Bollettino Unione Matematica Italiana

Marialuisa De Socio

Su una proprietà della propagazione in un gas ionizzato.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.3, p. 343–350.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_3_343_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Su una proprietà della propagazione in un gas ionizzato

Nota di MARIALUISA DE SOCIO (a Milano) (*)

Sunto. - *Si dimostra che nella propagazione di un campo elettromagnetico in un gas ionizzato le discontinuità delle derivate seconde del campo sul fronte tendono all'infinito se si ammettono valide le usuali relazioni tra campo elettrico e velocità media dei corpuscoli*

I) In una ricerca che ho in corso sul trasporto di una dicontinuità del campo elettromagnetico in un gas ionizzato, ho osservato che se si ammettono le usuali relazioni tra campo elettrico e velocità media dei corpuscoli, le discontinuità delle derivate seconde del campo possono anche tendere all'infinito al propagarsi dell'onda e ciò anche quando si tiene conto della dissipazione d'energia per effetto degli urti fra corpuscoli e molecole neutre. Poichè il risultato mi è sembrato un po' paradossale, ho creduto opportuno, limitandomi al caso delle onde piane, di dimostrarlo in due modi diversi, sia partendo dalle formule per il trasporto delle discontinuità, che dalle formule generali per le onde piane in un gas ionizzato; i risultati ottenuti con i due metodi sono risultati ovviamente identici.

Ammettendo però nel gas una conduttività di tipo ordinario, anche piccolissima (cioè ammettendo nella densità di corrente anche un termine proporzionale al campo elettrico), il paradosso si elimina e il campo con le sue derivate si annulla all'infinito.

II) Consideriamo un'onda elettromagnetica piana propagantesi in un gas ionizzato. Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con l'asse z coincidente con la direzione di propagazione dell'onda, gli assi x e y con la direzione del campo elettrico $\boldsymbol{E}$ e del campo magnetico $\boldsymbol{H}$ [1] (sicchè $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{i}$; $\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{j}$) le equa di MAXWELL, proiettate sugli assi x e y si scrivono:

$$(1) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial z} = \varepsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} + j \\[2ex] \dfrac{\partial E}{\partial z} = -\mu \dfrac{\partial H}{\partial t}, \end{cases}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 21 luglio 1964.

(1) Il campo elettrico e il campo magnetico si suppongono di direzione invariabile nello spazio e nel tempo. È noto che a questa ipotesi è sempre possibile ricondursi se le equazioni di MAXWELL sono lineari.

ove j è l'unica componente non nulla del vettore densità di corrente $\boldsymbol{j}$ vettore che, com'è noto e come del resto verificherò tra poco, è parallelo al campo elettrico $\boldsymbol{E}$, cioè all'asse x, mentre ε e μ sono rispettivamente costante dielettrica e permeabilità magnetica del gas non ionizzato.

È noto che, trascurando il contributo degli joni, per $\boldsymbol{j}$ si ha l'espressione

$$\boldsymbol{j} = Ne\boldsymbol{v}, \tag{2}$$

dove e è la carica elettrica di un elettrone, N il loro numero per unità di volume, $\boldsymbol{v}$ la loro velocità media.

Nelle teorie usuali (²) sulla propagazione in un gas ionizzato si ammette tra velocità media e campo elettrico la relazione:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E} - \nu \boldsymbol{v}, \tag{3}$$

con m massa dell'elettrone, ν numero dei loro urti per unità di tempo. Da questa equazione si ha subito $\boldsymbol{v}$ (supposto $\boldsymbol{v}(0) = 0$) parallelo ad $\boldsymbol{E}$, cioè all'asse x, sicchè delle (2) e (3) si possono considerare le proiezioni sull'asse x e sostituire ad $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{E}$ le loro componenti j, v, E.

Supponiamo ora che nel piano $z = ct$ le derivate prime del campo $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ subiscano una discontinuità, anzi ammettiamo che il piano in discorso sia un fronte d'onda, cioè per $z \geq ct$ $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ siano identicamente nulle. Perciò per i valori delle derivate di $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ sul fronte assumeremo i limiti di queste grandezze per z tendente a ct da valori inferiori a ct.

Consideriamo allora le equazioni (1) sul fronte d'onda dove è sempre $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ e, come risulta da (2) e (3), $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{j}$ uguali a zero. Si ha:

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \\ \frac{\partial E}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}\right. \tag{1'}$$

(²) Cfr. per es., H. Bremmer, *Propagation of electromagnetic waves*, S. Flugge - Handbuch Der Physik - Springer - Berlino vol. XVI pag 545.
In questa nota trascurerò l'azione del campo magnetico sugli elettroni.

Poichè anche le derivate totali di $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ sono nulle sul fronte, ossia:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial E}{\partial t}+c\frac{\partial E}{\partial z}=0\\&\frac{\partial H}{\partial t}+c\frac{\partial H}{\partial z}=0,\end{aligned}\right.$$

le (1′) si scrivono

$$(1'')\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial t}-c\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}=0\\&-\frac{\partial E}{\partial t}+\mu c\frac{\partial H}{\partial t}=0.\end{aligned}\right.$$

Tale sistema omogeneo nelle $\frac{\partial E}{\partial t}$, $\frac{\partial H}{\partial t}$ ammette soluzioni non nulle se e solo se è nullo il determinante dei coefficienti, ovvero se $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Si ritrova così un risultato ben noto per la velocità di propagazione del fronte d'onda.

Deriviamo totalmente la 2ª equazione di (1″); si ha, naturalmente sempre sul fronte:

$$(4)\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)=\mu c\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}+c\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial z}\right),$$

mentre dalle equazioni (1) derivate parzialmente rispetto a t si ha, tenendo presente la (2):

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-Ne\frac{\partial v}{\partial t}\\&\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E}{\partial z\partial t},\end{aligned}\right.$$

quindi sostituendo in (4) e ricordando che sul fronte è $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{v}=0$, quindi $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{e}{m}E-\nu v=0$, si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)=-c\frac{\partial^2 E}{\partial z\partial t}-\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

$$2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)=0$$

$$(6)\qquad\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{t=z/c}=E_0'(0),$$

ove con $E_0'(0)$ si indica la derivata rispetto a t dell'intensità del campo elettrico sul piano $z = 0$ all'istante $t = 0$.

La derivata parziale prima di E rispetto a t è quindi costante sul fronte d'onda. Per le (1') della stessa proprietà gode $\frac{\partial H}{\partial t}$.

Per il calcolo di $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$, osserviamo che derivando totalmente la (6) si ha sul fronte:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -c\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial z},$$

quindi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right) = -c\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial z}\right) = -c\left(\frac{\partial^3 E}{\partial t^2 \partial z} + c\frac{\partial^3 E}{\partial t \partial z^2}\right). \tag{7}$$

Dalle (5) si ha, derivando la 2ª equazione rispetto a z e la prima rispetto a t:

$$\frac{\partial^3 E}{\partial z^2 \partial t} = -\mu\frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial z} = \mu\left(\varepsilon\frac{\partial^3 E}{\partial t^3} + Ne\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)$$

quindi, sostituendo in (7) dopo aver derivato parzialmente la (3) rispetto a t, tenendo presente che $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ sul fronte:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right) = -c\frac{\partial^3 E}{\partial t^2 \partial z} - \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} - \frac{Ne}{\varepsilon}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right) = -\frac{Ne^2}{m\varepsilon}E_0'(0) \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right)_{t=z/c} = E_0''(0) - \frac{Ne^2}{2m\varepsilon}\frac{z}{c}E_0'(0). \tag{9}$$

Si ha così che, nonostante la presenza del termine dissipativo $-\nu v$ nella (3), la derivata seconda rispetto al tempo del campo sul fronte d'onda tende all'infinito al propagarsi del fronte stesso.

Risultati analoghi si potrebbero ottenere per le altre derivate di $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$.

III) Notiamo che se fosse:

$$\boldsymbol{j} = Ne\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{E},$$

con v ancora determinata dalla (3), cioè se il gas ionizzato si comportasse anche come un mezzo ordinario di conduttività positiva γ, a secondo membro della prima equazione del sistema (5) si aggiungerebbe il termine $-\gamma \dfrac{\partial E}{\partial t}$ e la (6) risulterebbe:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) = -\frac{\gamma}{2\varepsilon}\frac{\partial E}{\partial t},$$

da cui

$$\frac{\partial E}{\partial t} = E_0'(0)\exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}t\right). \tag{6'}$$

In modo analogo [3] la (8) diverebbe:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right) = -\frac{\gamma}{2\varepsilon}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon^2} - \frac{Ne^2}{m\varepsilon}\right)E_0'(0)\exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}t\right),$$

[3] È infatti sul fronte d'onda

$$\frac{\partial E}{\partial t} = E'_0(0)\exp\left(-\frac{\gamma}{2_-}t\right) \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -c\frac{\partial^2 E}{\partial t\,\partial z} - \frac{\gamma}{2\varepsilon}E'_0(0)\exp\left(-\frac{\gamma t}{2\varepsilon}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right) = -c\left(\frac{\partial^3 E}{\partial t^2 \partial z} + c\frac{\partial^3 E}{\partial t \partial z^2}\right) + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon^2}E'_0(0)\exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}t\right)$$

Ma dal sistema (5) si ottiene:

$$\frac{\partial^3 E}{\partial z^2 \partial t} = -\mu\frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial z} = -\mu\left(-\varepsilon\frac{\partial^3 E}{\partial t^3} - Ne\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \gamma\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right)$$

e quindi, derivando anche la (3) parzialmente rispetto a t e sapendo che $\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$ sul fronte:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right) = -c\frac{\partial^3 E}{\partial t^2 \partial z} - \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} - \frac{Ne^2}{m\varepsilon}\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\gamma}{\varepsilon}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon^2}E'_0(0)\exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}t\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right) = -\frac{\gamma}{2\varepsilon}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{4_-^2} - \frac{Ne^2}{m\varepsilon}\right)E'_0(0)\exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}t\right)$$

L'integrale generale è del tipo:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = k(t)\exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}t\right)$$

con:

$$k(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon^2} - \frac{Ne^2}{m\varepsilon}\right)E'_0(0)t + c \quad \text{e} \quad c = E''_0(0),$$

conforme la (9') del testo.

da cui, ricordando che è $t = \frac{z}{c}$

$$(9') \quad \left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right)_{t=z/c} = E_0''(0) \exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}\frac{z}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon^2} - \frac{Ne^2}{m\varepsilon}\right)\frac{z}{c} E_0'(0) \exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}\frac{z}{c}\right).$$

In tal caso dunque la discontinuità del campo elettrico sul fronte tenderebbe a zero al propagarsi del fronte stesso.

La (9') ovviamente coincide con la (9) per $\gamma = 0$.

IV) I risultati ottenuti nei paragrafi precedenti si possono confermare per altra via.

Poichè per $t = 0$ il fronte d'onda giace sul piano $z = 0$, si ha, per $z > 0$ e $t = 0$, $v = 0$; Quindi dalla (3) si ottiene:

$$v = \frac{e}{m}\int_0^t \exp[-\nu(t-\tau)] E(\tau) d\tau.$$

Allora, supposto per maggior generalità che la densità di corrente contenga anche un termine proporzionale al campo elettrico, le equazioni di MAXWELL si scrivono:

$$(1'') \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial z} = \varepsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} + \gamma E + \dfrac{Ne^2}{m}\displaystyle\int_0^t \exp[-\nu(t-\tau)] E(\tau) d\tau \\ \dfrac{\partial E}{\partial z} = -\mu \dfrac{\partial H}{\partial t} \end{cases}$$

Eliminiamo H tra le due equazioni del sistema; otteniamo, derivando la prima equazione rispetto a t, la 2ª rispetto a z:

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{Ne^2}{m}\nu \int_0^t \exp[-\nu(t-\tau)] E(\tau) d\tau + \frac{Ne^2}{m} E(t)$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial z} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$$

e quindi:

$$(10) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \gamma\mu \frac{\partial E}{\partial t} -$$

$$-\frac{Ne^2\nu\mu}{m}\int_0^t \exp[-\nu(t-\tau)] E(\tau) d\tau + \frac{Ne^2}{m}\mu E(t)$$

che costituisce un caso particolare di un'equazione studiata dal GRAFFI ([4]) e generalizzante la nota equazione dei telegrafisti.

La soluzione della (10) è stata calcolata dal GRAFFI ed è (indicato per comodità $\frac{\gamma}{2\varepsilon} = \alpha$, $\frac{\gamma^2}{4\varepsilon^2} - \frac{Ne^2}{m\varepsilon} = \beta^2$):

$$(11) \qquad E(t, z) = E_0\left(t - \frac{z}{c}\right) \exp\left(-\alpha \frac{z}{c}\right) + \frac{z}{c}\beta^2 \int_0^t F_1(t - \tau, z) E_0(\tau) d\tau,$$

ove è: $E_0(t) = E(t, 0)$ e:

$$(12) \qquad F_1(t, z) = \exp(-\alpha t) \frac{I_1(\beta \sqrt{t^2 - z^2/c^2})}{\beta \sqrt{t^2 - z^2/c^2}} 1(t - z/c) + F_2(t, z)$$

con $I_1(x)$ funzione di BESSEL non oscillante di indice uno, mentre $1(t)$ indica al solito una-funzione nulla per $t < 0$, uguale ad uno per $t \geq 0$. $F_2(t, z)$ è poi data da:

$$(13) \qquad F_2(t, z) = \exp(-\alpha t) \sum_0^\infty {}_r \frac{(\beta \sqrt{t^2 - z^2/c^2})^r I_r(\beta \sqrt{t^2 - z^2/c^2}) 1(t - z/c)}{2^{r+1}(r+1)!} * G_{r+1}(t)$$

ove $G_1(t) = K \exp(-\nu t)$, $K = \frac{Ne^2\nu}{\frac{\gamma^2 m}{4\varepsilon} - Ne^2}$ e $G_{r+1}(t)$ è ottenuta per induzione in base alla formula:

$$G_{r+1}(t) = G_r(t) * G_1(t)$$

ed il simbolo $*$ indica il prodotto di composizione ([5]).

Nel nostro caso si ottiene quindi:

$$G_{r+1}(t) = \frac{K^{r+1} t^r}{r!} \exp(-\nu t).$$

([4]) D. GRAFFI, *Sulla propagazione nei mezzi dispersivi*, « Annali di matematica pura ed applicata », Serie IV, Tomo LX, 1963 pp. 173-194.

([5]) Cioè:

$$G_r(t) * G_1(t) = \int_0^t G_r(t - \tau) G_1(\tau) d\tau$$

Osserviamo subito da (13) che per $t=\frac{z}{c}$ è $F_2(t, z)=0$. Inoltre si ha, sempre sul fronte, che il contributo di $F_2(t, z)$ a $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ è nullo. Infatti:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_0^{t-z/c} F_2(t-\tau, z)E_0(\tau)d\tau\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^{t-z/c}\frac{\partial F_2(t-\tau, z)}{\partial t}E_0(\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+F_2\left(\frac{z}{c}, z\right)E_0\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]=\int_0^{t-z/c}\frac{\partial^2 F_2(t-\tau, z)}{\partial t^2}E_0(\tau)d\tau+\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial t}\right)_{t=z/c}E_0\left(t-\frac{z}{c}\right)$$

nulla per $t=\frac{z}{c}$, perchè tale é $E_0(0)$.

Si ha così sul fronte d'onda (essendo $E_0(z/c)=0$):

$$\left[\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right]_{t=z/c}=\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\exp\left(-\alpha\frac{z}{c}\right)E_0\left(t-\frac{z}{c}\right)+\frac{\beta^2 z}{c}\int_0^{t-z/c}\exp(-\alpha\tau)\frac{I_1(\beta\sqrt{\tau^2-z^2/c^2})}{\beta\sqrt{\tau^2-z^2/c^2}}E_0(t-\tau)d\tau\right]\right\}_{t=z/c}=$$

$$=\exp\left(-\frac{\alpha z}{c}\right)E_0''(0)+\frac{\beta^2 z}{c}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^{t-z/c}\exp(-\alpha\tau)\frac{I_1(\beta\sqrt{\tau^2-z^2/c^2})}{\beta\sqrt{\tau^2-z^2/c^2}}E_0'(t-\tau)d\tau\right]_{t=z/c}=$$

$$=\exp\left(-\frac{\alpha z}{c}\right)E_0''(0)+\frac{\beta^2 z}{c}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{t-z/c}\exp[-\alpha(t-\tau)]\frac{I_1(\beta\sqrt{(t-\tau)^2-z^2/c^2})}{\beta\sqrt{(t-\tau)^2-z^2/c^2}}E_0'(\tau)d\tau\right]_{t=z/c}=$$

$$=\exp\left(-\frac{\alpha z}{c}\right)E_0''(0)+\frac{\beta^2 z}{c}\left\{\int_0^{t-z/c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\exp(-\alpha(t-\tau))\frac{I_1(\beta\sqrt{(t-\tau)^2-z^2/c^2})}{\beta\sqrt{(t-\tau)^2-z^2/c^2}}E_0'(\tau)\right]d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\exp\left(-\alpha\frac{z}{c}\right)E_0'\left(t-\frac{z}{c}\right)\right\}_{t=z/c}=E_0''(0)\exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}\frac{z}{c}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon^2}-\frac{Ne^2}{m\varepsilon}\right)\frac{z}{c}E_0'(0)\exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}\frac{z}{c}\right)$$

che coincide con la (9').