (5.39), si ottiene

$$I_1\alpha = 2B^2 - (V_a^2 + V_s^2)(\text{grad}\,\varphi)^2,$$
$$I_2\alpha = -B^2[V_a^2(\text{grad}\,\varphi)^2 - B^2], \qquad I_3\alpha = 0,$$

e pertanto l'equazione (5.40′) si scinde nelle due seguenti

(5.41) $$A \equiv \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - (\text{grad}\,\varphi \times \boldsymbol{V}_a)^2 = 0,$$

(5.42) $$A^2 + A\,[2B^2 - (V_a^2 + V_s^2)(\text{grad}\,\varphi)^2] - B^2[V_a^2(\text{grad}\,\varphi)^2 - B^2] = 0.$$

La prima corrisponde ad onde che si propagano con velocità uguale alla componente normale della velocità delle onde di ALFVÈN. In quanto alla (5.42), essa si può scrivere anche

$$(A + B^2)^2 - (A + B^2)(V_a^2 + V_s^2)(\text{grad}\,\varphi)^2 + V_s^2 B^2 (\text{grad}\,\varphi)^2 = 0$$

e osservando che per le (5.37) è $A + B^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, si ha infine

(5.43) $$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^4 - (V_a^2 + V_s^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 (\text{grad}\,\varphi)^2 + V_s^2(\text{grad}\,\varphi \times V_a)^2 \cdot (\text{grad}\,\varphi)^2 = 0,$$

la quale, prescindendo dalla (5.41) è la cercata equazione differenziale della superficie d'onda.

Nel caso in cui all'esterno del fronte d'onda vi sia la quiete ($\boldsymbol{v} = 0$), e quindi $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$, ponendo

(5.44) $$p_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial t}; \quad p_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3); \qquad \boldsymbol{p} = \text{grad}\,\varphi$$
$$\boldsymbol{p}^2 = (\text{grad}\,\varphi)^2 = g^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$$

la (5.43) diventa

(5.45) $$p_0^4 - (V_a^2 + V_s^2)p_0^2 \cdot g^2 + V_s^2(\boldsymbol{p} \times V_a)^2 g^2 = 0$$

e se indichiamo con

(5,46) $$V = -\frac{p_0}{g} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\text{mod grad}\,\varphi}$$

la *velocità di propagazione del fronte d'onda,* si ha $p_0 = -Vg$, e la (5.45) porge

(5.47) $$V^4 - (V_a^2 + V_s^2)V^2 + V_s^2(\boldsymbol{V}_a \times \boldsymbol{n})^2 = 0,$$

dove $\boldsymbol{n} = \frac{\text{grad}\,\varphi}{\text{mod grad}\,\varphi}$, è il versore della normale alla superficie d'onda. La (5.47), che è un'equazione di 2° grado in V^2, fornisce per V^2, come si riconosce facilmente, due valori, entrambi reali e positivi, uno minore del più piccolo dei due valori V_a^2, V_s^2, e l'altro maggiore del più grande di essi. Quindi in valore assoluto sono possibili due velocità di propagazione.

Risolvendo la (5.45) rispetto a p_0, nel caso più generale in cui V_a, V_s sono variabili col tempo e con le coordinate x_1, x_2, x_3 del punto, si ha un'equazione della forma

$$p_0 + H(p_1, p_2, p_3;\ x_1, x_2, x_3;\ t) = 0 \tag{5.48}$$

con

$$H = \pm \left\{ \frac{1}{2} \left[(V_a^2 + V_s^2) g^2 \pm g \,|\, (V_a^2 + V_s^2)^2 g^2 - 4 V_s^2 (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{V}_a)^2 |^{1/2} \right] \right\}^{1/2} . \tag{5.49}$$

Ricordando i valori (5.44) di p_0 e p_i, la (5.48) si può considerare l'equazione di Hamilton-Jacobi, in cui è incognita la funzione $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$, corrispondente al sistema hamiltoniano:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{5.50}$$

dove H è omogenea di 1° grado in p_1, p_2, p_3. Le (5.50) sono le equazioni differenziali delle curve caratteristiche, o *bicaratteristiche* relative al nostro sistema differenziale.

Osserviamo che se la velocità $\boldsymbol{v}$ del fluido non è nulla si ha

$$\frac{d\varphi}{dt} \,/\, \mathrm{mod\ grad}\, \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \,/\, g + \mathrm{grad}\, \varphi \times \boldsymbol{v} \,/\, g = -(V - v_n),$$

dove $v_n = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}$ è la componente di $\boldsymbol{v}$ normale al fronte d'onda, e $V - v_n$ è la velocità relativa con cui avanza normalmente il fronte d'onda rispetto al fluido in moto. In questo caso nella (5.47) va posto $V - v_n$ al posto di V, e al secondo membro della (5.49), che esprime il valore dell'hamiltoniana H, va aggiunto il termine $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p}$.

4. Onde d'urto.

Un'onda d'urto è generalmente costituita da uno strato di transizione, detto *strato d'urto*, molto sottile, dell'ordine di pochi cammini liberi medi, tale da poterlo considerare una superficie di discontinuità attraverso la quale sono discontinui la velocità, la pressione, la densità, la temperatura, il flusso magnetico, ecc., oltre che le loro derivate.

Le equazioni che definiscono le dette discontinuità attraverso il fronte d'urto si ottengono applicando i principi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia, nonchè l'equazione del campo magnetico;

Qui stabiliremo le dette equazioni riferendoci al caso più generale di un fluido viscoso, di conduttività elettrica finita, in cui il calore si propaga sia per conducibilità che per irradiazione.

Nella valutazione dei salti chiameremo *fronte* dell'onda la regione verso la quale il gas fluisce, mentre l'altra regione sarà quella a *valle*. Agli elementi relativi a queste regioni apporremo rispettivamente gli indici 2 ed 1.

Per stabilire le equazioni di discontinuità attraverso il fronte di urto ricordiamo intanto che se $F(x, y, z, t)$ è una funzione derivabile definita in una regione dello spazio contenente il dominio $D(t)$, limitato dalla superficie $S(t)$ variabile col tempo t si ha [1]

$$(5.51)\qquad \frac{d}{dt}\int_{D(t)} F d\tau = \int_{D(t)} \frac{\partial F}{\partial t} d\tau + \int_{S(t)} F \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale *esterna* alla superficie $S(t)$, e $\boldsymbol{v}$ è la velocità dei punti di $S(t)$.

Inoltre, se il dominio $D(t)$ è ottenuto portando sulle normali nei punti di una porzione qualsiasi $s(t)$ di una superficie d'urto, da una parte e dall'altra, un segmento di lunghezza costante h, supposto che la funzione F sia discontinua attraverso la superficie $s(t)$, e i valori sulle due facce di essa siano F_1, ed F_2, risulta [2]

$$(5.52)\qquad \lim_{h\to 0} \frac{d}{dt}\int_{D(t)} F d\tau = \int_{s(t)} F_2(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n}\, d\sigma - \int_{s(t)} F_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

dove $\boldsymbol{v}_1$, e $\boldsymbol{v}_2$ sono i valori di $\boldsymbol{v}$ sulle due facce dello strato d'urto e $\boldsymbol{V}$ è la velocità dei punti di $s(t)$.

Una relazione analoga sussiste se invece di un campo scalare $F(P, t)$ si ha un campo vettoriale $\boldsymbol{F}(P, t)$.

a) Ciò premesso il *principio di conservazione della massa* contenuta nel dominio $D(t)$ è espresso dall'equazione

$$(5.53)\qquad \frac{d}{dt}\int_{D(t)} \rho d\tau = 0,$$

dove ρ è la densità del fluido. In virtù della (5.52) avremo

$$\int_{s(t)} \rho_2(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} d\sigma - \int_{s(t)} \rho_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} d\sigma = 0,$$

(1) Cfr. E. Goursat, *Course d'Analyse*, t. I, p. 665 (Paris, Gauthiers-Villars, 1933).

(2) Cfr. C. Agostinelli, *Le equazioni fondamentali delle onde d'urto in magnetofluidodinamice*, « Atti Accad. Sc. Torino », vol. 98 (1963-64).

da cui per l'arbitrarietà della porzione $s(t)$ della superficie d'urto considerata, si ha, in ogni punto di questa superficie

$$\rho_2(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} - \rho_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}) \times 0, \tag{5.54}$$

che è l'equazione di discontinuità derivante dal principio di conservazione della massa

b) Il *teorema della quantità di moto* (o del momento), si deduce dall'equazione del moto, che nel caso più generale di un gas viscoso e radiativo risulta

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\rho \operatorname{grad} \Phi - \operatorname{grad} p_t + \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} + \mu' \Delta_2 \boldsymbol{v} + (\lambda' + \mu') \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\,. \tag{5.55}$$

dove Φ è l'energia potenziale dovuta alle azioni esterne, riferita all'unità di massa; p_t è la pressione totale, somma della pressione p del gas e della pressione di radiazione $p_r = \frac{1}{3} a_r T^4$, essendo a_r la costante di Stefan–Bolzmann e T la temperatura assoluta; mentre λ', μ' sono i coefficienti di viscosità.

Integrando ambo i membri della (5.55) rispetto al dominio variabile tenendo conto dell'equazione di continuità, e applicando la (5.51), nella quale si ponga $\boldsymbol{F} = \rho \boldsymbol{v}$, con alcune trasformazioni si perviene alla equazione

$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)} \rho \boldsymbol{v} d\tau = -\int_{D(t)} \rho \operatorname{grad} \Phi d\tau - \int_{S(t)} \left(p_t + \frac{B^2}{2\mu}\right) \boldsymbol{n} d\sigma + \int_{s(t)} \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} \times \boldsymbol{n} d\sigma + \int_{s(t)} \left(\lambda' \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu' D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right) \boldsymbol{n}\, d\sigma, \tag{5.56}$$

dove $D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}$ è la *dilatazione* dell'omografia vettoriale $\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}$.

La (5.56) esprime ii teorema della quantità di moto.

Passando al limite per $h \to 0$, applicando quindi la (5.52), e osservando che per la continuità della forza esterna il limite del primo integrale del secondo membro della (5.56) è nullo, si ottiene

$$\int_{s(t)} \rho_2 \boldsymbol{v}_2 \cdot (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} d\sigma - \int_{s(t)} \rho_1 \boldsymbol{v}_1 \cdot (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} d\sigma =$$

$$= -\int_{s(t)} \left[p_t + \frac{B^2}{2\mu}\right]_1^2 \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int_{s(t)} \left[\frac{\boldsymbol{B}}{\mu} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}\right]_1^2 d\sigma +$$

$$+ \int_{s(t)} \left[\lambda' \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu' D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right]_1^2 \boldsymbol{n} \cdot d\sigma,$$

dove col simaolo $[F]_1^2$, si è indicato il salto $F_2 - F_1$. Per l'arbitrarietà della superficie $s(t)$ si deduce

$$\rho_2 \boldsymbol{v}_2 \cdot (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} - \rho_1 \boldsymbol{v}_1 \cdot (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} = -\left[p_t + \frac{B^2}{2\mu}\right]_1^2 \boldsymbol{n} + \\ + \frac{1}{\mu}\left[\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}\right]_1^2 + \left[\lambda' \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu' D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right]_1^2 \boldsymbol{n}, \tag{5.57}$$

e questa è l'equazione di discontinuità derivante dal teorema della quantità di moto.

c) Il teorema dell'energia. Ricordiamo ora che, trascurando l'energia dovuta alle reazioni chimiche, o nucleari, l'equazione dell'energia, nel movimento di un gas, risulta

$$\rho \frac{d}{dt}\left(C_v T + \frac{1}{2} v^2 + \Phi + \frac{E_r}{\rho}\right) = \operatorname{div}\left(\Psi \boldsymbol{v} - p_t \boldsymbol{v} + \varkappa \operatorname{grad} T + \\ + \frac{C}{\chi\rho} \operatorname{grad} p_r\right) + \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \times (\eta \operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \tag{5.58}$$

dove

$$\Psi = \lambda' \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu' D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \tag{5.59}$$

è l'omografia degli sforzi dovuti alla viscosità, $\eta = \frac{1}{\mu\sigma}$ è il coefficiente di diffusività magnetica, $\varkappa$ il coefficiente di conducibilità termica, $E_r = 3p_r = a_r T^4$ è l'energia di radiazione, c la velocità della luce e χ il cosidetto coefficiente di opacità.

Integrando ambo i membri della (5.58) rispetto al volume $D(t)$, con calcoli analoghi a quelli precedentemente indicati e con opportune trasformazioni, tenendo conto dell'equazione del campo magnetico

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{v}) = \eta \Delta_2 \boldsymbol{B}, \tag{5.60}$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)} \left[\rho\left(C_v T + \frac{1}{2} v^2 + \Phi\right) + E_r + \frac{B^2}{2\mu}\right] d\tau = \\ = \int_{S(t)} \left(\Psi \boldsymbol{v} - p_t \boldsymbol{v} + \varkappa \operatorname{grad} T + \frac{C}{\chi\rho} \operatorname{grad} p_r\right) \times \boldsymbol{n}\, d\sigma + \\ + \frac{1}{\mu}\int_{S(t)} \left[\boldsymbol{B} \wedge (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{v}) - \eta \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} + \frac{1}{2} B^2 \cdot \boldsymbol{v}\right) \times \boldsymbol{n}\, d\sigma, \tag{5.61}$$

che è l'equazione che esprime il teorema dell'energia.

Passando al limile per $h \to 0$, quando il dominio $D(t)$ tende alla porzione $s(t)$ della superficie d'urto, per l'arbitrarietà di questa porzione di superficie, si deduce

$$
\begin{aligned}
&\left[\rho\left(C_v T + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) + E_r + \frac{B^2}{2\mu}\right]_2 (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} - \\
&- \left[\rho\left(C_v T + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) + E_r + \frac{B^2}{2\mu}\right]_1 (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} = \\
&= \left[\Psi \boldsymbol{v} - p_t \boldsymbol{v} + \varkappa \operatorname{grad} T + \frac{c}{\gamma\rho} \operatorname{grad} p_r\right]_1^2 \times \boldsymbol{n} + \\
&+ \frac{1}{\mu}\left[\boldsymbol{B} \wedge (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{v}) - \eta \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} + \frac{1}{2} B^2 \boldsymbol{v}\right]_1^2 \times \boldsymbol{n}.
\end{aligned} \tag{5.62}
$$

Questa è l'equazione di discontinuità derivante dal teorema dell'energia. In essa si sono trascurati i termini dipendenti dalla energia potenziale Φ, poichè le forze corrispondenti sono continue, tenendo conto della (5.54).

d) Consideriamo infine l'equazione (5.60) del campo magnetico. Integrandola rispetto al volume $D(t)$, applicando quindi la formula (5.51), nonchè il teorema del rotore, si perviene alla equazione

$$
\frac{d}{dt}\int_{D(t)} \boldsymbol{B} d\tau = \int_{S(t)} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} d\sigma + \eta \int_{S(t)} (\operatorname{rot} \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{n} d\sigma. \tag{5.63}
$$

Passando al limite, per l'arbitrarietà di $s(t)$ si deduce

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}_2 \cdot (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} - \boldsymbol{B}_1 (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} = \\
&\qquad = [\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}]_1^2 + \eta [\operatorname{rot} \boldsymbol{B}]_1^2 \wedge \boldsymbol{n}
\end{aligned} \tag{5.63}
$$

che è l'equazione di discontinuità del campo magnetico attraverso il fronte d'urto.

Moltiplicando ambo i membri della (5.63) scalarmente per $\boldsymbol{n}$ e indicando semplicemente con V la componente normale della velocità dei punti della superficie d'urto, si ha, con evidente significato dei simboli,

$$
[B_n (v_n - V)]_1^2 = [B_n v_n]_1^2
$$

e quindi

$$
[B_n]_1^2 = 0,
$$

la quale mostra che la componente normale del campo magnetico e continua attraverso il fronte d'urto.

Il sistema di equazioni (5.54), (5.57), (5.62) e (5·63) si può scrivere ora più semplicemente

$$[\rho(v_n - V)]_1^2 = 0,$$

$$[\rho(v_n - V)\boldsymbol{v}]_1^2 + \left[p_t + \frac{B^2}{2\mu}\right]_1^2 \boldsymbol{n} - \frac{B_n}{\mu}[\boldsymbol{B}]_1^2 =$$

$$= \left[\lambda' \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu' D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right]_1^2 \boldsymbol{n},$$

$$\text{(5 64)} \qquad \left[(v_n - V)\left(C_v \rho T + \frac{1}{2}\rho v^2 + E_r + \frac{B^2}{2\mu}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(p_t + \frac{B^2}{2\mu}\right) v_n - \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v} \cdot B_n\right]_1^2 =$$

$$= \left[\Psi \boldsymbol{v} + \varkappa \operatorname{grad} T + \frac{C}{\chi_\rho} \operatorname{grad} p_r - \frac{\eta}{\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B}\right]_1^2 \times \boldsymbol{n},$$

$$[(v_n - V)\boldsymbol{B}]_1^2 - B_n[\boldsymbol{v}]_1^2 = \eta [\operatorname{rot} \boldsymbol{B}]_1^2 \wedge \boldsymbol{n}.$$

Se il campo magnetico è longitudinale, cioè $\boldsymbol{B} = B_n \boldsymbol{n}$, il sistema delle prime tre equazioni precedenti si riduce esattamente a quello che si ha nell'ordinaria gasdinamica quando si tenga conto ancora dell'effetto radiativo.

§ 6. Cenni di dinamica del plasma.

1. Caso di un plasma molto rarefatto.

Per un esatta descrizione del moto di una corrente di plasma occorrerebbe analizzare direttamente il fenomeno della collisione fra particelle di plasma composto di ioni, elettroni e particelle neutre.

Nel caso però di un plasma molto rarefatto, come avviene nel caso delle alte temperature, il cammino libero medio per collisione è molto grande. In questi casi il moto di ioni ed elettroni del plasma sarà in larga misura dominato dalle forze elettromagnetiche applicate e saranno trascurabili le interazioni fra le diverse particelle e l'influenza che il loro moto può avere nel modificare la distribuzione del campo.

Al moto di una particella carica individuale si può allora applicare la legge di NEWTON, espressa, nella metrologia gaussiana, dall'equazione

$$\text{(6.1)} \qquad m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \wedge \boldsymbol{B}\right)$$

dove m è la massa della particella, e la sua carica elettrica, che sarà positiva o negativa secondochè si tratta di ioni o di elettrone, $\boldsymbol{v}$ la velocità vettoriale della particella, c la velocità della luce, $\boldsymbol{E}$ l'intensità del campo elettrico e $\boldsymbol{B}$ quella del campo magnetico.

Dalla (6.1) risulta chiaro che la forza magnetica è perpendicolare alla velocità e quindi essa non produce lavoro sulla carica, dimodochè può nascere una variazione di energia cinetica soltanto per azione del campo elettrico.

Invero, moltiplicando ambo i membri della (6.1) scalarmente per $\boldsymbol{v}$ si ricava subito

$$\text{(6.1)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\, mv^2\right) = e\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{v},$$

e se il campo elettrico è nullo si ha

$$\frac{1}{2}\, mv^2 = \text{cost}\,; \qquad v^2 = v_0^2 \ \text{(costante)},$$

cioè l'energia cinetica, e quindi la grandezza della velocità del corpuscolo si mantiene costante, ed esso si muove sulla sua traiettoria di moto uniforme.

Se il campo elettrico deriva da un potenziale Φ indipendente dal tempo, cosichè $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \Phi$, l'equazione (6.2) può essere integrata e porge per l'energia della particella l'equazione

$$\text{(6.3)} \qquad \frac{1}{2} mv^2 + e\Phi = \text{costante.}$$

2. Caso in cui esiste la funzione lagrangiana.

Se i campi elettrico e magnetico sono variabili, in generale non vi è l'integrale dell'energia, ma può esistere una funzione lagrangiana $\mathfrak{L}$ data da

$$\text{(6.4)} \qquad \mathfrak{L} = \frac{1}{2} mv^2 - e\Phi + \frac{e}{c}\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}$$

dove $\boldsymbol{A}$ è il potenziale vettore del campo magnetico e Φ è il potenziale scalare del campo elettrico, cioè $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E} = -$ $- \operatorname{grad} \Phi$.

In questo caso l'equazione del moto diventa

$$\text{(6.5)} \qquad m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\, e \operatorname{grad} \Phi + \frac{e}{c} \boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

ed essendo $\boldsymbol{A}$ e Φ funzioni del punto P e del tempo t, essa dovrà ridursi alla forma

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{grad}_v \mathfrak{L}) - \mathrm{grad}_P \mathfrak{L} = 0. \tag{6.6}$$

Ora dalla (6.4) si ha

$$\mathrm{grad}_v \mathfrak{L} = m\boldsymbol{v} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}, \quad \mathrm{grad}_P \mathfrak{L} = -e\,\mathrm{grad}\,\Phi + \frac{e}{c}K\frac{d\boldsymbol{A}}{dP}\boldsymbol{v},$$

dove $K\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dP}$ è la *coniugata* (o *trasposta*) dell'omografia vettoriale $\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dP}$. Ne segue

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{grad}_v \mathfrak{L}) = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{A}}{dP}\boldsymbol{v}\right)$$

e quindi, osservando che

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dP} - K\frac{d\boldsymbol{A}}{dP}\right)\boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{v},$$

la (6.6) diventa

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + e\,\mathrm{grad}\,\Phi + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{v}\right) = 0,$$

che si identifica con la (6.5) se $\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0$, oppure se il campo elettrico è della forma

$$\boldsymbol{E} = -\left(\mathrm{grad}\,\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right).$$

In questi casi esiste dunque la funzione lagrangiana espressa dalla (6.4).

3. Esistenza di un integrale dei momenti.

Osserviamo che se in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x, y, z), la z è coordinata ignorabile, se cioè le componenti del campo dipendono soltanto dalle coordinate, x, y, si ha $\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} = 0$, e le equazioni del moto ammettono l'integrale dei momenti

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + \frac{e}{c}A_z = \text{costante}, \tag{6.7}$$

dove A_z è la componente secondo l'asse z del potenziale vettore del campo magnetico.

È utile considerare ancora il caso di un campo simmetrico intorno a un asse che assumiamo come asse z.

In coordinate cilindriche r, φ, z, si ha ora

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - e\Phi + \frac{e}{c}(\dot{r}A_r + r\dot{\varphi}A_\varphi + \dot{z}A_z) \tag{6.8}$$

con $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi} = 0$. Si ha quindi l'integrale dei momenti

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi + \frac{e}{c}\, rA_\varphi = \text{costante}. \tag{6.9}$$

Se il campo magnetico trasversale è nullo ($B_\varphi = 0$), ponendo $rA_\varphi = \Psi$, si ha

$$\boldsymbol{B} = \text{rot}\,(\Psi \,\text{grad}\, \varphi) = \text{grad}\, \Psi \wedge \text{grad}\, \varphi, \tag{6.10}$$

Se inoltre questo campo deriva da un potenziale Φ^*, tale che $\boldsymbol{B} = \text{grad}\, \Phi^*$, la funzione $\Phi^*(r, z)$ sarà una funzione armonica simmetrica, soddisfacente cioè all'equazione

$$\text{div}\boldsymbol{B} = \Delta_2 \Phi^* = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi^*}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial z^2} = 0 \tag{6.11}$$

e la funzione Ψ sarà legata alla Φ^* dalle relazioni

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi^*}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial z}. \tag{6.12}$$

La Ψ sarà quindi la *funzione associata di* Φ^* nel senso di Beltrami, che dovrà soddisfare l'equazione

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \tag{6.13}$$

Questa funzione, uguagliata a costante, fornisce, in ogni piano meridiano, le linee di forza magnetica.

In questo caso l'equazione vettoriale del moto diventa

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\left[-\text{grad}\,\Phi + \frac{1}{c}\left(\frac{d\varphi}{dt}\,\text{grad}\,\Psi - \frac{d\Psi}{dt}\,\text{grad}\,\varphi\right)\right] \tag{6.14}$$

che in coordinate cilindriche r, φ, z, dà luogo alle seguenti equazioni scalari

$$\begin{aligned} m(\ddot r - r\dot\varphi^2) &= e\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{c}\frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) \\ m\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi) &= -\frac{e}{c}\frac{d\Psi}{dt} \\ m\ddot z &= e\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{6.15}$$

La seconda di queste porge l'integrale

$$mr^2\dot\varphi + \frac{e}{c}\Psi = c_0 \text{ (costante)} \tag{6.16}$$

che non è altro che l'integrale (6.9), dove $rA_\varphi = \Psi$.

Ricavando $\dot{\varphi}$ da questo integrale e sostituendo nelle altre due equazioni esse si riducono alle seguenti

$$(6.17)\qquad \begin{aligned} m\ddot{r} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left\{e\Phi + \frac{1}{2}\frac{\left(c_0 - e\frac{\Psi}{c}\right)^2}{mr^2}\right\} \\ m\ddot{z} &= -\frac{\partial}{\partial z}\left\{e\Phi + \frac{1}{2}\frac{\left(c_0 - e\frac{\Psi}{c}\right)^2}{mr^2}\right\} \end{aligned}$$

che sono le equazioni del moto di un punto in un piano meridiano (r, z), soggetto ad una forza che deriva dal potenziale

$$(6.18)\qquad U = -\left\{e\Phi + \frac{1}{2}\frac{\left(c_0 - e\frac{\Psi}{c}\right)^2}{mr^2}\right\}.$$

Essendo il potenziale Φ del campo elettrico e la funzione Ψ del campo magnetico indipendenti dal tempo, le equazioni (6.17) ammettono l'integrale delle forze vive

$$(6.19)\qquad \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) - U = h(\text{costante}).$$

Questo integrale si ottiene anche osservando che l'equazione del moto (6.14) ammette l'integrale (6.3), che si può scrivere

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + e\Phi = \text{cost.}$$

Eliminando $\dot{\varphi}$ per mezzo dell'integrale (6.16), si ha proprio la (6.19).

4. Moto di una particella carica in un campo elettromagnetico a simmetria assiale.

In questo caso, supposto che la densità delle cariche sia nulla, e che il moto della particella non alteri la distribuzione del campo elettrico e del campo magnetico, dovranno essere verificate le equazioni di MAXWELL

$$(6.20)\qquad \text{rot}\,\boldsymbol{B} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad (6.20')\quad \text{div}\,\boldsymbol{B} = 0$$

$$(6.21)\qquad \text{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad (6.22)\quad \text{div}\,\boldsymbol{E} = 0$$

dove ε è la costante dielettrica del mezzo e μ la permeabilità magnetica che si suppongono costanti.

Se poniamo, come nel numero precedente

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}[\Psi(P, t) \cdot \operatorname{grad} \varphi] = \operatorname{grad} \Psi \wedge \operatorname{grad} \varphi, \tag{6.22}$$

dove ora la funzione Ψ varia col punto P, e col tempo t, la (6.20′) risulta identicamente soddisfatta.

La (6.21) diventa quindi

$$\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi\right) = 0,$$

che è soddisfatta ponendo

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi - \operatorname{grad} \Phi \tag{6.23}$$

con Φ altra funzione del punto e del tempo.

Trattandosi di un campo a simmetria assiale il cui asse di simmetria assumiamo come asse z, indicando ora con ρ, φ, z le corrispondenti coordinate cilindriche, sarà $\Psi = \Psi(\rho, z, t)$ e $\Phi = \Phi(\rho, z, t)$.

Prendendo allora la divergenza di ambo i membri della (6.23), si ha

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = -\Delta_2 \Phi,$$

e la (6.22) risulta soddisfatta se Φ è funzione armonica.

Assumendo $\Phi = 0$, e quindi

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi, \tag{6.24}$$

coi valori di $\boldsymbol{B}$ ed $\boldsymbol{E}$ espressi dalle (6.22) e (6.24), la (6.20) dà luogo all'unica equazione scalare

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \tag{6.25}$$

che definisce la Ψ in funzione di ρ, z, t.

Ciò premesso, coi valori (6.22) e (6.24) del campo magnetico e del campo elettrico l'equazione del moto della particella risulta

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{e}{c}\left(\frac{d\varphi}{dt} \operatorname{grad} \Psi - \frac{d\Psi}{dt} \operatorname{grad} \varphi\right), \tag{6.26}$$

che coincide formalmente con la (6.14) quando in essa si ponga $\Phi = 0$.

L'equazione (6.26) ammette la funzione lagrangiana

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{e}{c}\Psi \cdot \dot{\varphi} = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c}\Psi\dot{\varphi} \tag{6.27}$$

ed esiste l' integrale dei momenti

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{e}{c}\Psi = c_0 \quad \text{(costante)}. \tag{6.28}$$

Non esiste però l'integrale dell'energia, essendo la funzione Ψ esplicitamente dipendente dal tempo, come risulta dall'equazione (6.25) che la definisce.

Ma per mezzo dell'integrale (6.28) il problema si riduce ancora a un problema piano, e precisamente al moto di un punto di massa m sul piano (r, z) sollecitato da una forza derivante dal potenziale

$$U = -\frac{1}{2m}\frac{\left(c_0 - e\frac{\Psi}{c}\right)^2}{\rho^2} \tag{6.29}$$

§ 7. La dinamica del plasma dal punto di vista della teoria cinetica dei gas.

1. Introduzione.

Per un più accurato esame del moto di una corrente di plasma, costituito da un gas ionizzato, composto di un gran numero di particelle cariche e neutre, è necessario considerare il moto di queste particelle dal punto di vista della teoria cinetica dei gas.

La generalizzazione dell'ordinaria teoria cinetica dei gas al caso di un plasma è uno dei più importanti problemi che è ancora nella sua fase di sviluppo. In questo studio si fa l'ipotesi del caos molecolare, supponendo che le particelle, le cui velocità appartengono a un certo rango, siano, in ogni istante, distribuite indipendentemente dalla posizione e velocità delle altre particelle.

Poichè le particelle di un gas ionizzato si attraggono o si respingono, ne nascono fra di esse delle interazioni molto complicate. Per un gas molto rarefatto le influenze fra le varie particelle sono piuttosto piccole, ma così non è se il gas è denso e le particelle sono strette le une alle altre.

In questa teoria il gas è supposto di essere un aggregato di particelle muoventesi rapidamente e queste particelle si ritengono rigide, di diametro infinitesimo, ma di massa finita, continuamente in collisione l'una con l'altra, con scambio di energia.

La struttura di un mezzo gassoso può essere caratterizzata dal suo commino libero, che è la distanza che le particelle percorrono fra le collisioni. Ma la distribuzione delle velocità istantanee e della densità è in generale lontana dalla uniformità, per cui si può considerare soltanto la media statistica di queste quantità, invece dei valori istantanei.

La media statistica del cammino libero è quella che vien chiamata *cammino libero medio,* che è uno dei parametri più importanti nella teoria cinetica dei gas. Se il cammino libero medio è molto piccolo in confronto di una lunghezza caratteristica L del campo in cui si svolge il moto, abbiamo le ordinarie condizioni della gasdinamica, in cui il gas può essere considerato come un mezzo continuo. Se invece il cammino libero medio non è trascurabile in confronto di L, allora nello studio dei problemi di corrente può essere preso in considerazione il carattere discreto delle particelle del gas.

In questo caso si ritiene sufficiente considerare soltanto urti binari fra le particelle. È da osservare però che, essendo le particelle immerse in un campo di forze, quando due di esse si avvicinano strettamente i loro cammini saranno influenzati dalla presenza delle altre particelle e può non aversi una vera collisione, ma come si suol dire un *incontro.*

Nel caso di un plasma le azioni elettromagnetiche tra le particelle cariche, per effetto dell'azione schermante degli ioni e degli elettroni, dànno luogo ad incontri, mentre l'ipotesi delle collisioni binarie diventa sospetta, poichè allora in corrispondenza di collisioni dette azioni diverrebbero infinite.

2. Spazio delle velocità e funzione di distribuzione.

Le particelle di un plasma, come le molecole di un gas, si muovono molto rapidamente e la loro velocità media è dell'ordine della velocità del suono nel mezzo che si considera. Però, poichè costantemente avvengono collisioni o incontri, la variazione della velocità fra le varie particelle può essere grande e per una stessa particella può variare da zero a diverse volte il valor medio. Per la descrizione di un tale moto è utile perciò introdurre, per ciascuna specie di particelle, una *funzione di distribuzione* delle velocità, e considerare per questa funzione l'equazione di BOLTZMANN, che è fondamentale nello studio della teoria cinetica dei gas.

Per definire opportunamente la funzione di distribuzione, che indicheremo con f, occorre intanto considerare lo *spazio delle velocità.* Se con riferimento ad una terna di assi cartesiani ortogonali (x, y, z), con l'origine in un punto O, indichiamo con x,

y, z, le coordinate di un punto P e con $\boldsymbol{r} = P - 0$ il vettore di posizione di P, le componenti di $\boldsymbol{r}$ sono ovviamente x, y, z. Indicheremo ancora semplicemente con $d\boldsymbol{r}$ un elemento di volume con centro in P, costituito da un parallelepipedo elementare cogli spigoli paralleli agli assi.

La velocità di una particella sarà indicata con $\boldsymbol{V}$, e il vettore $\boldsymbol{V}$ può essere considerato come vettore di posizione di un punto nello spazio delle velocità. Questo punto, le cui coordinate sono uguali alle componenti cartesiane di $\boldsymbol{V}$, può essere chiamato il punto velocità della particella. Un elemento di volume nello spazio delle velocità, nell'intorno di $\boldsymbol{V}$, lo indicheremo con $d\boldsymbol{V}$.

Le componenti (x, y, z) del vettore di posizione $\boldsymbol{r}$, e le componenti (V_x, V_y, V_z) del vettore velocità $\boldsymbol{V}$ possono essere considerate le coordinate di un punto dello *spazio delle fasi* a sei dimensioni.

In un mezzo continuo la densità in un punto $\boldsymbol{r}$ è definità come il limite per $d\boldsymbol{r} \rightarrow 0$ del rapporto $\dfrac{dm}{d\boldsymbol{r}}$, essendo dm la massa contenuta nell'elemento di volume $d\boldsymbol{r}$.

Ma applicando questa definizione al caso di un gas, o di un plasma, costituito da un numero discreto di particelle si avrebbe una densità fluttuante rapidamente da punto a punto. In questo caso occorrerà procedere come segue:

Supponendo che le particelle siano tutte simili. o considerando particelle tutte di una stessa specie, definiamo intanto un elemento di volume «fisicamente piccolo» $d\boldsymbol{r}$, che sia sufficientemente grande da contenere un gran numero di particelle, ma che sia sufficientemente piccolo in confronto della scala di variazione delle quantità fisiche del gas. Allora la media della massa del gas contenuta nell'elemento di volume $d\boldsymbol{r}$, fatta sopra un intervallo di tempo dt, piccolo in confronto della scala temporale di variazione delle quantità fisiche, sarà proporzionale al volume $d\boldsymbol{r}$ dell'elemento e indipendente dalla sua forma. Questa media possiamo indicarla con $\rho d\boldsymbol{r}$, e allora ρ è la densità di massa.

Analogamente la media nel tempo dt del numero di particelle contenute in $d\boldsymbol{r}$ sarà proporzionale a $d\boldsymbol{r}$ e può essere indicata con $\nu d\boldsymbol{r}$, dove ν è chiamatato il *numero densità*. Se m è la massa di queste particelle avremo quindi

$$\rho = \nu m. \tag{7.1}$$

Il numero *probabile* di particelle che al tempo t sono situate nel volume elementare $d\boldsymbol{r}$, nell'intorno di $\boldsymbol{r}$, ed hanno velocità comprese nell'intorno $d\boldsymbol{V}$ di $\boldsymbol{V}$, è della forma

$$f(\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{r},\ t)\,d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{V}. \tag{7.2}$$

La funzione f, che dipende dal vettore di posizione $\boldsymbol{r}$, dal vettore velocità $\boldsymbol{V}$, e dal tempo t, è chiamata la *funzione di distribuzione delle velocità*, ed ogni risultato che dipende esplicitamente da f è una media caratteristica del gas.

Il numero totale di particelle contenute nell'elemento di volume $d\boldsymbol{r}$ si otterrà integrando l'espressione (7.2) sopra lo spazio delle velocità.

Questo numero è, per le posizioni fatte, $\nu d\boldsymbol{r}$, e pertanto si ha

$$\nu = \int f(\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{r},\ t)\,d\boldsymbol{V}. \tag{7.3}$$

Se ora $\Phi(\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{r}.\ t)$ è una funzione del vettore $\boldsymbol{V}$, come pure del vettore di posizione $\boldsymbol{r}$ e del tempo t, rappresentante una quantità fisica, e consideriamo la media temporale della somma dei valori di Φ per le $\nu d\boldsymbol{r}$ particelle contenute nell'elemento $d\boldsymbol{r}$, questa media per definizione è data da $\nu d\boldsymbol{r}.\overline{\Phi}$, dove Φ è il valore medio di Φ. Poichè il contributo alla somma dei valori di Φ dovuto dalle particelle dell'elemento $d\boldsymbol{r}$, con velocità comprese nell'intorno $d\boldsymbol{V}$ di $\boldsymbol{V}$, è dato da $f\Phi d\boldsymbol{V}d\boldsymbol{r}$, con integrazione sullo intero spazio delle velocità abbiamo

$$\nu d\boldsymbol{r}\cdot\Phi = d\boldsymbol{r}\int f\Phi d\boldsymbol{V}$$

e quindi il valore medio della quantità Φ è dato da

$$\overline{\Phi} = \frac{1}{\nu}\int f\Phi d\boldsymbol{V} = \int f\Phi d\boldsymbol{V} \Big/ \int f d\boldsymbol{V}. \tag{7.4}$$

In particolare la velocità media $\boldsymbol{v}$ delle particelle del gas sarà data da

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\nu}\int f\boldsymbol{V}d\boldsymbol{V}. \tag{7.5}$$

Osserviamo che se indichiamo con $\boldsymbol{C}$ la velocità relativa di una particella rispetto a un sistema di assi mobili con velocità media $\boldsymbol{v}$, poniamo cioè $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{v}$, la $\boldsymbol{C}$ è chiamata *velocità peculiare* della particella. Il valore medio della velocità peculiare di tutte le particelle contenute in un elemento $d\boldsymbol{r}$, è nullo per definizione.

Se ora nello spazio delle velocità cambiamo l'origine delle coordinate ponendola nel punto $\boldsymbol{v}$, poichè risulta

$$f(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{r}, t)\, d\boldsymbol{V} d\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}, t)\, d\boldsymbol{C} d\boldsymbol{r},$$

abbiamo anche

$$\nu = \int f(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{r}\ t)\, d\boldsymbol{C}. \tag{7.3'}$$

Se il gas è una miscela di diverse specie di particelle, come avviene per un gas ionizzato, ovvero per un plasma, si definisce una funzione di distribuzione per ciascuna specie di particelle. La funzione di distribuzione per le particelle della specie s^{ma} sarà indicata con f_s. In tal caso le relazioni (7.3), 7.4), (7.5) sussistono ancora per $f = f_s$.

3. L'equazione di Boltzmann.

L'equazione alla quale soddisfa la funzione di distribuzione f fu dedotta per la prima volta da Boltzmann e porta perciò il nome di equazione di Boltzmann. Per stabilire questa equazione si suppone che solo le collisioni e gli incontri binari siano importanti, ed inoltre che ogni particella sia sollecitata da una forza $\boldsymbol{F}$ indipendente dalla velocità.

Se si considerano le particelle che in un istante t occupano il volume $d\boldsymbol{r} d\boldsymbol{V}$ dello spazio delle fasi, il cui numero è quindi $f(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{r}, t)\, d\boldsymbol{V} d\boldsymbol{r}$, dopo un intervallo di tempo Δt occuperanno un volume nell'intorno del punto $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{V}\Delta t$, $\boldsymbol{V} + \boldsymbol{F}\Delta t$, e il loro numero sarà

$$f(V + \boldsymbol{F}\Delta t,\ \ \boldsymbol{r} + \boldsymbol{V}\Delta t,\ \ t + \Delta t) \cdot d\boldsymbol{V} d\boldsymbol{r}.$$

La differenza rappresenta la variazione di particelle per collisione, dell'insieme originario, nel tempo Δt. Dividendo per Δt, e passando al limite per $\Delta t \to 0$, si ha l'equazione di Boltzmann,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{grad}_r f \times \boldsymbol{V} + \operatorname{grad}_V f \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll.}} \tag{7.6}$$

il cui secondo membro rappresenta la variazione per collisioni o incontri, del numero delle particelle della classe $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V} + d\boldsymbol{V})$, per unità di volume nello spazio reale di un volume $d\boldsymbol{r}$, nello intorno della posizione $\boldsymbol{r}$ e all'istante t.

Nel dedurre la (7.6) abbiamo supposto che la forza $\boldsymbol{F}$ sia indipendente da $\boldsymbol{V}$. Fortunatamente per un gas ionizzato, in cui è presente un campo magnetico, si dimostra che la forza di Lorentz $\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}$ lascia invariata l'equazione (7.6). Perciò l'equazione di

BOLTZMANN per un gas costituito di ioni di massa m, trasportanti una carica elettrica e, e soggetto a un campo magnetico $\boldsymbol{B}$, è

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{grad}_r f \times V + \frac{e}{m} \operatorname{grad}_V f \times (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll.}} \tag{7.7}$$

dove $\boldsymbol{E}$ è il campo elettrico espresso in unità elettromagnetiche.

Nel caso in cui il gas è costituito da una miscela di particelle di diversa specie ed f_s è la funzione di distribuzione delle particelle di specie s^{ma}, per ciascuna f_s sussiste l'equazione di BOLTZMANN

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \operatorname{grad}_r f_s \times \boldsymbol{V}_s + \operatorname{grad}_V f_s \times \boldsymbol{F}_s = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{coll.}} \tag{7.8}$$

Se indichiamo con V_{s1}, V_{s2}, V_{s3} le componenti cartesiane di V_s e con F_{s1}, F_{s2}, F_{s3} quelle della forza F_s, l'equazione (7.8) equivale ovviamente alla

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_s}{\partial x_i} V_{si} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_s}{\partial V_{si}} F_{si} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{coll.}} \tag{7.8'}$$

Lo scopo principale della teoria cinetica dei gas è di determinare, risolvendo l'equazione di BOLTZMANN, la funzione di distribuzione f_s per ogni specie di particelle, supponendo assegnati i termini di collisione.

Nel caso di un plasma occorre tener conto simultaneamente delle equazioni di MAXWELL del campo elettromagnetico, in cui la densità di corrente elettrica è data da

$$\boldsymbol{I} = \sum_{s=1}^{n} e_s \nu_s \boldsymbol{v}_s = \sum_{s=1}^{n} e_s \int f_s \boldsymbol{V}_s \, d\boldsymbol{V}_s, \tag{7.9}$$

dove e_s è la carica delle particelle di specie s^{ma}.

La questione si presenta perciò molto complicata e difficile.

Tuttavia l'equazione di BOLTZMANN è molto utile per lo studio di due importanti aspetti della dinamica del plasma. In primo luogo le equazioni fondamentali del movimento di un plasma dal punto di vista macroscopico possono essere dedotte dall'equazione di BOLTZMAMN come una prima approssimazione e si possono quinti ottenere delle informazioni sulla validità di dette equazioni fondamentali. In secondo luogo l'equazione di BOLTZMANN può dare valide informazioni sui cosidetti coefficienti di trasporto, come ad esempio il coefficiente di conduttività elettrica, di conduttività termica, ecc. Nell'analisi macroscopica questi coefficienti di trasporto sono semplicemente introdotti come funzioni note di quantità fisiche della dinamica del plasma, ed essi possono essere determinati per mezzo della teoria cinetica.

4. Distribuzione maxwelliana.

In generale, come si è già detto, la risoluzione dell'equazione di BOLTZMANN. per la funzione di distribuzione, è molto difficile. Essa è stata determinata in modo esatto soltanto nel caso di una *distribuzione maxwelliana.* Questa funzione rappresenta in tal caso uno stato di distribuzione uniforme e stazionario di un gas e sussiste nelle ipotesi che il gas consista di una sola specie di particelle, che su di esse non agiscano forze di massa e che le collisioni siano solo binarie.

In questo caso la funzione di distribuzione è indipendente dal tempo e dal vettore di posizione $\boldsymbol{r}$, e si trova che è della forma

$$f = Ae^{-hC^2}, \tag{7.10}$$

dove A ed h sono delle costanti che possono essere determinate in termini della temperatura del gas e del numero di densità.

Con riferimento a coordinate polari nello spazio delle velocità (C, ϑ, φ), l'elemento $d\boldsymbol{C}$ in questo spazio è dato da

$$d\boldsymbol{C} = C^2 dC \operatorname{sen}\vartheta d\vartheta d\varphi,$$

con

$$0 \leq C < \infty.$$

Quindi in virtù dell'equazione (7.3′) abbiamo

$$\nu = \int f(\boldsymbol{C}) d\boldsymbol{C} = \int_0^\infty Ae^{-hC^2} C^2 dC \int_0^\pi \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = A\left(\frac{\pi}{h}\right)^{\frac{3}{2}}$$

la quale fornisce per la costante A il valore $A = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \nu$.

La temperatura cinetica del gas per definizione è data dalla equazione

$$\frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} mC^2 \tag{7.11}$$

dove m è la massa delle molecole e k è una costante assoluta, detta costante di BOLTZMANN, il cui valore è $1{,}372 \cdot 10^{-16}$ erg per grado. Ricordando la (7.4) si ha inoltre

$$\overline{C^2} = \frac{1}{\nu}\int f C^2 d\boldsymbol{C} = \frac{A}{\nu}\int_0^\infty e^{-hC^2} C^4 dC \cdot 4\pi =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{A\pi^{\frac{3}{2}}}{\nu h^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{2h}$$

e quindi per la (7.11) $h = \frac{m}{ekT}$, e infine

$$f(\boldsymbol{C}) = \nu\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mC^2}{2Tk}}. \tag{7.12}$$

che è la nota funzione di distribuzione maxwelliana. Nel caso di un gas non uniforme la soluzione dell'equazione di BOLTZMANN può essere trovata col metodo delle perturbazioni ponendo in prima approssimazione

$$f = f_0(1 + \Phi)$$

dove f_0 è la funzione di distribuzione maxwelliana e Φ è, in valore assoluto, molto piccola in confronto dell'unità.

Sostitoendo nell'equazione di BOLTZMANN e trascurando i termini di ordine superiore al primo rispetto a Φ, si ottiene una equazione in Φ linearizzata che può essere risolta

5. Le equazioni di trasporto per un gas completamente ionizzato.

Per mezzo dell'equazione di BOLTZMANN si possono dedurre le equazioni di trasporto, o di conservazione, per le diverse specie di particelle di cui può essere composto un gas. Esse sono l'equazione di continuità, l'equazione del moto e l'equazione dell'energia. Ci limiteremo qui a considerare l'equazione di continuità e l'equazione del moto e per semplicità ci riferiremo al caso di un gas completamente ionizzato, composto di soli ioni positivi che indicheremo con l'indice 1, e di elettroni che indicheremo con l'indice 2. Indicheremo ancora con ν_1 e ν_2 i numeri densità, e con m_1, m_2 le masse molecolari.

Le densità degli ioni e degli elettroni saranno quindi

$$\rho_1 = \nu_1 m_1, \quad \rho_2 = \nu_2 m_2. \tag{7.13}$$

Così pure indicheremo con $\boldsymbol{V}_1$ e $\boldsymbol{V}_2$ le velocità degli ioni e degli elettroni e con $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ i loro valori medi.

Il numero densità ν del plasma, la sua densità di massa ρ e la velocità media $\boldsymbol{v}$ sono definiti dalle equazioni

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \qquad \rho = \rho_1 + \rho_2 \tag{7.14}$$

$$\rho \boldsymbol{v} = \rho_1 \boldsymbol{v}_1 + \rho_2 \boldsymbol{v}_2 \tag{7.15}$$

Le *velocità peculiari* $\boldsymbol{C}_1$ e $\boldsymbol{C}_2$ degli ioni e degli elettroni sono date da

$$\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{v} \tag{7.16}$$

e i loro valori medi sono

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}. \tag{7.17}$$

In virtù della (7.15) risulta

$$\rho_1 \boldsymbol{w}_1 + \rho_2 \boldsymbol{w}_2 = 0. \tag{7.18}$$

Se $f_1(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{r}, t)$, $f_2(\boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{r}, t)$ sono ora le funzioni di distribuzione delle velocità degli ioni e degli elettroni le corrispondenti equazioni di Boltzmann sono

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \operatorname{grad}_{\boldsymbol{r}} f_s \times \boldsymbol{V}_s + \operatorname{grad}_{\boldsymbol{V}_s} f_s \times \boldsymbol{F}_s = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{coll.}}, \quad (s = 1, 2) \tag{7.19}$$

dove $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_2$ rappresentano le forze riferite all'unità di massa agenti sugli ioni e sugli elettroni.

Se queste forze sono dovute a un campo gravitazionale $\boldsymbol{G}$, a un campo elettrico $\boldsymbol{E}$, e a un campo magnetico $\boldsymbol{B}$, si ha

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{G} + \frac{e_1}{m_1}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}_1 \wedge \boldsymbol{B}), \qquad \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{G} + \frac{e_2}{m_2}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}_2 \wedge \boldsymbol{B}), \tag{7.20}$$

essendo $e_1 = Ze$, $e_2 = -e$, le cariche portate rispettivamente da un ione e da un elettrone.

Moltiplichiamo ora ambo i membri dell'equazione (7.19) per una funzione $\Phi_s(\boldsymbol{V}_s)$, che esprime una proprietà molecolare delle due specie di particelle del plasma, che supponiamo indipendente da $\boldsymbol{r}$ e da t, e integriamo rispetto allo spazio delle velocità $\boldsymbol{V}_s$; supposto che tutti gli integrali convergano, otteniamo [1]

[1] Si osservi che $\dfrac{\partial F_{si}}{\partial V_{si}} = 0$, e quindi

$$\int \Phi_s \operatorname{grad}_{\boldsymbol{V}_s} f_s \times \boldsymbol{F}_s d\boldsymbol{V}_s = \sum_{i=1}^{3} \int \Phi_s \frac{\partial (f_s F_{si})}{\partial V_{si}} d\boldsymbol{V}_s = \sum_{i=1}^{3} \int \frac{\partial}{\partial V_{si}} (f_s \Phi_s F_{si}) d\boldsymbol{V}_s -$$

$$- \sum_{i=1}^{3} \int f_s F_{si} \frac{\partial \Phi_s}{\partial V_{si}} d\boldsymbol{V}_s = \sum_{i=1}^{3} (f_s \Phi_s F_{si}) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \sum_{i=1}^{3} \nu_s \overline{\frac{\partial \Phi_s}{\partial V_{si}} F_{si}} = - \sum_{i=1}^{3} \nu_s \overline{\frac{\partial \Phi_s}{\partial V_{si}} F_{si}},$$

poichè la f_s si annulla all'infinito.

$$(7.21) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\nu_s \overline{\Phi_s}) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu_s \overline{\Phi_s V_{si}}) - \sum_{i=1}^{3} \nu_s \overline{\frac{\partial \Phi_s}{\partial V_{si}} F_{si}} = \int \Phi_s \left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{coll.}} d\boldsymbol{V}_s$$

il cui secondo membro rappresenta la variazione del valore medio di Φ_s dovuta alle collisioni.

a) Se poniamo $\Phi_s = 1$, questo secondo membro risulta nullo, poichè il numero densità degli ioni e degli elettroni rimane invariato per collisioni, e si ha allora

$$(7.22) \qquad \frac{\partial \nu_s}{\partial t} + \operatorname{div}(\nu_s \boldsymbol{v}_s) = 0, \quad (s = 1, 2)$$

dove

$$\nu_s \boldsymbol{v}_s = \int \boldsymbol{V}_s f_s d\boldsymbol{V}_s$$

La (7.22) è l'equazione di continuità per ciascuno dei costituenti del gas. Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per m_s e sommando si ottiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

che è l'equazione di continuità della massa del plasma considerato nel suo insieme.

b) L'equazione del moto per ciascuno dei costituenti del plasma si ottiene ponendo nella (7.21) $\Phi_s = m_s \boldsymbol{V}_s$ e risulta [1]

$$(7.23) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s \boldsymbol{v}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s \boldsymbol{w}_s) + \operatorname{grad}[\rho_s \mathcal{H}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})] + \operatorname{grad}[\rho_s \mathcal{H}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_s)] + \operatorname{grad}[\rho_s \mathcal{H}(\boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{v})] + \operatorname{grad} P_s - \rho_s \boldsymbol{G} - \rho_{es}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_s \wedge \boldsymbol{B}) = \int m_s \boldsymbol{V}_s \left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{coll}} d\boldsymbol{V}_s$$

dove

$$P_s = \nu_s m_s \overline{\mathcal{H}(\boldsymbol{C}_s, \boldsymbol{C}_s)} = \rho_s \overline{\mathcal{H}(\boldsymbol{C}_s, \boldsymbol{C}_s)}$$

è l'omografia di pressione per le particelle di specie s^{ma}, inoltre $\rho_{es} = \nu_s e_s$ è la densità delle cariche e_s.

[1] Si osservi che si hanno i seguenti valori medi:

$$\overline{\Phi_s} = m_s \overline{\boldsymbol{V}_s} = m_s \boldsymbol{v}_s = m_s \boldsymbol{v} + m_s \boldsymbol{w}$$

$$\overline{\Phi_s \boldsymbol{V}_s} = m_s \overline{\mathcal{H}(\boldsymbol{V}_s, \boldsymbol{V}_s)} = m_s \mathcal{H}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + m_s \mathcal{H}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_s) + m_s \mathcal{H}(\boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{v}) + m_s \mathcal{H}\overline{(\boldsymbol{C}_s, \boldsymbol{C}_s)},$$

$$\sum_{i=1}^{3} \overline{\frac{\partial \Phi_s}{\partial V_{si}} F_{si}} = m_s \overline{\boldsymbol{F}_s} = m_s \boldsymbol{G} + e_s (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_s \wedge \boldsymbol{B}),$$

essendo $\overline{\mathcal{H}(\boldsymbol{C}_s, \boldsymbol{C}_s)}$ il valor medio della diade $\mathcal{H}(\boldsymbol{C}_s, \boldsymbol{C}_s)$.

Sviluppando i gradienti delle diadi, e tenendo conto dell'equazione di continuità (7.22), moltiplicata per m_s, l'equazione (7.23) si può scrivere

$$(7.24) \qquad \rho_s\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\boldsymbol{v}\right)+\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s\boldsymbol{w}_s)+\frac{d(\rho_s\boldsymbol{w}_s)}{d\boldsymbol{r}}\boldsymbol{v}+$$
$$+\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}(\rho_s\boldsymbol{w}_s)+\rho_s\boldsymbol{w}_s\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}+\mathrm{grad}\,P_s-$$
$$-\rho_s\boldsymbol{G}-\rho_{es}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_s\wedge\boldsymbol{B})=\int m_s\boldsymbol{V}_s\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{coll.}}d\boldsymbol{V}_s.$$

Sommando questa equazione per gli ioni e gli elettroni e osservando che la somma dei secondi membri è nulla, poichè la quantità di moto risultante degli ioni e degli elettroni resta inalterata per collisioni, con riguardo alla (7.18), si ottiene

$$(7.25) \qquad \rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\boldsymbol{v}\right)+\mathrm{grad}\;P-\rho\boldsymbol{G}-\rho_e\boldsymbol{E}-\boldsymbol{I}\wedge\boldsymbol{B}=0,\ (P=P_1+P_2).$$

che è l'equazione del moto d'insieme del plasma.

Ordinando opportunamente i termini dell'equazione (7.24) e tenendo conto dell'equazione di continuità (7.22), essa si può scrivere ancora nella forma

$$(7.26) \qquad \rho_s\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t}+\frac{d\boldsymbol{v}_s}{d\boldsymbol{r}}\boldsymbol{v}_s\right)+\mathrm{grad}\,P_s^*-\rho_s\boldsymbol{G}-$$
$$-\rho_{es}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_s\wedge\boldsymbol{B})=\int m_s\boldsymbol{V}_s\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{coll.}}d\boldsymbol{V}_s$$

dove $P_s^*=P_s-\rho_s\mathcal{H}(\boldsymbol{w}_s,\ \boldsymbol{w}_s)$ è il tensore, o l'omografia, della *pressione relativa*.

La (7.26) si può considerare l'equazione del moto di una particella riferita alla locale velocità media $\boldsymbol{v}_s$ della stessa particella.

Un'esatta valutazione dei termini di collisione del secondo membro della (7.26) può essere effettuata soltanto considerando in modo dettagliato il fenomeno di collisione. Ma la questione si presenta molto complicata. Tuttavia una valutazione approssimata può essere ottenuta mediante la considerazione del *tempo di rilassamento* τ, che corrisponde al tempo medio fra due successive collissioni di un elettrone con un ione. In tal caso si può scrivere

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{coll.}}=\frac{f_s^{(0)}-f_s}{\tau},$$

dove $f_s^{(0)}$ è la funzione di distribuzione maxwelliana delle velocità per ciascun costituente del plasma. Allora, con calcoli che per brevità non riportiamo, si trova in via approssimata,

$$\int m_s V_s \left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{coll.}} d\boldsymbol{V}_s = \mp \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho \tau} (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2),$$

dove nel secondo membro va preso il segno $-$ per gli ioni ($s=1$), e il segno $+$ per gli elettroni ($s=2$). L'equazione (7.26) diventa pertanto

$$\rho_s \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{v}_s}{d\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v}_s\right) + \operatorname{grad} P_s^* - \rho_s \boldsymbol{G} - \tag{7.27}$$

$$- \rho_{es}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_s \wedge \boldsymbol{B}) = \mp \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho \tau} (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2), \quad (s = 1,\ 2)$$

L'equazione (7.27) è l'equazione del moto di un ione o di un elettrone in un gas completamente ionizzato, ed essa è fondamentale in questa teoria.

6. Corrente elettrica in un plasma.

Per finire è opportuno considerare ancora la densità di corrente in un plasma, che in virtù della (7.9) è definita dalla

$$\boldsymbol{I} = e(Z\nu_1 \boldsymbol{v}_1 - \nu_2 \boldsymbol{v}_2) \tag{7.28}$$

dove e è la carica di un elettrone (in valore assoluto), e Ze è la carica di un ione positivo.

Introducendo la *densità di carica* ρ_e di un gas, definita dalla relazione

$$\rho_e = (Z\nu_1 - \nu_2)e \tag{7.29}$$

e utilizzando le equazioni (7,17), la (7.28) si può scrivere

$$\boldsymbol{I} = \rho_e \boldsymbol{v} + \boldsymbol{i}, \quad \text{con } \boldsymbol{i} = e(\nu_1 Z \boldsymbol{w}_1 - \nu_2 \boldsymbol{w}_2) \tag{7.30}$$

Avendo riguardo alla (7.18) si trova

$$\boldsymbol{i} \cong e \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \left(\frac{Z}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$$

e si riconosce, in base all'equazione (7.27), che una corrente elettrica può essere prodotta da forze esterne (come ad esempio un campo elettromagnetico), dal gradiente di pressione e dall'inerzia delle cariche.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica*, (in corso di pubblicazione nelle Monografie del Consiglio Nazionale delle Ricerche).

[2] H. ALFVÉN, *Cosmical electrodynamics*, (Oxford Univ. Press., 1950).

[3] G. ARMELLINI, *I fondamenti scientifici dell'Astrofisica*, (Hoepli, Milano, 1953).

[4] G. R. BATCHELOR, *The theory of Homogeneous turbulence*, (Cambridge Univ. Press. 1953).

[5] D. BERSHADER. *The Magnetodynamics of conducting fluids*, (Stanford Univ. Press, 1959).

[6] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability*, (Oxford ad the Claredon Press. 1961).

[7] — —. *Plasma Physics*, (Chicago Univ. Press, 1962).

[8] S. CHAPMANN - T G. COWLING, *The mathematical theory of non uniform Gases* (Cambridge Univ Press, 2ª ed. 1952).

[9] F H. CLAUSER, *Plasma dynamics*. (Addison, Wesley Publ. Comp. Inc. 1960).

[10] T. G. COWLING, *Magnetohydrodynamics*, (Interscience Publ. Inc. New York, 1957).

[11] J. W. DUNGEY. *Cosmic electrodynamics*, (Cambridge Univ. Prees. 1958).

[12] V. C. A. FERRARO - C. PLUMPTON, *Magnetofluid-Mechanics*. (Oxford, Univ. Press, 1961).

[13] F. N. FRENKIEL - W.R. SEARS, *Magnetofluid Dynamics*, Proceedings of a Symposium held in Williamsburg, Virginia and Washington, 1960 (Nat. Academy of Sciences).

[14] R. K. M. LANDSHOFF, *A Simposium on Magnetohydrodynamics*, (Stanford Univ. Press. 1957).

[15] — —, *The plasma in a Magnetic field*. (Stanford Univ. Press. 1958).

[16] C. C. LIN. *The theory of Hydrodynamic stability*, (Cambridge Univ. Press, 1955).

[17] J. G. LINHART (C. E. R. N.), *Plasma Physics*, (North Holland Publ. Comp. 1961).

[18] R. OSWATITSCH, *Gas dynamics*, (Academic Press Inc. Publ., 1956).

[19] SHIH - I - PAI, *Magnetogasdynamics and Plasma Dynamics*, (Wien Springer-Verlag. 1962).

[20] L. SPITZER JR, *Physics of fully ionized gases*. (Interscience Publ. Inc. 19 6).

[21] C. STÖRMER. *The polar Aurora*, Oxford Univ Press, 1955).

[22] *Atti del Simposio sulla Magnetofluidodinamica*. (Bari 10-14 gennaio 1961. ed. Cremonese Roma).

[23] *Magnetofluidodinamica*, (C. I. M. E. 3° ciclo Varenna 28 settem. - 6 ottobre 1962 ed Cremonese Roma).

Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I.
il 23 dicembre 1964