BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCESCO SPERANZA

Alcune proprietà delle trasformazioni fra piani o spazi sovrapposti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 19
(1964), n.3, p. 351–372.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_3_351_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Alcune proprietà delle trasformazioni fra piani o spazi sovrapposti

Nota di FRANCESCO SPERANZA (a Bologna) (*) (**)

Sunto. - *Si danno varie proprietà proiettive delle trasformazioni fra piani e spazi sovrapposti.*

Summary. - *Many projective properties of transformations between superposed planes or spaces are given.*

1. In questo lavoro si studiano alcune particolari trasformazioni d'uno spazio, o d'un piano, proiettivo in sé. Nel n. 2 si considerano le trasformazioni T_1 fra due piani che posseggono un sistema ∞^1 di rette unite (ovvero, se la trasformazione opera solo in una regione del piano, vi sarà un sistema di segmenti corrispondenti allineati a due a due: e così in casi analoghi). Per tali trasformazioni esiste, com'è noto, in ogni coppia un invariante proiettivo α : si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinché lungo le rette unite sia $\alpha = \text{cost.}$ è che esse siano caratteristiche almeno doppie; si assegna una costruzione geometrica di tali corrispondenze, ed una loro rappresentazione analitica. Si dimostra pure che, se per una T_1 sono verificate due delle tre condizioni:

- I) α è costante,
- II) T_1 è di 3^a specie,
- III) le rette unite formano fascio,

allora è verificata anche la rimanente. Si costruiscono e si studiano anche tali trasformazioni.

Nel n. 3 si determinano le T_1 che ammettono in una coppia generica una trasformazione quadratica osculatrice involutoria: sono quelle che si assegnano assegnando su ogni retta d'un fascio Φ un'involuzione. Esistono pure delle T_1 che in una coppia gene-

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. l'11 maggio 1964.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

rica hanno ∞^1 trasformazioni quadratiche osculatrici involutorie: esse si ottengono allorchè il centro di Φ è unito in ogni involuzione (altre caratterizzazioni di tali trasformazioni sono indicate nel n. 2).

Il n. 4 è dedicato alle trasformazioni d'uno spazio a tre dimensioni in sè che in una coppia generica posseggono un piano unito nella proiettività indotta dall'intorno del 1° ordine. Si dimostra che condizione necessaria, ma non sufficiente, affinchè le curve principali siano caratteristiche è che esistano ∞^1 piani uniti.

Nel n. 5 si risolve il problema della determinazione delle trasformazioni fra due spazi proiettivi ad r dimensioni involucri di ∞^k omologie. Si dimostra che esse sono quelle che si ottengono assumendo in uno spazio ad $r + 1$ dimensioni due punti $B, \bar{B}$ ed una V_r con ∞^k iperpiani tangenti, ed associando punti proiezione (da $B, \bar{B}$ su un iperpiano) di un punto di V_r .

Nel n. 6 si dimostra che per una T in un piano, che non sia T_1 , le coniche luogo delle intersezioni di rette corrispondenti nella proiettività $\mathcal{S}$ del 1° ordine sono sempre ∞^2 .

Nel n. 7 si studia poi il problema della determinazione delle trasformazioni dualistiche nel piano che ammettono ∞^1 correlazioni principali: si prova che si tratta di corrispondenze polari di tipo particolare, e, nel caso in cui la correlazione principale è unica, si tratta necessariamente delle polarità rispetto alle coniche.

2. Sia T , una trasformazione fra piani sovrapposti (o fra due regioni d'un medesimo piano) tale in ogni coppia $A, \bar{A}$ di punti corrispondenti la proiettività $\mathcal{S}$ indotta da T_1 fra i fasci $A, \bar{A}$ sia una prospettività: le rette congiungenti punti corrispondenti sono quindi unite (¹): come s'è già detto, se T_1 opera solo fra due regioni del piano, si hanno dei segmenti allineati corrispondenti. Supporremo che tutte le corrispondenze considerate nel presente lavoro siano di classe sufficientemente elevata.

Assumiamo come punti A_0, A_1 d'un riferimento proiettivo i punti $A, \bar{A}$, e come retta $x = 1$ l'asse r della $\mathcal{S}$; le equazioni di T_1 sono, com'è noto

$$\frac{\bar{y}}{x} = \alpha y + \dots \quad \frac{1}{x} = \alpha x + \dots \quad (2)$$

(¹) Cfr. L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi sovrapposti*, «Boll. U.M.I.» (Ser. III) Vol. 9, p. 360 (1954), n. 2.

(²) Cfr. L. MURACCHINI, op. cit. in (¹), n. 4.

Fra i punti analitici A_α si hanno poi relazioni del tipo $dA_\alpha = \Sigma \omega_{\alpha\beta} A_\beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2$) con

$$(1) \quad \omega_{10} = \alpha \omega_{01}, \quad \omega_{12} = \alpha \omega_{02}$$

ω_{01}, ω_{02} essendo forme lineari linearmente indipendenti nei differenziali delle coordinate di A ; d'ora in poi si indicheranno con ω_1, ω_2 . Convieni dare fin d'ora la rappresentazione analitica di alcuni enti che si considereranno nel seguito. La retta unita è la $\omega_2 = 0$, e il punto caratteristico dell'involuppo di tali rette ha, nel riferimento locale considerato, coordinate omogenee $(\alpha, -1, 0)$. (Qui e nel seguito la prima coordinata omogenea è x_0). Differenziando esternamente le (1) si hanno le relazioni

$$(2) \quad \begin{aligned} dx + \alpha(\omega_{00} - \omega_{11}) &= (x - \alpha^2)\omega_1 + p\omega_2, \\ dx + 2x(\omega_{00} - \omega_{11}) &= q\omega_1 + q'\omega_2, \\ \alpha(\omega_{20} - \omega_{21}) &= q'\omega_1 + q''\omega_2. \end{aligned}$$

Le curve caratteristiche sono le curve integrali dell'equazione differenziale

$$(3) \quad (q - 2x + 2\alpha^2)\omega_1^2 \omega_2 + (2q' - p)\omega_1 \omega_2^2 + q''\omega_2^3 = 0.$$

Fra di esse vi sono sempre le rette $A\bar{A}$.

Fissato il riferimento locale nel modo detto, le equazioni di T_1 risultano

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\bar{y}}{x} &= \alpha y + (x - \alpha^2)xy + \frac{p}{2}y^2 + \dots \\ \frac{1}{x} &= \alpha x + \frac{1}{2}(qx^2 + 2q'xy + q''y^2) + \left[\frac{q^2}{2\alpha} + \frac{q}{2}(\alpha - 1) + \frac{q_1}{6} \right] x^3 + \dots \end{aligned} \right.$$

avendo posto $q = q_1\omega_1 + q_2\omega_2$; dei termini del 3° ordine s'è scritto solo il coefficiente di x^3 nello sviluppo di $\frac{1}{x}$. Vi è un'omologia tangente a T_1 in $A, \bar{A}$ ⁽³⁾, di equazioni

$$\bar{x}_0 = \alpha x_1 \quad \bar{x}_1 = (\alpha - 1)x_1 + x_0 \quad \bar{x}_2 = \alpha x_2$$

(3) Cfr. L. MURACCHINI, l. cit. in (2).

il suo asse è la retta r , mentre il centro C è il punto caratteristico dell'involuppo delle rette unite: la caratteristica infine, se $\alpha \neq -1$, è $(CHAA) = -\frac{1}{\alpha}$ (H essendo un punto dell'asse). Se $\alpha = -1$, l'omologia è speciale. La proiettività caratteristica relativa alla retta $y = 0$ è

$$(5) \quad \alpha x\bar{x} + \frac{q}{2\alpha}x - 1 = 0.$$

Proviamo ora che condizione necessaria e sufficiente affinché le rette unite siano curve caratteristiche almeno doppie è che lungo ciascuna di esse α sia costante.

Infatti, esse sono caratteristiche almeno doppie solo se

$$q - 2\alpha + 2\alpha^2 = 0:$$

d'altra parte, dalle (2) si ha

$$(6) \quad d\alpha = (2\alpha - 2\alpha^2 - q)\omega_1 + (2p - q')\omega_2,$$

da cui l'asserto. Si noti che, in virtù della proprietà dimostrata una T_1 con α costante non può essere di 1^a specie.

Passiamo alla costruzione geometrica e alla rappresentazione analitica delle T_1 ora studiate. È noto che se in una trasformazione di 2^a o 3^a specie le curve caratteristiche multiple sono rette la corrispondenza subordinata su di esse è una proiettività, nella quale è unito il punto caratteristico dell'involuppo di tali rette (*). Verifichiamo tale proprietà nel nostro caso; si troveranno alcune espressioni che saranno utilizzate anche nel seguito.

Se $q = 2\alpha - 2\alpha^2$, cioè $d\alpha \wedge \omega^2 = 0$, si ha pure $q_1 = 0$, e dal confronto delle (4), (5) si ha che la proiettività osculatrice è iperosculatrice: allora la corrispondenza subordinata da T_1 su AA è la proiettività $\alpha x\bar{x} + (1 - \alpha)x - 1 = 0$, e in questa il punto C è unito (l'altro punto unito è il punto intersezione di AA con la r : al variare di A sulla retta, r descrive quindi un fascio).

Per avere tutte le T_1 tali che α resti costante lungo le rette unite, consideriamo perciò un involuppo Γ di rette e su ciascuna di queste assegniamo una proiettività in cui il relativo punto di

(*) Cfr. L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali di seconda e di terza specie fra piani proiettivi*, «Mem. Accad. Sci. Torino», (Ser. III) T. 1, p. 25 (1953): si vedano la (16) e il n. 10.

tangenza dell'inviluppo sia unito (s'intende, qui e in problemi analoghi, che tale proiettività dev'essere una funzione sufficientemente differenziabile dalla retta su cui agisce). Le equazioni delle trasformazioni in questione sono date da

$$y = \lambda x + f(\lambda), \quad \bar{y} = \lambda \bar{x} + f(\lambda),$$

$$k(\lambda)x\bar{x} + h(\lambda)x + m(\lambda)\bar{x} - k(\lambda)f'(\lambda) + [h(\lambda) + m(\lambda)]f'(\lambda) = 0.$$

Qui ed in casi analoghi λ è un parametro.

Consideriamo ancora una T_1 : dimostriamo che, se valgono due delle tre asserzioni:

- I) α è costante,
- II) T_1 è di 3^a specie, od è un'omologia,
- III) le rette unite formano fascio,

allora è verificata anche la rimanente. Le trasformazioni suddette si possono rappresentare con le

$$(7) \quad \bar{x} = x, \quad \bar{y} = -\frac{y}{\alpha} + \varphi(x).$$

La I) è infatti espressa analiticamente da $q = 2\alpha - 2\alpha^2$, $q' = 2p$; la II) da $q = 2x - 2x'$, $p = 2q'$, poichè solo le curve $\omega_2 = 0$ possono essere caratteristiche triple (cfr. (3)); la III) si esprime imponendo che il punto $C = \alpha A - A_1$, sia fisso: si deve avere

$$dx + \alpha\omega_{00} - \omega_{10} = p\alpha, \quad \alpha\omega_1 - \omega_{11} = -p,$$

da cui

$$dx + \alpha(\omega_{00} - \omega_{11}) + (x^2 - \alpha)\omega_1 = 0,$$

cioè $p = 0$. Dal confronto delle tre condizioni si ha subito la proprietà enunciata.

Per quanto riguarda le equazioni di tali corrispondenze, osserviamo anzitutto che, avendo un fascio di rette unite, esse si possono scrivere

$$(8) \quad \bar{x} = x, \quad \bar{y} = f(x, y) \quad (5).$$

(5) Cfr. L. MURACCHINI, l. cit. in (4).

Basterà poi imporre che l'omologia tangente sia sempre speciale, oppure sia di caratteristica costante: infatti questa è $-\frac{1}{x}$. Ora, l'omologia tangente alla (8) è

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = f_{x_0}x + f_{y_0}y + f - x_0f_{x_0} - y_0f_{y_0}.$$

Se essa è sempre speciale, si ha $f_y = 1$; altrimenti la sua caratteristica è f_{y_0} , e quindi dovrà essere $f_y = -\frac{1}{x}$ (costante). Quindi le equazioni sono della forma (7).

Tali corrispondenze si costruiscono assegnando su ciascuna retta d'un fascio una proiettività di caratteristica costante, oppure parabolica, in cui sia unito il centro del fascio.

Fra di esse sono degne di nota quelle per cui $x = 1$, oppure $x = -1$: esse sono tutte e sole le trasformazioni che in ogni coppia ammettono un'omologia tangente con centro fisso, che sia armonica nel primo caso e speciale nel secondo. Quelle del secondo tipo formano un gruppo infinito, caratterizzabile mediante il fatto d'esser trasformato in sé da un gruppo ∞^1 intransitivo abeliano continuo di omografie:

$$x' = x \quad y' = y + ax + b \quad (6).$$

Le omologie tangenti $\bar{x} = x$, $\bar{y} = \varphi_{x_0}x + y + \varphi - x_0\varphi_{x_0}$ fanno parte di tale gruppo, e quindi *trasformano tutte in sé la T.*

3. Questo numero è dedicato allo studio delle T_1 che in ogni coppia ammettono una t.q.s.o., o rispettivamente una t.q.o., involutoria. Indicheremo col simbolo t.q.s.o. le trasformazioni quadratiche che sono quasi prossime d'ordine 2 a T_1 , e con t.q.o., al solito, le trasformazioni quadratiche che approssimano la T_1 fino al 2° ordine (7). Dimostriamo che:

La T_1 , che in una coppia generica ammettono almeno una t.q.s.o. involutoria costituiscono due classi: quelle analitiche dipendono

(6) Cfr. F. SPERANZA, *Sulle trasformazioni che posseggono un gruppo di coppie di corrispondenze in sé*, Nota II, « Boll. U.M.I. » (Ser. III) Vol. 14, p. 10 (1959): v. il n. 15.

(7) Sulle t.q.o. si veda M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi*, I. *Le proiettività caratteristiche*, II. *Loro costruzione*. « Rend. Acc. d'Italia » (Ser. VII) Vol. 3, p. 718 e Vol. 4, p. 1 (1942). Sulla quasi prossimità di due trasformazioni, cfr. B. SEGRE, *Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane*, « Ann. di Mat. » (Ser. IV), T. 29, p. 107 (1949), § 1.

da 3 funzioni arbitrarie d'una variabile; una delle classi è costituita dalle T_1 che su ogni retta unita subordinano un'involuzione. Le T_1 che in una coppia generica ammettono almeno una t.q.o. involutoria si ottengono assegnando su ogni retta d'un fascio un'involuzione; quelle che in una coppia generica ammettono ∞^1 t.q.o. involutorie si hanno allorchè nelle involuzioni di cui sopra è unito il centro del fascio (cfr. le trasformazioni studiate alla fine del n. 2).

Infatti le t.q.s o. alla (4) sono (*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x - \alpha^2 + m}{2} (x\bar{y} + y) + \left(\frac{p}{2} + n\right) y\bar{y} + x^2 y\bar{x} - x\bar{y} + \mu(x\bar{y} - y) = 0 \\ \left(\frac{q}{2} + m\right) x + \frac{q' + n}{2} (x\bar{y} + y) + \frac{q''}{2} y\bar{y} + x^2 x\bar{x} - \alpha + \lambda(x\bar{y} - y) = 0, \end{array} \right.$$

(λ, μ, m, n parametri; se gli ultimi due sono nulli, le trasformazioni quadratiche sono osculatrici). Per far sì che tali corrispondenze siano involutorie, si scambino x, y con $\bar{x}, \bar{y}$, e s'imponga che le nuove equazioni siano conseguenza delle precedenti, cioè ne siano una combinazione lineare. Si ha

$$\begin{aligned} & \frac{x - \alpha^2 + m}{2} (x\bar{y} + \bar{y}) + \left(\frac{p}{2} + n\right) \bar{y}y + x^2 \bar{y}x - x\bar{y} + \mu(x\bar{y} - \bar{y}) = \\ & = k_1 \left[\frac{x - \alpha^2 + m}{2} (x\bar{y} + y) + \left(\frac{p}{2} + n\right) y\bar{y} + \alpha^2 y\bar{x} - \alpha\bar{y} + \mu(x\bar{y} - y) \right] + \\ & + k_2 \left[\left(\frac{q}{2} + m\right) x + \frac{q' + n}{2} (x\bar{y} + y) + \frac{q''}{2} y\bar{y} + \alpha^2 x\bar{x} - \alpha + \lambda(x\bar{y} - y) \right] \\ & \left(\frac{q}{2} + m\right) x + \frac{q' + n}{2} (x\bar{y} + \bar{y}) + \frac{q''}{2} \bar{y}y + \alpha^2 \bar{x}x - \alpha + \lambda(x\bar{y} - \bar{y}) = \\ & = h_1 \left[\frac{x - \alpha^2 + m}{2} (x\bar{y} + y) + \dots \right] + h_2 \left[\left(\frac{q}{2} + m\right) x + \dots \right] \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} k_2 &= 0, & -\alpha &= k_1 \left(\frac{x - \alpha^2 + m}{2} - \mu \right) = -k_1^2 x, \\ \left(\frac{x - \alpha^2 + m}{2} + \mu \right) &= k_1 x^2 = \frac{x^2}{k_1} & \frac{p}{2} + n &= k_1 \left(\frac{p}{2} + n \right) \end{aligned}$$

(*) Cfr. F. SPERANZA, *Sulle corrispondenze approssimabili mediante una trasformazione quadratica con conica di punti uniti*, questo « Bollettino ».

da cui $k_1 = \pm 1$;

$$h_2 = 1, \quad \frac{q}{2} + m = 0,$$

$$0 = h_1 \left(\frac{\alpha - \alpha^2 + m}{2} - \mu \right) + \frac{q' + n}{2} - \lambda = h_1 \left(\frac{\alpha - \alpha^2 + m}{2} + \mu \right) + \frac{q' + n}{2} + \lambda,$$

$$\frac{q' + n}{2} + \lambda = h_1 x^2, \quad \frac{q' + n}{2} - \lambda = -h_1 x, \quad h_1 \left(\frac{p}{2} + n \right) = 0.$$

Se $\frac{p}{2} + n \neq 0$, si ha $k_1 = 1$, $h_1 = 0$, e poi

$$q = -2m = 4x - 4x^2, \quad q' + n = \lambda = 0, \quad \mu = \frac{\alpha + \alpha^2}{2}.$$

Una volta che sia verificata la $q = 4x - 4x^2$, le altre individuano λ , μ , m , n , e quindi v'è una sola t.q.s.o. involutoria. Tali T_I sono individuate dal sistema esterno chiuso

$$\begin{aligned} \omega_{10} &= x\omega_1 & \omega_{12} &= x\omega_2 \\ \{ dx + x(\omega_{00} - \omega_{11}) + (x^2 - x)\omega_1 \} \wedge \omega_2 &= \\ = \{ dx + 2x(\omega_{00} - \omega_{11}) \} \wedge \omega_1 + x(\omega_{20} - \omega_{21}) \wedge \omega_2 &= \\ = \{ dx + 2x(\omega_{00} - \omega_{11}) \} \wedge \omega_2 + 4(x^2 - x)\omega_1 \wedge \omega_2 &= 0, \end{aligned}$$

e quindi le T analitiche del tipo studiato dipendono da 3 funzioni arbitrarie d'una variabile.

Se invece $\frac{p}{2} + n = 0$, si ha $k_1 = -1$, e quindi

$$(9) \quad q = -2m = 0, \quad p = -2n, \quad \mu = -\frac{\alpha + \alpha^2}{2},$$

$$(q' + n)(1 + \alpha) + 2\lambda(1 - \alpha) = 0 \quad \left(\text{ed } h_1 = \frac{1}{\alpha} \left(\lambda - \frac{q' + n}{2} \right) \right).$$

Supponiamo soddisfatta la $q = 0$; se $\alpha \neq 1$, le rimanenti danno λ , μ , m , n e quindi esiste una sola t.q.s.o. involutoria. Se $\alpha = 1$, si ha $q' = -n$, e dalla (6) si ha $q' = 2p$ ⁽⁹⁾; si ha quindi $p = q' = -m = n = 0$, e le t.q.s.o. involutorie sono ∞^1 e osculatrici.

(9) Qui è essenziale supporre che la circostanza sia verificata in una coppia generica; se essa invece fosse verificata in una coppia sola, non si potrebbe dedurre $m = n = 0$.

Ora, la condizione $q = 0$ equivale all'essere la proiettività (5) un'involuzione: inoltre, come si vede nelle (4), essa è iperosculatrice, e, poichè ciò accade in una coppia generica della retta $A\bar{A}$, la corrispondenza subordinata su tale retta è un'involuzione: e tale condizione è sufficiente. Le trasformazioni in questione si rappresentano perciò con le

$$(10) \quad y = \lambda x + f(\lambda), \quad \bar{y} = \lambda \bar{x} + f(\lambda), \quad k(\lambda)x\bar{x} + h(\lambda)(x + \bar{x}) + n(\lambda) = 0,$$

e dipendono anch'esse da 3 funzioni arbitrarie d'una variabile.

Affinchè le t.q.s.o. considerate più sopra siano osculatrici, dev'essere $m = n = 0$. Per quelle del 1° tipo si ha allora

$$\alpha = 1, \quad q = q' = 0$$

e da (6) segue pure $p = 0$.

Per quelle del 2° tipo si ha $q = p = 0$: le precedenti, quindi, rientrano in queste. Essendo $p = 0$, le rette unite formano fascio: ed in virtù di $q = 0$, su ciascuna di esse è subordinata un'involuzione:

$$(10') \quad \bar{x} = x, \quad k(x)y\bar{y} + h(x)(y + \bar{y}) + n(x) = 0.$$

Le t.q.o. involutorie sono ∞^1 quando nelle relazioni (9) λ è arbitrario: occorre e basta che sia $\alpha = 1$, $q' = q = p = 0$; è però sufficiente supporre che sia $\alpha = 1$, $p = 0$, e allora le altre seguono da (6). Tali trasformazioni sono quindi quelle già considerate alla fine del n. 2, e si ottengono assegnando su ogni retta d'un fascio un'involuzione in cui sia unito il centro del fascio. Esse posseggono una famiglia ∞^1 di t.q.o. involutorie dotate di conica di punti uniti, ed un'ulteriore t.q.o. involutoria, senza conica di punti uniti: rappresentando la T_1 con le (4), esse sono rispettivamente

$$y\bar{x} - x\bar{y} - \bar{y} + y = 0, \quad \frac{q''}{2}y\bar{y} + x\bar{x} - 1 + \lambda(x\bar{y} - y) = 0,$$

$$y\bar{x} + x\bar{y} - y - \bar{y} = 0, \quad \frac{q''}{2}y\bar{y} + x\bar{x} - 1 = 0.$$

4. Consideriamo in uno spazio proiettivo a tre dimensioni P_3 una T_1 , vale a dire una trasformazione tale che, nella proiettività $\mathcal{S}$ indotta dall'interno del 1° ordine d'una coppia generica, vi sia un piano unito ⁽¹⁰⁾. Dimostriamo che

Se le curve principali di T_1 ⁽¹¹⁾ sono caratteristiche, T_1 ha ∞^1 piani uniti.

Siano $A, \bar{A}$ due punti corrispondenti: consideriamo un riferimento proiettivo in cui $A_0 = A, A_1 = \bar{A}$, mentre il piano unito in $\mathcal{S}$ sia $A_0A_1A_3$. Assumendo opportunamente il riferimento, si può far sì che valgano le

$$\omega_{12} = \alpha\omega_2, \quad \omega_{13} = \omega_1, \quad \omega_{10} = \omega_3 \quad (12)$$

(le $\omega_{\alpha\beta}$ hanno significato analogo a quello attribuito, per una trasformazione fra piani, nel n. 2). Differenziando esternamente la prima si ha

$$\begin{aligned} dx + \alpha(\omega_{00} - \omega_{11}) + \alpha^2\omega_1 - \omega_3 &= \lambda\omega_2 + \lambda'(\omega_1 - \alpha\omega_3), \\ \omega_{32} &= \lambda'\omega_2 + \lambda''(\omega_1 - \alpha\omega_3). \end{aligned}$$

Le equazioni di T_1 sono

$$\frac{\bar{y}}{x} = \alpha y + \dots, \quad \frac{\bar{z}}{x} = x + \dots, \quad \frac{1}{x} = z + \dots,$$

e le omografie tangenti sono individuate dalle

$$\begin{aligned} KA &= \bar{A}, \quad K\bar{A} = A_3 + \mu\bar{A}, \quad KA_2 = \alpha A_2 + \nu\bar{A} \\ KA_3 &= A + \rho A \quad (\mu, \nu, \rho \text{ parametri}). \end{aligned}$$

Consideriamo la curva principale passante per A ; essa ha equazioni $\omega_2 = \omega_3 = 0$, e quindi lungo di essa

$$dA = \omega_{00}A + \omega_1A_1, \quad d^2A = (\cdot)A_0 + (\cdot)A_1 + (\omega_1)^2A_3$$

⁽¹⁰⁾ Cfr. F. SPERANZA, *Alcune notevoli classi di trasformazioni puntuali d'uno spazio proiettivo in sé*, «Boll. U.M.I.» (Ser. III) Vol. 13, p. 179 (1958): v. il n. 3.

⁽¹¹⁾ Cfr. F. SPERANZA, op. cit. in ⁽¹⁰⁾, n. 2.

⁽¹²⁾ Cfr. F. SPERANZA, l. cit. in ⁽¹⁰⁾, form. (1).

mentre per la curva corrispondente

$$d\bar{A} = \omega_1 \bar{A} + \omega_1 A_3, \quad d^2\bar{A} = (\cdot)\bar{A} + (\cdot)A_3 + \omega_1 \omega_{30} \bar{A} + \omega_1 \omega_{32} A_2$$

(ω_{30}, ω_{32} essendo calcolate per $\omega_2 = \omega_3 = 0$).

Se la curva $A(t)$ è caratteristica, per un'omografia tangente K le curve $KA(t)$ e $A(t)$ hanno contatto ordinario del 2° ordine

$$KA = r\bar{A}, \quad KdA = rd\bar{A} + s\bar{A}, \quad Kd^2A = rd^2\bar{A} + vd\bar{A} + w\bar{A} \quad (13)$$

da cui

$$(\cdot)\bar{A} + (\cdot)A_3 + (\omega_1)^2 A = (\cdot)\bar{A} + (\cdot)A_3 + \omega_1 \omega_{30} \bar{A} + \omega_1 \omega_{32} A_2,$$

cioè

$$\omega_{30} \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3, \quad \omega_{32} \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = 0$$

si ha allora $\omega_{32} = \lambda' \omega_2$, e $d[A\bar{A}A_3] = \sigma[A\bar{A}A_3]$ per $\omega_2 = 0$: il piano $[A\bar{A}A_3]$ è quindi unito. Per la rappresentazione analitica di tali T_1 (T_1^*) si veda l'op. cit. in (10), n. 2

La condizione non è sufficiente, in quanto non dice nulla riguardo ad ω_{30} : del resto, per ottenere una T_1^* , basta considerare un sistema arbitrario di piani (o di porzioni di piani) e dare una trasformazione arbitraria in ciascuno di essi: e per tali corrispondenze le rette $A\bar{A}$ non sono, di regola, caratteristiche.

Si può pure dire che se le curve principali d'una T_1 (in P_2) sono caratteristiche, esse sono piane (14).

OSSERVAZIONE. - La proprietà dimostrata non appare estendibile alle T_1 di un P_n ($n \geq 4$) in sé. Le condizioni affinché vi siano ∞^1 iperpiani uniti sono $(n-2)^2$, e quelle affinché le curve principali siano caratteristiche sono $n-1$.

5. Determiniamo ora le trasformazioni d'uno spazio proiettivo P_n in sé che sono involuppo (15) di ∞^k ($0 \leq k \leq n$) omologie.

(13) Cfr. E. CARTAN, *Sur la déformation projective des surfaces*, « Ann. Ec. Norm. Sup. », t. 37, p. 259 (1920); v. le (7).

(14) Cfr. F. SPERANZA, l. cit. in (10) (ultimo capoverso)

(15) Cfr. E. ČECH, *Géométrie projective différentielle des correspondences entre deux espace V*, « Journ. Tchèque de Math. », Vol. 77, p. 167 (1952); L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali involuppi di omografie*, « Boll. U.M.I. » (Ser. III), Vol. 8, p. 390 (1953).

Dimostriamo che:

Tutte le trasformazioni in P_n involuppo di ∞^k omologie si ottengono, se uno almeno dei numeri n , k è $\neq 2$, considerando un $P_{n+1} \supset P_n$, una $V_n \subset P_{n+1}$ che abbia esattamente ∞^k P_n tangenti, due punti $B, \bar{B}$ di P_{n+1} , non appartenenti a P_n , ed associando le proiezioni da $B, \bar{B}$ su P_n d'un medesimo punto di V_n . Se $n = k = 2$, le trasformazioni cercate sono tutte le T_1 .

Convieni suddividere la dimostrazione in tre parti: dapprima, si proverà che una corrispondenza del tipo detto è una T_{n-1} (cioè che possiede ∞^{n-1} rette unite); poi che le rette unite formano una stella, fuorchè nel caso $n = k = 2$, e infine si otterrà la costruzione di cui sopra.

Affinchè in una coppia $A, \bar{A}$ esista un'omologia tangente è necessario che la coppia sia di specie $n - 1$, cioè che nella proiezione $\mathcal{S}$, indotta fra le stelle $A, \bar{A}$, la retta $A\bar{A}$ sia unita. Infatti, affinchè la caratteristica del determinante caratteristico $A(\rho)$ sia, per un valore di ρ , 1, deve esistere un k tale che $h_k \geq n - 2$ ⁽¹⁶⁾, e quindi v è un sistema almeno ∞^{n-2} di P_{n-1} uniti in $\mathcal{S}$: sono quindi necessariamente uniti tutti i P_{n-1} per $A\bar{A}$, e quindi è unita la $A\bar{A}$ medesima.

Se $n = 2$, ciò è sufficiente affinchè in ogni coppia vi sia un'omologia tangente, che è allora unica. Se $n > 2$, non è sufficiente che la $A\bar{A}$ sia unita, ma occorre ancora (e basta) che $\mathcal{S}$ sia una prospettiva (cioè la γ ⁽¹⁷⁾ identica). Allora v è una e una sola omologia tangente K_0 ⁽¹⁸⁾.

Comunque, quando esiste un'omologia tangente, essa è unica, e quindi le trasformazioni involuppo di ∞^k omologie sono quelle che ammettono un'omologia tangente in una coppia generica, e in totale ∞^k . Se $n = k = 2$, esse sono tutte e sole le T_1 di P_2 : escluderemo d'ora in poi questo caso.

Dimostriamo che le rette unite passano tutte da un punto. Se $n > 2$, dal fatto che $\mathcal{S}$ sia sempre una prospettiva segue che due rette unite infinitamente vicine sono complanari, e quindi il loro sistema è una stella di rette ⁽¹⁹⁾. Se $n = 2$, l'ultima deduzione non

⁽¹⁶⁾ Cfr. F. SPERANZA, *Le trasformazioni puntuali fra spazi sovrapposti nei casi particolari*, «B. II. U.M.I.» (Ser. III) Vol. 10, p. 513 (1955): v. p. 518.

⁽¹⁷⁾ Cfr. F. SPERANZA, op. cit. in ⁽¹⁶⁾, n. 1.

⁽¹⁸⁾ Cfr. F. SPERANZA, *Sulle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi sovrapposti*, «Boll. U.M.I.» (Ser. III) Vol. 10, p. 61 (1955): v. il n. 5.

⁽¹⁹⁾ Cfr. C. SEGRE, *Preliminari ad una teoria delle varietà luoghi di spazi*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», Vol. 30 p. 87 (1910): v. p. 111. Cfr. pure F. SPERANZA, op. cit. in ⁽⁹⁾, nota ⁽¹⁴⁾.

è possibile; ma la proprietà vale ancora purché sia $k < 2$. Abbiamo infatti visto che l'asse dell'omologia tangente è la retta $x = 1$, cioè $[A_2A] + [A_2A_1]$; il centro è $C = \alpha A - A_1$, e la caratteristica è $-\frac{1}{\alpha}$. Imponiamo che questi elementi restino fissi allorché A descrive una curva. Avendosi

$$d \{ [A_2A] + [A_2A_1] \} = (\omega_{22} + \omega_{00} + \omega_{10})[A_2A] + \\ + (\omega_1 + \omega_{22} + \omega_{11})[A_2A_1] + (\omega_{20} - \omega_{21})[AA_1]:$$

l'asse resta fisso se lungo la predetta curva si ha

$$\omega_{00} - \omega_{11} = (1 - \alpha)\omega_1, \quad \omega_{21} - \omega_{20} = 0$$

Si ha poi

$$d(\alpha A - A_1) = (dx + \alpha\omega_{00} - \omega_{10})A + (\alpha\omega_1 - \omega_{11})A_1,$$

e quindi il centro è fisso se lungo la curva si ha

$$dx + \alpha(\omega_{00} - \omega_{11}) = (\alpha - \alpha^2)\omega_1$$

e infine la caratteristica è fissa solo se $dx = 0$. Segue che *se lungo una curva l'asse e il centro (o, rispettivamente, l'asse e la caratteristica) di K_0 sono fissi, allora è fissa anche la caratteristica (o, rispettivamente, il centro).*

Supponiamo dapprima che le curve lungo le quali K_0 è fissa non siano le AA : assumiamole, com'è lecito, come curve $\omega_1 = 0$: si hanno allora le condizioni necessarie

$$dx \wedge \omega_1 = (\omega_{00} - \omega_{11}) \wedge \omega_1 = (\omega_{20} - \omega_{21}) \wedge \omega_1 = 0, \\ \text{cioè (n. 2) } p = q' = q'' = 0,$$

la prima delle quali esprime che le AA formano fascio (n. 2). (Una volta verificata la $p = 0$, le rimanenti esprimono il fatto che le curve $\omega_1 = 0$ sono caratteristiche doppie).

Se invece K resta fissa allorché A descrive la AA ($\omega_2 = 0$), deve aversi

$$dx \wedge \omega_2 = (\omega_{00} - \omega_{11}) - (1 - \alpha)\omega_1 \wedge \omega_2 = (\omega_{20} - \omega_{21}) \wedge \omega_2 = 0 \\ \text{cioè } q = 2x - 2x^2, \quad q' = 0.$$

Si ha perciò

$$\begin{aligned} dx + 2\alpha(\omega_{00} - \omega_{11}) &= 2(x - \alpha^2)\omega_1, & dx &= 2p\omega_2, \\ \alpha(\omega_{20} - \omega_{21}) &= q''\omega_2; \end{aligned}$$

differenziando la prima si ha

$$p(1 + \alpha) = 0,$$

e quindi o $p = 0$, oppure $\alpha = -1$: in questo secondo caso, da (6) si ha $2p - q' = 0$, e quindi ancora $p = 0$: le rette unite formano in ogni caso fascio.

Sempre prescindendo dal caso $n = k = 2$, passiamo ora alla costruzione geometrica delle T involuppo di ∞^k omologie. Osserviamo che una T con una stella di rette unite si può sempre ottenere considerando un $P_{n+1} \supset P_n$, una $V_n \subset P_{n+1}$; e proiettando su P_n da due punti esterni $B, \bar{B}$ i punti di V_n . Infatti, nelle ipotesi di cui sopra, si possono scrivere (in coordinate proiettive non omogenee) le equazioni di T così:

$$(11) \quad \bar{X}^p = X^p, \quad \bar{X}^n = f(X^1, \dots, X^n) \quad (1 \leq p \leq n-1).$$

P_n , in P_{n+1} , avrà equazione $X^{n+1} = 0$; siano $B, \bar{B}$ i punti di coordinate omogenee $(0, \dots, 0, 1)$ e $(0, \dots, 1, -1)$ rispettivamente: allora, considerata la V_n

$$X^{n+1} = f(X^1, \dots, X^n) - X^n,$$

associando punti intersezione di rette proiettanti da $B, \bar{B}$ un medesimo punto di V_n , si ha proprio la T . Viceversa applicando la costruzione indicata ad una V_n qualsiasi si ha una T di P_n in sé nella quale le rette intersezione di P_n con i piani per $B\bar{B}$ sono unite.

Consideriamo ora un'altra ipersuperficie V_n' tangente in un punto P a V_n : la trasformazione T' di P_n in sé che si ottiene da V_n' (a partire da $B, \bar{B}$) è tangente a T nella coppia $A, \bar{A}$ che si ottiene, con la costruzione precedente, a partire da P . Infatti una curva qualsiasi γ per A è proiettata da B su V_n , V_n' secondo due curve λ, λ' che hanno in P contatto analitico del 1° ordine almeno;

ed il medesimo contatto hanno in $\bar{A}$ le curve ottenute proiettando λ, λ' da $\bar{B}$ su P_n : esse sono $T\gamma, T'\gamma$. In particolare, se V_n ammette (in P) P_n tangente, allora questo genera, con la medesima costruzione applicata a V_n , l'omologia tangente a T in $A, \bar{A}$. Si conclude quindi che (a prescindere dal caso $n = k = 2$, già esaminato) le T involuppo di ∞^k omologie sono quelle che si ottengono proiettando da due punti d'un $P_{n+1} \supset P_n$ una $V_n \subset P_{n+1}$, che abbia ∞^k iperpiani tangenti. Si osservi che il luogo dei punti $A(\bar{A})$ per i quali K_0 è la medesima è uno spazio lineare ⁽¹⁰⁾.

Si osservi pure che se, in particolare, l'omologia tangente a T è fissa, T è un'omologia.

OSSERVAZIONE I. - Si osservi che, se due trasformazioni con una medesima stella di rette unite unite sono quasi prossime d'ordine k , esse si approssimano necessariamente fino all'ordine k .

OSSERVAZIONE II. - A proposito delle T , fra piani sovrapposti, si può osservare quanto segue:

1) allorchè A descrive una unita, C rimane fisso; se invece C resta fisso allorchè A varia su un sistema di curve che non siano le $A\bar{A}$, queste ultime formano fascio.

2) la retta r rimane fissa al variare di A lungo le rette unite se e solo se $q = 2x - 2x^2, q' = 0$. Allora si ha pure (cfr. più sopra) $p = 0$, e si hanno le (7). Viceversa, dette x_0, y_0 le coordinate di A , l'omologia tangente a questa in $A, \bar{A}$ è (v. n. 2)

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \varphi'x - \frac{1}{\alpha}y + \varphi - x_0\varphi',$$

e questa resta la medesima per x_0 costante, cioè al variare di A lungo una retta unita.

Si osservi infine che, se per una trasformazione T d'uno spazio in sé la $\mathcal{S}$ è una prospettiva con iperpiano di prospettiva fisso, allora T trasforma spazi lineari in spazi lineari e quindi è un'omografia, anzi un'omologia.

⁽¹⁰⁾ Cfr. L. MURACCHINI, op. cit. in ⁽¹⁵⁾, propos. X.

Per tali V_n si veda C. SEGRE, op. cit. in ⁽¹⁹⁾; si veda pure G. MELZI, *Costruzione delle varietà a p dimensioni aventi meno di ∞^p spazi lineari a p dimensioni tangenti*, «Rend. Sem. Mat. Univ. e Polit. Torino» vol. 17, p. 305 (1957-58).

6. Consideriamo una trasformazione T d'un piano in sé tale che in una coppia generica $\mathfrak{S}$ non sia una prospettiva. Per ogni coppia si ha allora una conica γ luogo dei punti intersezione di rette corrispondenti in $\mathfrak{S}$. Dimostriamo che *le coniche γ sono sempre esattamente ∞^2 .*

Infatti, con opportuna scelta dei sistemi di riferimento, le equazioni di T si possono scrivere (cfr. op. cit. in (1), n. 3)

$$\frac{y}{x} = x + \dots \quad \frac{1}{x} = y + \dots$$

e la conica γ ha equazione $x^2 = y^2$, e quindi i suoi punti sono dati da

$$M = A_0 + u^2 A_1 + u A_2,$$

mentre per le forme $\omega_{\alpha\beta}$ (cfr. n. 2) valgono le relazioni

$$\omega_{12} = \omega_1, \quad \omega_{10} = \omega_2.$$

Quando A si porta in $A + dA$, M si porta in $M + dM = (1 + u^2 \omega_{10} + u \omega_{20} + \omega_{00})A + (u^2 + u^2 \omega_{11} + u \omega_{21} + \omega_1)A_1 + (u + u^2 \omega_{12} + u \omega_{22} + \omega_2)A_2$, e, affinché γ resti fissa, questo punto deve coincidere con $\rho M(u + \delta u) = \rho A_0 + \rho(u^2 + 2u\delta u)A_1 + (u + \delta u)A_2$. Si trova così, eliminando δu , la relazione

$$- \omega_1 + u(\cdot) + u^2(\cdot) + u^3(\cdot) - u^4 \omega_2 = 0,$$

che deve esser verificata per ogni u : ma allora $\omega_1 = \omega_2 = 0$, cioè γ non può restar fissa.

Si osservi che se queste coniche passano tutte per un punto O , il fascio di rette di centro O è unito in T . Infatti ad una retta per O corrisponde in ciascuna $\mathfrak{S}$ una retta pure per O , e quindi esse si corrispondono pure in T . Possiamo allora determinare le T per le quali le γ costituiscono una rete omaloidica. Assunto come $O_1(0, 1, 0)$ un punto base, le loro equazioni sono del tipo

$$\bar{x} = f(x, y), \quad \bar{y} = g(y)$$

e la conica γ relativa al punto $A(x, y)$ è

$$f_x(X-x)(Y-\bar{y}) + f_y(Y-\bar{y})(Y-y) - g_y(X-\bar{x})(Y-y) = 0$$

Se v ' è un altro punto base distinto, assunto questo come $O_2(0, 0, 1)$, le equazioni di T si possono scrivere

$$\bar{x} = f(x), \quad \bar{y} = g(y);$$

Ora, se le coniche passano per un terzo punto, assunto questo come $O_0(1, 0, 0)$, dev' essere

$$f_x g x - g_y f y = 0,$$

cioè

$$\frac{f_x}{f} x = \frac{g_y}{g} y = k \text{ (cost.)}$$

e si hanno le T

$$\bar{x} = c x^k, \quad \bar{y} = c' y^k.$$

Da queste si possono poi dedurre le equazioni analoghe valevoli nel caso in cui due dei punti base sono immaginari coniugati.

Se invece le coniche hanno in O_1 la medesima tangente, assunta questa come $x_2 = 0$, si ha

$$f_x g - g_y y = 0, \quad \text{cioè} \quad f_x = \frac{g_y}{g} y = k \text{ (cost.)}$$

e si hanno le T

$$\bar{x} = kx + h, \quad \bar{y} = cy^k.$$

Infine, se le coniche hanno in O_1 un E_2 comune, che si può sempre rappresentare con la $x_0 = x_2^2$, si hanno le relazioni

$$g_y = f_x, \quad f_y + g_y y - f_x g = 0,$$

da cui

$$f = g_y x + \varphi(y),$$

e quindi

$$g_{yy} x = g_y g - \varphi_y - g_y y$$

ma il secondo membro non dipende da x , e quindi

$$g_{yy} = g_y g - \varphi_y - g_y y = 0,$$

da cui si ottengono le T

$$\bar{x} = kx + \frac{k^2 - k}{2} y^2 + khy + c, \quad \bar{y} = ky + h.$$

7. In questo numero si studia il seguente problema (parzialmente analogo a quello trattato nel n. 5): data una trasformazione dualistica $\mathcal{T}$ d'un piano in sé, in ogni coppia (A, a) esiste una correlazione tangente nella quale A, a si corrispondono in doppio modo (correlazione principale ⁽²¹⁾): si tratta di cercare le $\mathcal{T}$ che hanno ∞^1 o una sola correlazione principale. Si dimostra che

Le $\mathcal{T}$, le cui correlazioni principali sono ∞^1 , sono corrispondenze polari di tipo particolare; se poi la correlazione principale è fissa, $\mathcal{T}$ è una polarità.

Cominciamo a provare che le $\mathcal{T}$ di cui all'enunciato non possono essere paraboliche, dotate cioè d'un solo sistema di curve canoniche ⁽²²⁾. Basterà dimostrare che la prima conica d'incidenza della correlazione principale non può restar fissa allorchè A descrive una curva. Si può scègliere il riferimento proiettivo per ogni coppia A, a in modo che valgano le

$$\begin{aligned} \omega_{10} &= \omega_1 + \omega_2, & \omega_{20} &= -\omega_1, & \omega_{00} - \omega_{11} &= \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2, \\ 2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{21} &= 2\lambda_1 \omega_1 + 2\lambda_2 \omega_2 \\ -2\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{21} &= 2\mu \omega_1. \end{aligned}$$

Si tenga presente che $A = A_0$, $a = [A_1 A_2]$, e le curve canoniche sono $\omega_1 = 0$, e che la correlazione principale H ha equazioni

$$u_1 = -x_1 - x_2, \quad u_2 = x_1, \quad u_0 = x_0,$$

e la sua conica d'incidenza $\mathcal{C}_0$ è $x_1^2 - x_0^2 = 0$ ⁽²²⁾.

⁽²¹⁾ Cfr. F. SPERANZA, *Proprietà proiettive delle trasformazioni dualistiche*, « Boll. U.M.I. » (Ser. III) Vol. 12, p. 552 (1957): v. n. 2.

⁽²²⁾ Cfr. F. SPERANZA, op. cit. in ⁽²¹⁾, n. 6.

(Il riferimento scelto può esser complesso; ma ovviamente la proprietà in discorso è sempre valida).

I punti di $\mathcal{C}_0$ sono dati da $M = A + \varepsilon A_1 + u A_2$ (u parametro, $\varepsilon = \pm 1$). Quando A si porta in $A + dA$, M si porta in $M + dM$, con $dM = (\omega_{00} + \varepsilon\omega_{10} + u\omega_{20})A + (\omega_1 + \varepsilon\omega_{11} + u\omega_{21})A_1 + (\omega_2 + \varepsilon\omega_{12} + u\omega_{22})A_2$, e, affinché $\mathcal{C}_0$ sia fissa, questo punto deve coincidere con

$$\rho M(u + \delta u) = \rho [A + \varepsilon A_1 + (u + \delta u)A_2],$$

da cui si ha, fra l'altro

$$\varepsilon\omega_{00} + \varepsilon^2(\omega_1 + \omega_2) - \varepsilon u\omega_1 = \omega_1 + \varepsilon\omega_{11} + u\omega_{21},$$

cioè

$$\varepsilon u\omega_1 + u\omega_{21} + \varepsilon(\omega_{11} - \omega_{00}) - \omega_2 = 0,$$

che deve valere per ogni u , e per $\varepsilon = \pm 1$: si trae $\omega_1 = \omega_2 = 0$. cioè $\mathcal{C}_0$ non può restar fissa.

OSSERVAZIONE. - Per quanto non abbia diretta attinenza con la questione di cui qui si tratta, vediamo se può accadere che una componente r di $\mathcal{C}_0$ (che possiamo supporre esser $x_1 = x_0$) resta fissa allorchè A descrive una curva. Le relazioni precedenti debbono essere verificate per $\varepsilon = +1$ (l'altra relazione, non scritta, si può sempre soddisfare dando un opportuno valore a δu). Quindi

$$\omega_{21} + \omega_1 = 0, \quad \omega_{11} - \omega_{00} - \omega_2 = 0$$

vale a dire

$$(12) \quad (1 - \lambda - \mu)\omega_1 - \lambda_2\omega_2 = \lambda_1\omega_1 + (\lambda + 1)\omega_2 = 0 \quad (\text{per } \omega_1, \omega_2 \text{ opportuni})$$

se la curva luogo dei punti per i quali r è la medesima non è canonica, si può assumere come $\omega_2 = 0$, e le trasformazioni per cui ciò accade sono individuate da

$$\begin{aligned} \omega_{10} &= \omega_1 + \omega_2 & \omega_{20} &= -\omega_1 & \omega_{21} &= -\omega_1 - \lambda_2\omega_2 \\ \omega_{00} - \omega_{11} &= \lambda\omega_2 & 2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} &= (2\lambda - 1)\omega_1 + \lambda_2\omega_2. \end{aligned}$$

Si verifica che le $\mathcal{C}$ analitiche soddisfacenti a tali condizioni dipendono da 3 funzioni arbitrarie d'una variabile.

Si constata invece che r non può rimaner fissa allorchè A descrive una curva canonica, e quindi, a fortiori, non può esser la medesima per tutti i punti A : infatti dalle (12) si ha, per $\omega_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda + 1 = 0$. Sostituendo nelle relazioni che, nell'op. cit. in ⁽²¹⁾, seguono le (9), si ha $\mu + 1 = 0$, e questa è incompatibile con l'ultima delle (9) stesse.

Consideriamo ora una $\mathcal{C}$ non parabolica: per essa valgono le

$$\begin{aligned} \omega_{10} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \omega_2, & \omega_{20} &= \frac{1}{1 - \gamma} \omega_1, \\ \omega_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \omega_1}, & \frac{d\gamma}{(\gamma - 1)^2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} (\omega_{22} + \omega_{11} - 2\omega_{00}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \omega_2}, \\ -\frac{d\gamma}{(\gamma - 1)^2} + \frac{1}{1 - \gamma} (\omega_{22} + \omega_{11} - 2\omega_{00}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \omega_1}, & \omega_{21} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \omega_2} \end{aligned}$$

si osservi che $A = A_0$, $a = [A_1 A_2]$, e le curve canoniche sono $\omega_1 \omega_2 = 0$ ⁽²²⁾.

La correlazione principale H è

$$u_1 = \frac{\gamma}{1 - \gamma} x_2, \quad u_2 = \frac{1}{\gamma - 1} x_1, \quad u_0 = x_0$$

e la conica $\mathcal{C}_0$ d'incidenza è $x_1 x_2 - x_0^2 = 0$, e quindi i suoi punti sono dati, al variare di u , da $M = uA + u^2 A_1 + A_2$: al variare di A , si ha

$$\begin{aligned} M + dM &= (u + u\omega_{00} + u^2\omega_{10} + \omega_{20})A + \\ &+ (u\omega_1 + u^2\omega_{11} + \omega_{21} + u^2)A_1 + (1 + u\omega_2 + u^2\omega_{12} + \omega_{22})A_2 \end{aligned}$$

imponiamo che questo coincida con

$$\rho M(u + \delta u) = \rho(u + \delta u)A + \rho(u^2 + 2u\delta u)A_1 + \rho A_2$$

al variare di A lungo un sistema di curve Λ ; si ha

$$\begin{aligned} u + u\omega_{00} + u^2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \omega_2 + \frac{1}{1 - \gamma} \omega_1 &= (1 + u\omega_2 + u^2\omega_{12} + \omega_{22})(u + \delta u) \\ u\omega_1 + u^2\omega_{11} + \omega_{21} + u^2 &= (1 + u\omega_2 + u^2\omega_{12} + \omega_{22})(u^2 + 2u\delta u): \end{aligned}$$

⁽²²⁾ Ψ_1, Ψ_2 sono forme quadratiche in ω_1, ω_2 . Si veda il n. 4 dell'op. cit. in ⁽²¹⁾.

e, trascurando gl'infinitesimi d'ordine superiore,

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{1}{1-\gamma} \omega_1 + u(\omega_{00} - \omega_{22}) + \frac{u^2}{\gamma-1} \omega_2 - u^3 \omega_{12} = \\ &= \frac{1}{2u} \{ \omega_{21} + u\omega_1 + u^2(\omega_{11} - \omega_{22}) - u^3\omega_2 - u^4\omega_{12} \}. \end{aligned}$$

Dovendo queste valere per ogni u , deve aversi, lungo le curve Λ

$$\omega_{21} = \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \omega_1 = 2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \omega_2 = \omega_{12} = 0.$$

È quindi necessario e sufficiente che sia anzitutto $\gamma + 1 = 0$ (altrimenti $\omega_1 = \omega_2 = 0$) e quindi $\mathcal{C}$ è una corrispondenza polare ⁽²⁴⁾ ed H è la polarità tangente ⁽²⁵⁾. H è quindi completamente individuata da $\mathcal{C}_0$, e le condizioni trovate sono necessarie e sufficienti affinché H sia fissa ⁽²⁶⁾.

Le curve caratteristiche sono le curve Λ e due sistemi coniugati armonicamente rispetto alle curve canoniche (oppure tali sistemi coincidono in un sistema di curve canoniche, o sono indeterminati). Infatti le curve caratteristiche sono, per una corrispondenza polare

$$\Psi_1 \omega_1 - \Psi_2 \omega_2 = 0,$$

vale a dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \omega_1} (\omega_1)^2 + \omega_1 \omega_2 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \omega_2} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \omega_1} \right) - (\omega_2)^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \omega_2} &\equiv \\ &\equiv \omega_{12} (\omega_1)^2 - \omega_{21} (\omega_2)^2 = 0. \end{aligned}$$

⁽²⁴⁾ Cfr. G. FUBINI - E. ČECH, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, (Gauthier Villars, Paris 1931), p. 153; A. TERRACINI, *Densità di una corrispondenza di tipo dualistico, ed estensione dell'invariante di Mehmke-Segre*, «Atti Accad. Sci. Torino», Vol. 71, p. 310 (1935-1936)

⁽²⁵⁾ Cfr. F. SPERANZA, *Le trasformazioni dualistiche in S_r proiettivo la cui correlazione associata è involutoria*, «Atti Acc. Sci. Ist. Bologna», (Ser. XI) T. V, p. 101 (1908); v. il n. 3.

⁽²⁶⁾ Si dimostra che esistono $\mathcal{C}$ analitiche soddisfacenti alle nostre condizioni e che esse dipendono da 2 funzioni arbitrarie d'una variabile.

Ma ω_{12} , ω_{21} , che si annullano contemporaneamente per un opportuno valore di $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, sono proporzionali ad una medesima forma ω , o nulli: e quindi l'equazione delle curve caratteristiche è del tipo

$$\{ A(\omega_1)^2 + B(\omega_2)^2 \} \omega = 0,$$

da cui l'asserto.

È noto che una corrispondenza polare si ottiene considerando una superficie F d'un $P_3 \supset P_2$ ed associando ogni punto e ogni retta che siano rispettivamente proiezione su P_2 da un punto fisso B d'un punto O di F , e sezione di P_2 con il piano tangente ad F in O ⁽²⁷⁾. Si constata facilmente che se due superficie F , F' si osculano in un punto O le corrispondenze polari $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ che se ne ottengono sono tangenti, e viceversa ⁽²⁸⁾; mentre se F , F' hanno le medesime tangenti asintotiche, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono quasi prossime del 1° ordine (B essendo sempre il medesimo).

Ora, la polarità tangente a $\mathcal{C}$ in (A, a) si ottiene considerando una quadrica osculatrice ad F in O , per cui B e P_2 siano polo e polare.

Una polarità d'altronde si può ottenere da una qualsiasi delle ∞^1 quadriche passanti per la sua conica fondamentale e tale che B e P_2 siano coniugati.

Assumiamo P_2 come piano improprio; perchè $\mathcal{C}$ sia del tipo studiato, è necessario e sufficiente che la F possieda un sistema ∞^1 di curve tali che, detta γ una qualunque di esse, in ogni punto di γ si possa trovare una quadrica osculatrice Q_0 , in modo che le Q_0 relative ai punti di γ abbiano il medesimo cono asintotico.

Si pone infine il problema di determinare le $\mathcal{C}$ per cui H è fissa. Allora si deve avere identicamente

$$\gamma = -1, \quad \omega_{21} = 2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} = \omega_{12} = 0,$$

e quindi ⁽²⁹⁾ $\mathcal{C}$ è una polarità (rispetto ad una conica).

⁽²⁷⁾ Cfr. l. cit. in ⁽²⁴⁾.

⁽²⁸⁾ Cfr. E. ČECH, *Quadriques osculatrices à centre donné et leur signification projective*, « C. R. de la Soc. des Sc. et Lettr. de Wroclaw », Vol. 7 (1952).

⁽²⁹⁾ Cfr. F. SPERANZA, op. cit. in ⁽²¹⁾, n. 5.