Bollettino
Unione Matematica Italiana

Aldo Rollero

Sulla moltiplicità di intersezione di due rami di curve piane.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.1, p. 114–119.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_1_114_0>

Sulla moltiplicità di intersezione di due rami di curve piane

Nota (*) di ALDO ROLLERO

Sunto. - *Si presentano alcuni accorgimenti per il calcolo della moltiplicità di intersezione di due rami curvilinei piani irriducibili aventi in comune l'origine e la tangente.*

1. - Il calcolo della moltiplicità di intersezione di due rami curvilinei piani irriducibili aventi in comune l'origine e la tangente è spesso assai laborioso ([1]); in questa breve nota indico alcuni accorgimenti che conducono ad una regola semplice, di rapido uso, e valida in ogni caso.

2. - Siano dati nel piano x, y due rami curvilinei, distinti, irriducibili, E, E' degli ordini s, $s'(1 \leq s \leq s')$, aventi a comune l'origine $O(0, 0)$ ed aventi entrambi come tangente in O la retta $y = 0$. Gli sviluppi di PUISEUX di E, E' siano:

$$E: \quad \begin{cases} x = t^s \\ y = t^{qs+r}(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots) \end{cases}$$

$$E': \quad \begin{cases} x = \tau^{s'} \\ y = \tau^{q's'+r'}(\beta_0 + \beta_1 \tau + \beta_2 \tau^2 + \dots) \end{cases}$$

$$(q \geq 1, \quad 0 \leq r \leq s - 1, \quad s(q-1) + r > 0, \quad \alpha_0 \neq 0;$$

$$q' > 1, \quad 0 \leq r' \leq s' - 1, \quad s'(q'-1) + r' > 0, \quad \beta_0 \neq 0).$$

Interpretate t, τ come coordinate cartesiane in un piano, la

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

([1]) Cfr. F. ENRIQUES-O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. II, Zanichelli, Bologna, 1918, Libro IV, Cap. I, n. 6, pagg. 352-361.

moltiplicità μ di intersezione in O di E, E' coincide con la moltiplicità di intersezione in $\bar{O}(t = \tau = 0)$ delle due linee L, L'

$$L: \qquad t^s - \tau^{s'} = 0$$

$$L': \qquad t^{qs+r}(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots) - \tau^{q's'+r'}(\beta_0 + \beta_1 \tau + \beta_2 \tau^2 + \dots) = 0,$$

ed è pertanto somma delle moltiplicità di intersezione in $\bar{O}$ di L' con le singole componenti irriducibili di L: tali componenti, posto $D(s, s') = \delta$ [2], $s = \delta\sigma$, $s' = \delta\sigma'(1 \leq \sigma < \sigma')$, hanno equazioni

$$(1) \qquad t^\sigma = \varepsilon_m \tau^{\sigma'} \qquad (m = 0, 1, \dots, \delta - 1)$$

con ε_m radice δ-esima dell'unità. Assunta per la (1) la rappresentazione parametrica

$$(2) \qquad t = \eta_m u^{\sigma'}, \quad \tau = u^\sigma$$

ove η_m è una delle σ radici σ-esime di ε_m fissata in modo arbitrario [3], si indichi con θ_m il grado [4] della serie formale di potenze della u:

$$(3) \qquad \eta_m^r u^{\sigma'(qs+r)} \sum_0^\infty{}_j \alpha_j \eta_m^j u^{j\sigma'} - u^{\sigma(q's'+r')} \sum_0^\infty{}_k \beta_k u^{k\sigma}$$

ottenuta sostituendo a t, τ, nel primo membro dell'equazione di L', i secondi membri delle (2); risulta

$$\mu = \sum_1^\delta{}_m \theta_m.$$

Si ha pertanto la seguente *regola per il calcolo di* μ:

a) *se* $s'(qs + r) \neq s(q's' + r')$, μ *è eguale al minore dei numeri* $s'(qs + r)$, $s(q's' + r')$:

(2) Con $D(s, s')$ s'indica il massimo comun divisore di s, s'.

(3) η_m risulta radice s-esima dell'unità; nel seguito di questo n. si sceglierà $\eta_m = e^{\frac{2m\pi}{s} i}$.

(4) Come si ricorderà, per grado di una serie formale di potenze della u si intende l'esponente del termine di grado minimo in u che figura effettivamente nella serie.

b) se $s'(qs+r)=s(q's'+r')$ è

$$\mu = s(q's'+r') + \sum_{1}^{\delta}{}_m \rho_m$$

essendo ρ_m *il grado della serie di potenze della* u

$$S_m = \sum_{0}^{\infty}{}_j \alpha_j e^{\frac{2m(r+j)\pi}{s} i} u^{j\sigma'} - \sum_{0}^{\infty}{}_k \beta_k u^{k\sigma}$$

$$(m = 0, 1, \ldots, \delta - 1 ; \quad i^2 = -1).$$

Questa regola riesce particolarmente semplice nel caso in cui sia $\delta = 1$.

Il calcolo di ρ_m, riferendoci sempre al caso *b)*, può in pratica effettuarsi molto rapidamente nel modo seguente:

in un piano cartesiano si considerino le due successioni di punti

$$\left(\alpha_0 e^{\frac{2mr\pi}{s} i}, 0\right), \left(\alpha_1 e^{\frac{2m(r+1)\pi}{s} i}, \sigma'\right), \ldots, \left(\alpha_j e^{\frac{2m(r+j)\pi}{s} i}, j\sigma'\right), \ldots$$

e

$$(\beta_0, 0), (\beta_1, \sigma), \ldots, (\beta_k, k\sigma), \ldots$$

e si cancellino, in entrambe, i punti ad esse comuni ed i punti di ascissa nulla: l'ordinata minima dei punti che restano è eguale a ρ_m. *Naturalmente questa operazione deve essere ripetuta* δ *volte* $(m = 0, 1, \ldots, \delta - 1)$.

3. - A complemento di quanto esposto al n. 2 si osservi che:

I) Per $s > 1$, dall'ipotesi che l'ordine di E sia effettivamente s, e non un intero $\bar{s}\,(1 < \bar{s} < s)$ divisore di s, segue: se è $r = 0$ deve essere diversa da zero almeno una delle α_k con k primo con s, oppure, nel caso in cui siano nulle tutte le α_k con k primo con s, devono essere diverse da zero almeno due $\alpha_h (\alpha_{h_1}, \alpha_{h_2})$ i cui indici (h_1, h_2) siano primi fra loro; se è $r > 0$ e $D(r, s) = \xi > 1$ deve essere diversa da zero almeno una delle α_k con k primo con ξ, oppure, nel caso in cui siano nulle tutte le α_k con k primo con ξ, devono essere diverse da zero almeno due $\alpha_h (\alpha_{h_1}, \alpha_{h_2})$ i cui indici (h_1, h_2) siano primi fra loro. Analoghe condizioni, se

$s' > 1$, seguono per le β_k dall'ipotesi che E' sia effettivamente d'ordine s', nei casi in cui sia $r' = 0$ o $r' > 0$ e $D(r', s') > 1$.

Inoltre, nel caso in cui sia $s = s'$, $q = q'$, $r = r'$, dall'ipotesi che E, E' siano *distinti* segue che per ogni radice s-esima dell'unità ε_m $(m = 0, 1, \ldots, s-1)$ deve sempre potersi trovare un intero $h_1 \geq 0$ per cui risulti $\alpha_{h_1} - \varepsilon_m^{r+h_1} \beta_{h_1} \neq 0$, ed un intero $h_2 \geq 0$ per cui risulti $\varepsilon_m^{r+h_2} \alpha_{h_2} - \beta_{h_2} \neq 0$.

II) *Nessuna delle serie* (3) *può essere* $\equiv 0$. La cosa è senz'altro ovvia nel caso $s = 1$ o nel caso $s'(qs + r) \neq s(q's' + r')$. Poniamoci dunque nel caso in cui sia $s > 1$ e

$$s'(qs + r) = s(q's' + r'). \tag{4}$$

Se è $s = s'$, dalla (4) segue $q = q'$, $r = r'$: il supporre che una delle serie (3) sia $\equiv 0$ è in contrasto con l'ipotesi che E, E' siano distinti. Se poi è $s < s'$, $D(s, s') = 1$, dalla (4) segue $q = q'$, $r = r' = 0$: il supporre che una delle serie (3) sia $\equiv 0$ è in contrasto con l'ipotesi che E sia di grado s. Infine se

$$s < s', \ D(s, s') = \delta > 1 \ (1 \leq \sigma < \sigma'),$$

dalla (4) segue

$$q = q', \ r = \sigma\zeta, \ r' = \sigma'\zeta \ (\text{con } \zeta < \delta);$$

da considerazioni analoghe alle precedenti segue che anche adesso nessuna delle serie (3) può essere $\equiv 0$.

III) *Tutte le serie* (3) *che provengono da uno stesso valore di* m $(m = 0, 1, \ldots, \delta - 1)$ *hanno lo stesso grado, qualunque sia la radice* η_m σ*-esima di* ε_m (ε_m *radice* δ*-esima dell'unità*) *che in esse figura.* La cosa è senz'altro ovvia per $s'(qs + r) \neq s(q's' + r')$, mentre la questione non si pone per $\sigma = 1$. Supponiamo dunque che valga la (4) e sia $\sigma > 1$; poichè è $D(\sigma, \sigma') = 1$ risulta $r = \sigma\zeta$ $(\zeta \geq 0)$. Tenuto presente ciò si verifica facilmente che, affinchè la (3) abbia un grado assegnato, devono sussistere certe relazioni che coinvolgono alcune delle α_i, alcune delle β_i ed ε_m: in altri termini, fissato m (e quindi ε_m), tali relazioni non mutano al variare di η_m nell'insieme delle radici σ-esime di ε_m.

4. - Ecco ora alcuni esempi numerici di calcolo della molteplicità μ di intersezione in O di due rami irriducibili, distinti, E, E' con la stessa origine $O(0, 0)$ e la stessa tangente $(y = 0)$

in O, partendo dalle loro rappresentazioni parametriche di PUISEUX; tali esempi rientrano naturalmente tutti nel caso b) considerato al n. 2.

I)

$$E: \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^6(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \dots) \end{cases}$$

$$E': \quad \begin{cases} x = \tau^6 \\ y = \tau^{18}(1 + \tau^3 + \tau^6 + \tau^9 + \tau^{10} + \dots). \end{cases}$$

Si ha

$$s = 2,\ s' = 6,\ \delta = 2,\ \sigma = 1,\ \sigma' = 3,\ r = 0.$$

Si valutino ρ_0, ρ_1 seguendo ad es. la regola data in fondo al n. 2. Per $m = 0$ le due successioni di punti che intervengono sono

$$(1,0),\ (1,3),\ (1,6),\ (1,9),\ (1,12),\ \dots$$

$$(1,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (1,3),\ (0,4),\ (0,5),\ (1,6),\ (0,7),\ (0,8),\ (1,9),\ (1,10),\dots$$

mentre per $m = 1$ dette successioni si scrivono

$$(1,0),\ (-1,\ 3),\ \dots$$

$$(1,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (1,3),\ \dots$$

Risulta dunque $\rho_0 = 10$, $\rho_1 = 3$; pertanto è $\mu = 49$.

II)

$$E: \quad \begin{cases} x = t^7 \\ y = t^{21}(1 + t^7 + 2t^{14} + 3t^{17} + \dots) \end{cases}$$

$$E': \quad \begin{cases} x = \tau^9 \\ y = \tau^{27}(1 + \tau^9 + 2\tau^{18} + 4\tau^{19} + \dots) \end{cases}$$

$$s = 7,\ s' = 9,\ \delta = 1,\ \sigma = 7,\ \sigma' = 9,\ r = 0.$$

$$\rho_0 = 133,\ \mu = 322.$$

III)

$$F: \quad \begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{16}(1 + t^6 + 2t^7 + \dots) \end{cases}$$

$$E': \quad \begin{cases} x = \tau^5 \\ y = \tau^{16}(1 + \tau^6 + 3\tau^7 + \dots) \end{cases}$$

$$s = s' = 5, \; \delta = 5, \; \sigma = \sigma' = 1, \; r = 1,$$

$$\rho_0 = 7, \; \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0, \quad \mu = 87.$$

IV)

$$E: \quad \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^{15}(1 + t^3 + t^4 + \dots) \end{cases}$$

$$E': \quad \begin{cases} x = \tau^8 \\ y = \tau^{20}(-1 + \tau^4 + 2\tau^5 + \dots) \end{cases}$$

$$s = 6, \; s' = 8, \; \delta = 2, \; \sigma = 3, \; \sigma' = 4, \; r = 3,$$

$$\rho_0 = 0, \; \rho_1 = 15, \; \mu = 135.$$

V)

$$E: \quad \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^{14}\left(e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{3}i}t^2 + 2t^4 + t^5 + \dots\right) \end{cases}$$

$$E': \quad \begin{cases} x = \tau^{15} \\ y = \tau^{35}(1 - \tau^5 + 2\tau^{10} - \tau^{11} + \dots) \end{cases}$$

$$s = 6, \; s' = 15, \; \delta = 3, \; \sigma = 2, \; \sigma' = 5, \; r = 2,$$

$$\rho_0 = \rho_1 = 0, \; \rho_2 = 22, \quad \mu = 232.$$

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
l'11 dicembre 1964