BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANGELO CAVALLUCCI

Sulle proprietà differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche relativamente a domini normali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.4, p. 465–477.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_4_465_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Sulle proprietà differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche relativamente a domini normali

Nota di ANGELO CAVALLUCCI (a Bologna) (*) (**)

Sunto. - *Sia R^n lo spazio reale euclideo n-dimensionale, sia ρ un numero reale positivo e sia $I_\rho = \{ x \mid x \in R^n, |x_j| < \rho \text{ per } 1 \leq j \leq n-1,\ 0 < x_n < \rho \}$ In una Nota precedente si è provato che ogni soluzione ordinaria u dell'equazione quasi-ellittica $P(x, D)u = f$ in I_ρ appartiene alla classe di Gevrey, associata all'equazione, $G_q(\bar{I}_\sigma)$, $0 < \sigma < \rho$, se i dati della equazione e le tracce, sul piano $x_n = 0$, di u e di un certo numero di sue derivate appartengono alla classe $G_q(\bar{I}_\rho)$.*

Pini ha introdotto i domini normali per certi operatori quasi-ellittici e ha studiato su questi un problema tipico estendendo i risultati noti, per lo stesso problema, nel caso di domini rettangolari.

Qui si determinano le superfici normali (parti della frontiera di un dominio normale) per il caso $n > 2$ e si estende il risultato enunciato sopra al caso di un intervallo avente per facce superfici normali.

1. - **Preliminari.** - Indichiamo con $x = (x_1, \dots x_n)$ i punti di R^n, con $e^{(j)} \equiv (0, \dots, 1, \dots, 0)$ il versore dell'asse x_j, con α e β punti di R^n a coordinate intere non negative e facciamo le seguenti convenzioni

$$x^{(j)} = x - x_j e^{(j)},\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},\ (x, y) = \sum_1^n{}_j x_j y_j,\quad |x| = (x, x)^{1/2}.$$

Se $Q(y)$ è un polinomio complesso, $y \in R^n$, indichiamo con $Q(D)$ l'operatore differenziale ottenuto sostituendo, in $Q(y)$, y_j con $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$. L'operatore $Q(D)$ (il polinomio $Q(y)$) si dice ipoellittico se ogni distribuzione u su R^n verificante la condizione $Q(D)u = 0$ coincide quasi ovunque con una funzione differenziabile infinite volte. HÖRMANDER [4] ha dato la seguente carat-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 2 del Comitato per la Matematica del C N.R. per l'anno 1964-65.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 27 novembre 1964.

terizzazione della ipoellitticità di $Q(y)$

$$(1) \qquad x,\ y \in R^n,\ Q(x+iy)=0,\quad |x|^2+|y|^2 \to \infty \Rightarrow |y| \to \infty.$$

Osserviamo ora che vale il seguente risultato, deducibile facilmente dal teorema dell'indicatore logaritmico,

Lemma 1. - *Sia Ω un aperto in R^n sul quale sono date le funzioni complesse $f_0, \ldots, f_p$. Se f_j è continua su Ω per $0 \leq j \leq p$, se $f_p(x) \neq 0$ per $x \in \Omega$ e se il polinomio in ζ*

$$p(x,\zeta) = \sum_{0}^{p}{}_j f_j(x)\zeta^j$$

è privo di radici reali per ogni x, allora il numero $p^+(x)$ di radici di $p(x,\zeta)=0$ con $\operatorname{Im}\zeta > 0$ è una funzione continua su Ω.

Supposto il polinomio $Q(y)$ ipoellittico e di grado m_j rispetto a y_j, dalla (1) segue che l'equazione in ζ

$$Q(y^{(j)} + \zeta e^{(j)}) = 0, \qquad 1 \leq j \leq n,$$

è priva di radici reali per $|y^{(j)}| \to \infty$. Inoltre è noto [5] che il coefficiente della massima potenza di ζ non dipende da $y^{(j)}$. Allora si può applicare il Lemma 1 per affermare che esiste un numero reale $K > 0$ tale che per $|y^{(j)}| > K$ è costante il numero $m_j^+(y^{(j)})$ di radici con $\operatorname{Im}\zeta > 0$ (si è supposto $n > 2$). Questo numero si indicherà sempre in seguito con m_j^+ e si dirà *indice rispetto a y_j* del polinomio $Q(y)$.

Se $m_1, \ldots, m_n$ sono interi positivi con $m_1 \leq \ldots \leq m_n = m$, poniamo $q = (m/m_1, \ldots, m/m_n)$ e consideriamo i polinomi del tipo (le a_α sono costanti complesse)

$$(2) \qquad P(y) = \sum_{(\alpha,q) \leq m} a_\alpha y^\alpha.$$

Posto

$$(3) \qquad P_0(y) = \sum_{(\alpha,q) = m} a_\alpha y^\alpha,$$

diciamo che $P(y)$ è *quasi-ellittico* se vale la condizione

$$(4) \qquad 0 \neq y \in R^n \Rightarrow P_0(y) \neq 0.$$

LEMMA 2. - *Se $P(y)$ è quasi-ellittico, gli indici rispetto a y_j di $P(y)$ e di $P_0(y)$ sono uguali per $1 \leq j \leq n$.*

Dalla condizione (4) segue che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$| P_0(y) | \geq C \sum_1^n{}_j | y_j |^{m_j}$$

per ogni $y \in R^n$. Si ha poi

$$(\alpha, q) < m \Rightarrow | y^\alpha | / (\sum_1^n{}_j | y_j |^{m_j}) \xrightarrow[|y| \to \infty]{} 0$$

e quindi

$$| P(y) - P_0(y) | / (\sum_1^n{}_j | y_j |^{m_j}) \xrightarrow[|y| \to \infty]{} 0.$$

Da questo segue che esiste un $L > 0$ per cui riesce, per $| y | \geq L$,

$$| P(y) - P_0(y) | < \frac{C}{2} \sum_1^n{}_j | y_j |^{m_j} \leq \frac{1}{2} | P_0(y) | . \tag{5}$$

Dalla (4) segue che $P(y)$ è ipoellittico [4], dunque possiamo prendere L in modo che riesca inoltre, per ζ complesso,

$$| y^{(j)} | \geq L, \quad P(y^{(j)} + \zeta e^{(j)}) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \zeta \neq 0.$$

Allora, se fissiamo $\bar{y}^{(j)}$ tale che $| \bar{y}^{(j)} | \geq L$, vale ancora la (5) con $y = \bar{y}^{(j)} + s e^{(j)}$, per ogni s reale. Osserviamo ora che il polinomio $P(\bar{y}^{(j)} + \zeta e^{(j)}) - P_0(\bar{y}^{(j)} + \zeta e^{(j)})$ ha grado, rispetto a ζ, minore di m_j e quindi esiste un $L' > 0$ tale che

$$| \zeta | \geq L' \Rightarrow | P(\bar{y}^{(j)} + \zeta e^{(j)}) - P_0(\bar{y}^{(j)} + \zeta e^{(j)}) | \leq \leq \frac{1}{2} | P_0(\bar{y}^{(j)} + \zeta e^{(j)}) | \tag{6}$$

e si può supporre che riesca anche $P_0(\bar{y}^{(j)} + \zeta e^{(j)}) \neq 0$ per $|\zeta| \geq L'$.

Ora la nostra affermazione si ottiene da (5) e (6) applicando il teorema di ROUCHÉ al dominio $T = \{\zeta \mid \mathrm{Im}\,\zeta \geq 0,\ |\zeta| \leq L'\}$ e osservando che il numero di radici con $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$ di $P_0(y^{(j)} + \zeta e^{(j)}) = 0$ è costante per $y^{(j)} \neq 0$.

2. - Trasformazioni lineari stabili.

Consideriamo la trasformazione lineare invertibile (reale) di R^n in se' definita da

$$x'_j = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{7}$$

e il polinomio trasformato di $P(y)$, mediante la (7), dato da

$$P'(y) = \sum_{(\alpha, q) \leq m} a_\alpha \left(\sum_1^n {}_j a_{j1} y_j\right)^{\alpha_1} \dots \left(\sum_1^n {}_j a_{jn} y_j\right)^{\alpha_n}. \tag{8}$$

Se $P(y)$ è ipoellittico, anche $P'(y)$ è ipoellittico. Pertanto possiamo dare la seguente definizione per il polinomio quasi-ellittico $P(y)$.

DEFINIZIONE I. - *La trasformazione* (7) *si dice stabile se* $P(y)$ *e* $P'(y)$ *hanno lo stesso grado e lo stesso indice rispetto a ogni variabile.*

Per caratterizzare le trasformazioni stabili proviamo alcuni lemmi.

LEMMA 3. - *Sia* $P(y)$ *quasi-ellittico. Allora, se* $P(y)$ *e* $P'(y)$ *hanno lo stesso grado rispetto a ogni variabile, si ha per* $1 \leq i,\ j \leq n$

$$m_i < m_j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Per $n = 1$, la nostra affermazione è evidente (il lemma vale per $n \geq 1$).

Lo stesso se $m_i = m_n$. Supponiamo quindi $m_i \leq \dots \leq m_r < m_{r+1} = \dots = m_n$. Dalla (8) si ottiene, per s reale,

$$P'(se^{(i)}) = \sum_{k \leq m_n} s^k \sum_{\substack{\frac{\alpha_1}{m_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{m_n} \leq 1 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} a_\alpha a_{i1}^{\alpha_1} \dots a_{in}^{\alpha_n} \tag{9}$$

Il grado di $P'(se^{(i)})$ deve essere $m_i < m_n$ e quindi deve essere

$$\sum_{\substack{\frac{\alpha_1}{m_1}+\dots+\frac{\alpha_n}{m_n}\leq 1\\ \alpha_1+\dots+\alpha_n=m_n}} a_\alpha a_{i1}^{\alpha_1}\dots a_{in}^{\alpha_n}=0.$$

Si ha ora

$$\sum_1^n{}_j\alpha_j/m_j\leq 1,\ \sum_1^n{}_j\alpha_j=m_n \Rightarrow \sum_1^n{}_j\alpha_j/m_j\leq 1=\sum_1^n{}_j\alpha_j/m_n \Rightarrow$$

$$0\leq\sum_1^n{}_j\alpha_j(1/m_j-1/m_n)\leq 0 \Rightarrow \alpha_1=\dots=\alpha_r=0,\ \alpha_{r+1}+\dots+\alpha_n=m_n.$$

Da questo segue che deve essere $P_0(0,\dots,0,a_{i,r+1},\dots,a_{in})=0$, e quindi, per (4), $a_{ij}=0$ per $r+1\leq j\leq n$. Allora si ha

$$P'(se^{(i)})=\sum_{k<m_n} s^k \sum_{\substack{\frac{\alpha_1}{m_1}+\dots+\frac{\alpha_r}{m_r}\leq 1\\ \alpha_1+\dots+\alpha_r=k}} \bar a_\alpha a_{i1}^{\alpha_1}\dots a_{ir}^{\alpha_r}$$

con $\bar a_\alpha=a_\alpha$ se $\alpha_{r+1}=\dots=\alpha_n=0$, $\bar a_\alpha=0$ in caso contrario.

Il grado di $P'(se^{(i)})$ non supera m_r, poichè da $k>m_r$ segue

$$\sum_1^r{}_j\alpha_j/m_j\leq 1<\sum_1^r{}_j\alpha_j/m_r \Rightarrow 0\leq\sum_1^r{}_j\alpha_j(1/m_j-1/m_r)<0$$

e ciò è assurdo. Dunque

$$P'(se^{(i)})=\sum_{k\leq m_r} s^k \sum_{\substack{\frac{\alpha_1}{m_1}+\dots+\frac{\alpha_r}{m_r}\leq 1\\ \alpha_1+\dots+\alpha_r=k}} \bar a_\alpha a_{i1}^{\alpha_1}\dots a_{ir}^{\alpha_r}. \tag{9'}$$

A questo punto possiamo ripetere il ragionamento fatto sopra sostituendo ovunque r al posto di n e la (9') al posto della (9). Siccome è $r<n$, il lemma si può considerare provato per induzione.

LEMMA 4. – *Se valgono le ipotesi del Lemma 3, $P'(y)$ è quasi-ellittico e si ha, ponendo $\varepsilon_{ij}=0$ se $m_i \neq m_j$, $\varepsilon_{ij}=1$, se $m_i = m_j$,*

$$P'_0(y) = P_0(\sum_{1}^{n}{}_j \bar{a}_{j1}y_j, \ldots, \sum_{1}^{n}{}_j \bar{a}_{jn}y_j), \quad \bar{a}_{ij} = \varepsilon_{ij}a_{ij}. \tag{10}$$

Nell'espressione (8) di $P'(y)$ riesce $a_{ij}=0$ per $m_i < m_j$. Lo sviluppo di $(\sum_{1}^{n}{}_j a_{ji}y_j)^{\alpha_i}$ è una somma di termini del tipo

$$(a_{1i}y_1)^{\beta_{1i}}(a_{2i}y_2)^{\beta_{2i}} \ldots (a_{ni}y_n)^{\beta_{ni}},$$

a meno di una costante moltiplicativa, con i β_{ji} interi non negativi e tali che

$$\beta_{1i} + \ldots + \beta_{ni} = \alpha_i, \quad \beta_{ji} = 0 \quad \text{se} \quad a_{ji} = 0. \tag{11}$$

Da questo segue che $P'(y)$ è una somma di termini del tipo

$$\text{cost. } y_1^{\beta_{11}+\ldots+\beta_{1n}} y_2^{\beta_{21}+\ldots+\beta_{2n}} \ldots y_n^{\beta_{n1}+\ldots+\beta_{nn}}.$$

In $P_0'(y)$ figurano tutti e soli i termini tali che

$$(\sum_{1}^{n}{}_i\beta_{1i})/m_1 + (\sum_{1}^{n}{}_i\beta_{2i})/m_2 + \ldots + (\sum_{1}^{n}{}_i\beta_{ni})/m_n = 1.$$

Allora, utilizzando la (11), si ha

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij}\beta_{ji}/m_j = 1 \geq \sum_{1}^{n}{}_i \alpha_i = \sum_{1}^{n}{}_{ij}\beta_{ji}/m_i \Rightarrow$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij}\beta_{ji}(1/m_i - 1/m_j) \leq 0. \tag{12}$$

Ora da $1/m_i < 1/m_j$ segue $m_j < m_i$ e quindi, per (11), $\beta_{ji}=0$. Dunque la somma (12) coincide con la somma

$$\sum_{\substack{ij \\ m_i \leq m_j}} \beta_{ji}(1/m_i - 1/m_j)$$

e questa è ≥ 0. Allora la somma (12) deve essere nulla e ciò implica

$$\alpha_1/m_1 + \dots + \alpha_n/m_n = 1, \quad \beta_{ji} = 0 \text{ per } m_j \neq m_i .$$

Questo prova la (10). La dimostrazione si completa osservando che, per (10), si ha $P_0'(y) = 0 \Rightarrow \sum_{1}^{n}{}_j \bar{a}_{ji} y_j = 0$, $1 \leq i \leq n$, e quindi (*) $y_1 = \dots = y_n = 0$.

Osservazione. - Se $m_i < m_j \Rightarrow a_{ij} = 0$, allora $P(y)$ e $P'(y)$ hanno uguale grado rispetto a ogni variabile. Ragioniamo sulla prima Segue dal Lemma 4 (dimostrato sfruttando solo la tesi del Lemma 3)

$$P_0'(se^{(1)}) = \sum_{(\alpha, q) = m} a_\alpha \bar{a}_{11}^{\alpha_1} \bar{a}_{12}^{\alpha_2} \dots \bar{a}_{1n}^{\alpha_n} s^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} .$$

Sia $m_1 = \dots = m_r < m_{r+1} \leq \dots \leq m_n$. Allora si ha $\bar{a}_{1j} = 0$ per $j > r$ e quindi

$$P_0'(se^{(1)}) = s^{m_1} P_0(a_{11}, \dots, a_{1r}, 0, \dots, 0).$$

Si conclude osservando che i numeri $a_{11}, \dots, a_{1r}$ non sono tutti nulli, poichè la (7) è invertibile.

Lemma 5. - *Sia dato il polinomio quasi-ellittico (ellittico)*

$$Q(y_1, y_2) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = p} a_\alpha y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2}.$$

Se riesce $p_1^+(-1) = p_1^+(1)$, *allora* p *è pari e si ha*

$$p_1^+(y_2) = p/2 = p_2^+(y_1) \quad \textit{per} \quad y_1 \neq 0 \neq y_2 .$$

Ricordiamo (vedere n. 1) che $p_1^+(y_2)$ è il numero di radici con $\operatorname{Im} \zeta > 0$ di $Q(\zeta, y_2) = 0$; per $p_2^+(y_1)$ vale una definizione analoga. Per il Lemma 1, basterà provare che

$$p_2^+(-1) = p_2^+(1) = p_1^+(1) = p/2.$$

(*) Si ha $\det \| \bar{a}_{ij} \| = \det \| a_{ij} \| \neq 0$.

Dall'omogeneità di Q segue

$$Q(\zeta, -1) = (-1)^p Q(-\zeta, 1), \quad Q(\zeta, 1) = \zeta^p Q(1, 1/\zeta) \quad \text{per} \quad \zeta \neq 0$$

e quindi si ha

$$Q(\zeta, -1) = 0 \Longleftrightarrow Q(-\zeta, 1) = 0, \; Q(\zeta, \pm 1) = 0 \Longleftrightarrow Q(\pm 1, 1/\zeta) = 0.$$

Da queste relazioni segue facilmente che

$$p_1^+(-1) = p - p_1^+(1), \quad p_1^+(\pm 1) = p - p_2^+(\mp 1)$$

e di qui la tesi.

Osserviamo che l'ipotesi del Lemma 5 è sempre soddisfatta se $Q(y_1, y_2)$ è la restrizione su R^2 di un polinomio quasi-ellittico di tipo (3) definito su R^n con $n > 2$; questo è conseguenza del Lemma 1.

TEOREMA 1. - *La trasformazione invertibile* (7) *è stabile per il polinomio quasi-ellittico* $P(y)$ *se e solo se vale la relazione*

$$m_i < m_j \Rightarrow a_{ij} = 0 \tag{13}$$

con l'aggiunta dell'ulteriore condizione: $a_{ii} > 0$ *se è* $m_i \neq m_j$ *per* $j \neq i$ *e* $m_i^+ \neq m_i/2$.

Dal Lemma 3, dal Lemma 4 e dalla relativa osservazione segue che la (13) è necessaria e sufficiente affinchè $P(y)$ e $P'(y)$ abbiano ugual grado rispetto a ogni variabile. Dunque basterà fare la parte di dimostrazione relativa agli indici. Per i lemmi 2 e 4 possiamo ragionare su $P_0(y)$ e $P_0'(y)$.

Supponiamo dapprima $m_1 < m_2 \leq \ldots \leq m_n$. Allora si ha $a_{1j} = 0$ per $j > 2$, e quindi, per il Lemma 4,

$$P_0'(\zeta, 1, 0, \ldots, 0) = P_0(a_{11}\zeta, \bar{a}_{22}, \bar{a}_{24}, \ldots, \bar{a}_{2n}),$$

ove i numeri $\bar{a}_{22}, \ldots, \bar{a}_{2n}$ non sono tutti nulli. Da questo segue, tenendo conto del Lemma 1, che $P_0'(y)$ e $P_0(y)$ hanno lo stesso indice rispetto a y_1 per ogni $a_{11} \neq 0$, se è $m_1^+ = m_1/2$, mentre, se è $m_1^+ \neq m_1/2$, ciò accade se e solo se è $a_{11} > 0$.

Sia ora $m_1 = \ldots = m_r < m_{r+1} \leq \ldots \leq m_n$, $r \geq 2$. Allora si ha

$a_{ij} = 0$ per $1 \leq i \leq r$ e $r+1 \leq j \leq n$, e quindi è

$$P_0'(y_1, y_2, 0, \dots, 0) = P_0(a_{11}y_1 + a_{21}y_2, \dots, a_{1r}y_1 + a_{2r}y_2, 0, \dots, 0).$$

Ora possiamo applicare il Lemma 5 al polinomio al secondo membro per concludere che m_1 è pari e che l'indice rispetto a y_1 vale $m_1/2$.

Tenendo conto del Lemma 1, questo completa la dimostrazione relativamente al primo indice. Per gli altri si ragiona in modo analogo.

3. - Trasformazioni stabili e superfici normali.

Sia Ω un aperto in R^n; consideriamo la trasformazione di Ω in R^n definita da

$$x'_j = f_j(x), \quad 1 \leq j \leq n, \tag{14}$$

con le funzioni $f_1, \dots, f_n$ differenziabili con continuità (di volta in volta si richiederà una regolarità maggiore dipendente dal polinomio e dal problema considerato) su Ω. Diciamo che la trasformazione (14) è *stabile* per il polinomio quasi-ellittico $P(y)$ se è stabile per ogni $\bar{x} \in \Omega$ la trasformazione lineare di R^n in se' definita da

$$x'_j = \frac{\partial f_j(\bar{x})}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial f_j(\bar{x})}{\partial x_n} x_n, \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{14'}$$

Ora, seguendo PINI [6], diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE II. - *Diciamo che la superficie $S \subset R^n$ è normale per il polinomio quasi-ellittico $P(y)$ se, localmente, coincide col trasformato di una parte (intervallo) di un iperpiano coordinato mediante una trasformazione stabile per $P(y)$.*

Le superfici normali sono caratterizzate dal seguente teorema

TEOREMA 2. - *La superficie $S \subset R^n$ è normale per il polinomio quasi-ellittico $P(y)$ se e solo se è localmente rappresentabile mediante un'equazione del tipo* $(1 \leq i \leq n)$

$$x_i = g(x), \tag{15}$$

ove g è differenziabile con continuità ed è

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} \equiv 0,\ m_k > m_i \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_k} \equiv 0. \tag{16}$$

Supposto che S sia rappresentata, in un intorno del suo punto $\bar{x}$, dalla (15) e che valga la (16), consideriamo la trasformazione definita da

$$x'_j = x_j \quad \text{per} \quad j \neq i,\ x'_i = x_i - g(x).$$

Dalla (16) segue che g non dipende da x_i; quindi la trasformazione è invertibile e la sua inversa è definita da

$$x_j = x'_j \quad \text{per} \quad j \neq i,\ x_i = x'_i + g(x'). \tag{17}$$

Dunque l'intorno considerato è il trasformato di una parte del piano $x'_i = 0$ mediante la (17); inoltre la (17) è stabile, come si verifica facilmente. Questo prova la prima parte della nostra affermazione.

Viceversa, supponiamo che S, in un intorno del suo punto $\bar{x}'$, coincida col trasformato del piano $x_t = 0$, $1 \leq t \leq n$, mediante la trasformazione stabile (14), e proviamo che esistono un indice i e una funzione g verificanti le condizioni (15) e (16). Siccome nella dimostrazione usiamo solo il fatto che $m_h < m_k \Rightarrow \dfrac{\partial f_h}{\partial x_k} = 0$, possiamo supporre $n \geq 1$. La nostra affermazione è evidente per $n = 1$. Supponiamo allora $n > 1$ e $\bar{x}'_j = f_j(\bar{x})$ per $1 \leq j \leq n$.

Sia $m_t = m_n$. La matrice $\left\| \dfrac{\partial f_j(\bar{x})}{\partial x_k} \right\| \begin{pmatrix} 1 \leq j,\ k \leq n \\ k \neq t \end{pmatrix}$ ha caratteristica $n - 1$, quindi esiste un i con $1 \leq i \leq n$, tale che la matrice $\left\| \dfrac{\partial f_j(\bar{x})}{\partial x_k} \right\| \begin{pmatrix} 1 \leq j,\ k \leq n \\ k \neq t,\ j \neq i \end{pmatrix}$ è invertibile. Ora si può applicare il teorema di Dini sulle funzioni implicite per concludere che S è rappresentabile, in un intorno di $\bar{x}'$, da

$$x_k = \varphi_k(x' - x'_i e^{(i)}) \quad \text{per} \quad k \neq t,\quad x'_i = f_i(x - x_t e^{(t)}), \tag{18}$$

ove le φ_k sono differenziabili con continuità. Da questo segue, eliminando le x_k, che S è rappresentata, in un intorno di $\bar{x}'$, dall'equazione $x'_t = g(x')$, ove g è differenziabile con continuità e $\dfrac{\partial g}{\partial x'_t} \equiv 0$. Questo prova la nostra affermazione per il caso di $m_t = m_n$ e anche per il caso di $m_1 = \ldots = m_n$.

Sia ora $m_t < m_n$ e sia $r = \max \{ j \mid 1 \leq j \leq n,\ m_j < m_n \}$. Allora si ha per le f_j che figurano in (14)

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \equiv 0 \quad \text{per} \quad 1 \leq j \leq r, \quad r + 1 \leq k \leq n,$$

e quindi $f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_r)$. Siccome da $m_t \leq m_r$ segue $t \leq r$, possiamo limitarci a considerare la trasformazione

$$x'_j = f_j(x_1, \ldots, x_r), \; 1 \leq j \leq r. \tag{14}$$

A questo punto possiamo ripetere il ragionamento fatto sopra sostituendo ovunque r a n. Siccome è $r < n$, la nostra affermazione si può considerare provata per induzione.

4. - Una applicazione.

Se la funzione complessa φ è definita sul compatto (chiusura di un aperto) $K \subset R^n$ e ivi differenziabile infinite volte, diciamo che appartiene alla *classe di Gevrey* $G_q(K)$ se riesce, per ogni α e con $A > 0$ indipendente da α,

$$\sup_K \mid D^\alpha \varphi(x) \mid \leq A^{1+(\alpha, q)} (\alpha, q)^{(\alpha, q)}.$$

Se ψ è una funzione definita sull'insieme A e se B è un sottoinsieme di A, indichiamo con $\psi|_B$ la restrizione di ψ su B.

Sia r un indice tale che $m_j \leq m_r \Rightarrow j \leq r$, sia ρ un numero reale positivo e sia g: $R^n \rightarrow R^1$ una funzione differenziabile con continuità per $\mid x_j \mid \leq \rho$, $1 \leq j \leq n$, e tale che $\dfrac{\partial g}{\partial x_j} \equiv 0$ per $j \geq r$. Poniamo

$$S = \{ x \mid x \in R^n,\ \mid x_j \mid < \rho \ \text{ per } \ j \neq r,\ x_r = g(x) \},$$

$$T_\rho = \{ x \mid x \in R^n, \mid x_j \mid < \rho \ \text{ per } \ j \neq r,\ g(x) < x_r < g(x) + \rho \}$$

e indichiamo con J_ρ l'insieme delle $(n-1)$—ple $(x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n)$ tali che $|x_j| \leq \rho$, $j \neq r$.

Siano date le funzioni complesse $a_\alpha \in G_q(\overline{T}_\rho)$ (il soprassegno indica la chiusura) in modo che il polinomio in y

$$P(x, y) = \sum_{(\alpha, q) \leq m} a_\alpha(x) y^\alpha \tag{16}$$

sia quasi–ellittico per ogni fissato $x \in \overline{T}_\rho$.

In una Nota precedente [1] abbiamo provato che, se è $g(x) = 0$, ogni funzione complessa u, differenziabile m volte con continuità su $\overline{T}_\rho$ e verificante le condizioni

$$P(x, D)u \in G_q(\overline{T}_\rho), \ \left(\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^{\nu-1} u\,|_{\overline{S}} \in G_{q(r)}(J_\rho) \ \text{ per } \ 1 \leq \nu \leq m_r^+, \tag{20}$$

appartiene alla classe $G_q(\overline{T}_\sigma)$ per ogni $\sigma < \rho$.

Proviamo ora che il risultato vale ancora nell'ipotesi più generale che g appartenga alla classe $G_q(\{x \quad x \in R^n, \ |x_j| \leq \rho$ per $1 \leq j \leq n\})$.

Consideriamo la trasformazione di $\overline{T}_\rho$ in R^n definita da

$$x'_j = x_j \ \text{ per } \ j \neq r, \ x'_r = x_r - g(x) \tag{21}$$

e la sua inversa definita da

$$x_j = x'_j \ \text{ per } \ j \neq r, \ x_r = x'_r + g(x'), \ x' \in \overline{T}'_\rho, \tag{21'}$$

con

$$T'_\rho = \{x' \mid x' \in R^n, \ |x'_j| < \rho \ \text{ per } \ j \neq r, \ 0 < x'_r < \rho\}.$$

Se poniamo, con $x' \in \overline{T}'_\rho$ e x dato dalla (21'),

$$u'(x') = u(x), \ \ P'(x', D')u'(x') = P(x, D)u(x)$$

$\left(\text{con } D'_j = -i \dfrac{\partial}{\partial x'_j}\right)$ e ricordiamo che le funzioni composte di funzioni della classe G_q appartengono ancora alla classe G_q (vedere [2] e [3]) otteniamo la seguente condizione equivalente alla (20)

$$(20') \qquad P'(x', D')u' \in G_q(\overline{T}'_\rho)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'_r}\right)^{\nu-1} u' \mid_{x'_r=0} \in G_{q(r)}(J'_\rho) \quad \text{per} \quad 1 \leq \nu \leq m_r^+,$$

ove J'_ρ è definito in modo analogo a J_ρ. Ora, dal fatto che la (21) è una trasformazione stabile per $P(x, y)$ per ogni fissato $x \in \overline{T}_\rho$, segue che, comunque si fissi $x' \in \overline{T}'_\rho$, $P'(x', y)$ è quasi-ellittico e il suo indice rispetto a y_r vale m_r^+.

Allora possiamo applicare il risultato ricordato sopra per affermare che $u' \in G_q(\overline{T}'_\sigma)$ per ogni $\sigma < \rho$. Da questo segue infine che $u \in G_q(\overline{T}_\sigma)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. CAVALLUCCI, *Sulle proprietà differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche*, «Ann. Mat. Pura Appl.» (in corso di stampa).

[2] J. FRIBERG, *Estimates for partially hypoelliptic differential operators.* Thesis, Lund, 1963.

[3] M. GEVREY, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles*, «Ann. Ec. Norm. Sup. (3) 35, 127-190 (1918).

[4] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer, Berlin 1963.

[5] B. PINI, *Osservazioni sulla ipoellitticità*, «Boll. U. M. I.» XVIII, 42-432 (1963).

[6] B. PINI, *Su un problema tipico relativo a una certa classe di equazioni ipoellittiche*, «Atti Acc. Scienze Ist. Bologna», Serie XII, Tomo I, 1-26 (1964).

[7] B. PINI, *Su un problema al contorno per certe equazioni ipoellittiche*, «Rev. Roum. Math. Pures et Appl.», Tome IX, n 7, 643-653 (1964).