
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ELISA GRANDORI GUAGENTI

Sulle equazioni intrinseche della magnetofluidodinamica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 19
(1964), n.4, p. 460–464.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_4_460_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulle equazioni intrinseche della magnetofluidodinamica (*)

Nota di ELISA GRANDORI GUAGENTI (a Milano) (**)

Sunto. - *Si scrivono le equazioni intrinseche della magnetofluidodinamica. Si fanno alcune considerazioni sul variare delle grandezze meccaniche e magnetiche lungo le linee di flusso e normalmente ad esse. Si esaminano alcuni casi particolari.*

In un fluido ordinario il comportamento delle grandezze meccaniche lungo le linee di flusso e normalmente ad esse è ormai ben conosciuto. In uno studio abbastanza recente [5] TRUESDELL ha mostrato che molti risultati raggiunti si possono ottenere in modo semplice ed organico dalle equazioni intrinseche del fluido.

Qualora il fluido sia da considerarsi conduttore, nello schema della m. f. d. (magnetofluidodinamica), le grandezze meccaniche non conservano, come è ovvio il comportamento che hanno nei fluidi ordinari. Alcuni risultati in questo ordine di idee sono stati ottenuti recentemente da KUMAR e da WARSI [3], [6], nel caso piano.

Nella presente nota si dà il legame tra le variazioni delle grandezze meccaniche e magnetiche, nel caso spaziale; e ad esso si perviene attraverso l'analisi delle equazioni intrinseche (in m. f. d.). Ci si limita a considerare, nello schema non relativistico, un fluido non viscoso, non conduttore del calore e perfettamente conduttore dell'elettricità, in moto stazionario e prescindendo dalle forze esterne.

Nelle ipotesi suddette, il quadro delle equazioni fondamentali è il seguente:

$$\begin{aligned} \rho \alpha &= - \operatorname{grad} p^* + \mu H \frac{dH}{ds} & \operatorname{rot} (H \wedge v) &= 0 \\ (1) \quad \operatorname{div} (\rho v) &= 0 & f(p, \rho, S) &= 0 & \frac{dS}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

in cui v è la velocità, α l'accelerazione, H il campo magnetico e d/ds la derivazione nella sua direzione, μ la permeabilità magne-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca matematici del C. N. R.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I., il 29 dicembre 1964.

tica, p la pressione, $p^* = p + \mu H^2/2$ la pressione totale, ρ la densità, S l'entropia specifica, e d/ds la derivazione lungo le linee di flusso ⁽¹⁾.

L'EQUAZIONE DINAMICA. — Siano $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ i versori della terna intrinseca delle linee di flusso, e si indichino con d/ds , d/dn , d/db le derivazioni nelle loro direzioni.

Ricordando la scomposizione intrinseca della accelerazione e indicando con c la curvatura delle linee di flusso, l'equazione dinamica (la prima del sistema (1)), proiettata sui tre assi della terna intrinseca, dà luogo a

$$(2) \quad \rho v \frac{dv}{ds} = - \frac{dp^*}{ds} + \mu H \left(\frac{d\mathbf{H}}{ds} \right)_t$$

$$(3) \quad \rho v^2 c = - \frac{dp^*}{dn} + \mu H \left(\frac{d\mathbf{H}}{ds} \right)_n$$

$$(4) \quad 0 = - \frac{dp^*}{db} + \mu H \left(\frac{d\mathbf{H}}{ds} \right)_b$$

Esse danno il legame tra le derivate di v e di p^* lungo le linee di flusso e le loro traiettorie normali, e la derivata di $\mathbf{H}$ lungo le linee di forza ⁽²⁾.

L'EQUAZIONE DI MAXWELL. — Si può verificare che l'equazione del sistema (1) ottenuta dalle equazioni di MAXWELL si può anche porre nella seguente forma:

$$(5) \quad \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{v} + v \frac{d\mathbf{H}}{ds} - H \frac{dv}{ds} = 0.$$

Essa dà il legame tra la derivata del campo magnetico nella direzione della velocità e la derivata della velocità nella direzione del campo magnetico. In particolare essa mostra che, se il fluido è incomprimibile, tali derivate sono fra loro parallele.

⁽¹⁾ La prima equazione è scritta in forma leggermente diversa dalla consueta, come è giustificato in [2], p. 50; per l'ultima vedi [5], p. 13.

⁽²⁾ Se si tien conto dell'equazione di stato (la quarta delle (1)), nelle (2), (3), (4) si può far comparire la dp/ds anzichè la dp/ds .

CASI PARTICOLARI. - I) Sia $d\mathbf{H}/d\sigma = 0$, e cioè le linee vettoriali di $\mathbf{H}$ siano rette e lungo esse H sia costante. In tal caso la prima delle (1) si riduce all'ordinaria equazione dinamica salvo la sostituzione di p^* a p ⁽³⁾.

II) Il campo magnetico sia parallelo alla velocità, il che soddisfa identicamente la seconda equazione del sistema (1) ⁽⁴⁾; la $d/d\sigma$ coincide allora con la d/ds e, se si tien presente che è

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\sigma} = \frac{dH}{ds} \mathbf{t} + Hc\mathbf{n},$$

le (2), (3), (4) divengono

$$\begin{aligned} \rho v \frac{dv}{ds} &= - \frac{dp^*}{ds} + \mu H \frac{dH}{ds} \\ (6) \quad \rho v^2 c &= - \frac{dp^*}{dn} + \mu H^2 c \quad 0 = - \frac{dp^*}{db}. \end{aligned}$$

Esse si commentano in modo ovvio; in particolare, per la seconda delle (6), non è detto che, se lungo le traiettorie delle normali principali la pressione (totale) è costante, le linee di flusso siano per conseguenza rette; potrebbe essere $\rho v^2 = \mu H^2$, il che significa uguaglianza tra energia cinetica ed energia magnetica.

III) Il moto avvenga per strati piani e sia x, y il generico piano di moto; sia ϑ l'angolo che $\mathbf{v}$ forma con l'asse x . Risulta

$$(7) \quad \frac{d\mathbf{t}}{dn} = \frac{d\vartheta}{dn} \mathbf{n} \quad \frac{d\mathbf{n}}{dn} = - \frac{d\vartheta}{dn} \mathbf{t} \quad \text{div } \mathbf{t} = \frac{d\vartheta}{dn}.$$

D'altra parte è

$$\text{div } \mathbf{v} = v \text{div } \mathbf{t} + \frac{dv}{ds}$$

da cui si ricava

$$(8) \quad \frac{d\mathbf{n}}{dn} = \frac{1}{v} \left(\frac{dv}{ds} - \text{div } \mathbf{v} \right) \mathbf{t}.$$

⁽³⁾ Se è addirittura $\text{rot } \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = 0$, l'equazione dinamica e le conseguenze che se ne traggono rimangono ovviamente del tutto inalterate.

⁽⁴⁾ Sulla possibilità di aversi, in condizioni stazionarie, $\mathbf{H}$ parallelo a $\mathbf{v}$, vedi ad es. [1].

Ciò premesso si supponga che il campo magnetico abbia la direzione e il verso di $\mathbf{n}$. Tale disposizione è effettivamente possibile, perchè il sistema (1) non comporta contraddizioni per $\mathbf{H} = H\mathbf{n}$.

Tenendo conto delle formule di FRENET e delle (7), la (5)

proiettata sul primo asse diviene $vc = dv/dn$: essa fornisce la curvatura delle linee di flusso;

proiettata sul secondo asse diviene $dHv/ds = 0$;

proiettata sul terzo asse è identicamente soddisfatta (essa mostra che è nulla la torsione delle linee di flusso).

Le equazioni dinamiche (2), (3), (4), grazie alla (8), divengono

$$(9) \quad (\rho v^2 - \mu H^2) \frac{dv}{ds} = - \frac{dp^*}{ds} - \mu H^2 \operatorname{div} \mathbf{v}$$

$$\rho v^2 c = - \frac{dp}{dn} \quad 0 = - \frac{dp^*}{db}.$$

Esse forniscono le relazioni desiderate. È spontaneo osservare che la seconda di esse non risente affatto della presenza del campo magnetico; che la terza non ne risente solo formalmente (salvo la sostituzione di p^* a p); che, se le linee di flusso sono curve tra loro parallele, è $d\mathbf{n}/dn = 0$ e la prima delle (9) (per la (8)) si riduce alla corrispondente equazione dei fluidi ordinari (salvo la sostituzione di p^* a p); che, se il fluido è incompressibile, per la prima delle (9), si conserva la proprietà per cui la velocità e la pressione (totale) sono stazionarie negli stessi punti (se $\rho v^2 \neq \mu H^2$).

Si osservi infine che, indipendentemente da qualunque considerazione magnetica, la (8) permette di esprimere la curvatura c' delle traiettorie normali principali. E' infatti

$$(10) \quad c' = \frac{1}{v} \left(\operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{dv}{ds} \right).$$

Inoltre, se il campo $\mathbf{v}$ è solenoidale e lungo s è v costante, è $c' = 0$, e cioè:

nei moti per strati piani di fluidi incompressibili (conduttori e non) le traiettorie ortogonali alle linee di flusso, nei punti di incontro con le isotachie, hanno curvatura nulla.

CURVATURA E TORSIONE DELLE LINEE DI FLUSSO. - Indicando con c e con τ curvatura e torsione delle linee di flusso, risulta:

$$\rho c v^3 = \mathbf{b} \times \mathbf{v} \wedge \left(\mu H \frac{d\mathbf{H}}{ds} - \operatorname{grad} p^* \right)$$

$$c \tau v^3 = - \mathbf{n} \times \mathbf{v} \wedge \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{H}{\rho} \frac{d\mathbf{H}}{ds} - \operatorname{grad} p^* \right).$$

Esse danno c e τ in funzione delle variazioni di pressione e di campo magnetico.

L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA. - L'ultima equazione del sistema (1) è, in assenza di trasmissione del calore, l'equazione dell'energia. Indicando con T la temperatura assoluta e con w l'energia specifica interna, è:

$$(11) \quad dw = -pd\frac{1}{\rho} + TdS.$$

Dall'equazione dinamica e dalla (11) si ottiene

$$(12) \quad \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = T \text{grad } S - \text{grad } B + H \frac{d\mathbf{H}}{d\sigma}$$

dove $B = 1/2v^2 + w + p^*/\rho$ sostituisce in m. f. d. il trinomio di BERNOULLI. La (12), ricordando l'espressione intrinseca di $\text{rot } \mathbf{v}$ [4], e tenendo conto dell'equazione dell'energia, diviene (proiettata sui tre assi):

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{dB}{ds} + \mu H \left(\frac{d\mathbf{H}}{d\sigma} \right)_t \\ v \left(cv - \frac{dv}{dn} \right) &= -\frac{dB}{dn} + \mu H \left(\frac{d\mathbf{H}}{d\sigma} \right)_n \\ -v \frac{dv}{db} &= -\frac{dB}{db} + \mu H \left(\frac{d\mathbf{H}}{d\sigma} \right)_b. \end{aligned}$$

In particolare la prima di queste mostra come vada modificato in m. f. d. il teorema di BERNOULLI (che per un fluido ordinario afferma essere $dB/ds = 0$); essa dà inoltre la condizione per cui detto teorema in m. f. d. non venga modificato: deve essere $d\mathbf{H}/d\sigma$ normale alla velocità, condizione che avevo espresso in questi termini in un precedente lavoro [2].

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. GRAD, *Reducible Problems in Magneto-Fluid Dynamics Steady Flows*, « Rev. Mod. Phys. », 32, 1960, p. 830.
- [2] E. GRANDORI GUAGENTI, *Superficie di Lamb e di Bernoulli nella magnetofluidodinamica*, « Boll. U.M.I. », 19, 1964, p. 40.
- [3] P. KUMAR, *On conducting plane gas flows*, « Tensor », 13, 1963, p. 89.
- [4] A. MASOTTI, *Decomposizione intrinseca del vortice e sue applicazioni*, « Rend. Ist. Lomb. sci. lett. », 60, 1927, p. 869.
- [5] C. TRUESDELL, *Intrinsic Equations of Spatial Gas Flow*, « Z.A.M.M. », 40, 1960, p. 9.
- [6] N. A. WARS', *On steady plane flows of magnetogas dynamics*, « Tensor », 15, 1964, p. 275.