
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CARLO PUCCI

Sulla regolarità interna delle soluzioni di alcune equazioni ellittiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 19
(1964), n.3, p. 334–342.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_3_334_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla regolarità interna delle soluzioni di alcune equazioni ellittiche (*)

Nota di CARLO PUCCI (a Genova)

Sunto. - *Si prova una limitazione per una derivata prima ed un coefficiente di Hölder delle soluzioni di equazioni lineari ellittiche del secondo ordine con coefficienti, in parte, non dipendenti da una variabile.*

Siano $a_{ij}(x)$, $f(x)$ funzioni misurabili nella sfera $S \equiv \{x; |x - x^0| < r\}$ di R^m . Si considera l'equazione a derivate parziali

$$(1) \quad \sum_{i,j}^{1,m} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f \quad \text{in } S,$$

nell'ipotesi di uniforme ellitticità:

$$(2) \quad \alpha |\lambda|^2 \leq \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j \leq \alpha^{-1} |\lambda|^2 \quad \text{in } S,$$

con α costante positiva minore di 1.

I. - *Se i coefficienti a_{ij} , per $i, j \leq m-1$, non dipendono da x_m , esiste una costante h_α dipendente solo da α e da m , tale che per ogni funzione di classe $C^{(2)}$ in S , ivi soluzione della (1), risulta:*

$$(3) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_m}(x^0) \right| \leq h_\alpha \left\{ r^{-1} \sup_{|x-x^0|<r} |u(x) - u(x^0)| + r \sup_{|x-x^0|<r} |f(x)| \right\}.$$

Si noti in particolare che la costante h_α non dipende dalla continuità dei coefficienti.

Dal teorema segue immediatamente un precedente risultato

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. l'11 luglio 1964.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 23 del Comitato nazionale per la matematica per l'anno accademico 1962-63; parte di questo lavoro è già stata pubblicata in *Lectures on Cauchy Problem and on Elliptic Equations*. « Nat. Science Found., Summer Inst. in Applied Math. », Rice University 1963.

relativo al caso $m=2$: *Limitazione per il gradiente di una soluzione di una equazione di tipo ellittico*, « Le Matematiche » XVI 1961. La dimostrazione è ottenuta con un procedimento analogo a quello seguito in detta nota, consistente nel considerare una equazione ellittica ausiliaria in $m+1$ variabili.

Il procedimento è suscettibile di estensioni; come esempio di ciò si prova nel caso particolare $m=3$, mediante una equazione ellittica ausiliaria in 5 variabili, una maggiorazione a priori del coefficiente di HÖLDER relativo all'esponente $\frac{1}{2}$ delle soluzioni della (1), all'interno, nelle stesse ipotesi del teorema.

Questi risultati sono estensibili alle equazioni lineari ellittiche

$$\sum a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f,$$

con il procedimento seguito in una nota di Battezzati (*).

1. La dimostrazione del teorema I è fondata sul seguente lemma algebrico dovuto a WOLF GROSS.

II. - Siano A_{ij} matrici reali con p_i righe e p_j colonne, $i, j = 1, 2, 3$, e sia

$$A_{ij} = A'_{ji}, \quad A_{2,3} = A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}.$$

Indicato con $x^{(i)}$ un vettore reale a p_i componenti consideriamo la forma quadratica

$$(4) \quad \sum_{i,j}^{1,3} (x^{(i)}, A_{ij} x^{(j)}),$$

e supponiamo che le due forme quadratiche che si ottengono da essa ponendo $x^{(2)} \equiv 0$ e $x^{(3)} \equiv 0$ siano definite positive con autovalori in $[\alpha, \alpha^{-1}]$, α costante positiva minore di 1. In queste ipotesi la (4) è definita positiva con autovalori compresi in $[\beta, \beta^{-1}]$, essendo $0 < \beta < 1$ e β dipendente solo da α, p_1, p_2 e p_3 .

(*) M. BATTEZZATI, *Limitazioni del gradiente di soluzioni di equazioni di tipo ellittico*, in corso di pubblicazione su *Rivista di matematica dell'Università di Parma*.

Posto

$$\xi = x^{(1)} + A_{11}^{-1} A_{12} x^{(2)} + A_{11}^{-1} A_{13} x^{(3)},$$

risulta

$$\begin{aligned} (\xi, A_{11} \xi) &= (x^{(1)}, A_{11} x^{(1)}) + 2(x^{(1)}, A_{12} x^{(2)}) + 2(x^{(1)}, A_{13} x^{(3)}) + \\ &+ (x^{(2)}, A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} x^{(2)}) + (x^{(3)}, A_{31} A_{11}^{-1} A_{13} x^{(3)}) + 2(x^{(2)}, A_{21} A_{11}^{-1} A_{13} x^{(3)}); \end{aligned}$$

con la posizione

$$B = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}, \quad C = A_{33} - A_{31} A_{11}^{-1} A_{13}.$$

si ottiene

$$\sum_{i,j}^{1,3} (x^{(i)}, A_{ij} x^{(j)}) = (\xi, A_{11} \xi) + (x^{(2)}, B x^{(2)}) + (x^{(3)}, C x^{(3)}).$$

Per $\xi = 0$, $x^{(3)} = 0$, $x^{(2)} \neq 0$ dalle ipotesi segue $(x^{(2)}, B x^{(2)}) > 0$ e quindi B è definita positiva; analogamente C è definita positiva e pertanto la forma quadratica (4) è definita positiva.

Indichiamo con A la forma quadratica (4) e con α_A e β_A il più piccolo ed il più grande autovalore di A .

Abbiamo provato che $\alpha_A > 0$. I coefficienti di A possono essere riguardati come coordinate di un punto P di uno spazio euclideo, punto che individua univocamente A . L'insieme E dei punti P , per i quali sono soddisfatte le ipotesi del teorema su A , è chiuso e limitato. In E le funzioni α_A e β_A sono continue e quindi dotate di minimo positivo e di massimo. Esiste pertanto un β tale che $0 \leq \beta \leq \alpha_A \leq \beta_A \leq \beta^{-1}$, β dipendente solo da α , p_1 , p_2 e p_3 .

2. Diamo ora la dimostrazione del teorema I. Sia u una funzione limitata di classe $C^{(2)}$ in S , ivi soluzione della (1). Si suppone f limitata in S ; in caso contrario ovviamente la (3) sussiste. Ad ogni punto $z = (x_1, \dots, x_{m+1})$ di R^{m+1} associamo i punti $x \equiv (x_1, \dots, x_m)$ ed $x' \equiv (x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1})$ di R^m . Sia $z^0 \equiv (x_1^0, \dots, x_m^0, x_{m+1}^0)$ e

$$T = \{z : |x - x^0| < r, |x' - x^0| < r, x_m < \dot{x}_{m+1}\}.$$

Consideriamo in T la funzione

$$v(z) = u(x) - u(x').$$

per ipotesi $a_{ij}(x) = a_{ij}(x')$ per $i, j < m$ e pertanto sottraendo membro a membro dalla equazione (1) calcolata nel punto x la stessa calcolata nel punto x' si ottiene

$$\sum_{i,j}^{1, m-1} a_{ij}(x)[u_{ij}(x) - u_{ij}(x')] + a_{mm}(x)u_{mm}(x) - a_{mm}(x')u_{mm}(x') + \\ + 2 \sum_{i=1}^{m-1} a_{im}(x)u_{ij}(x) - 2 \sum_{i=1}^{m-1} a_{ij}(x')u_{im}(x') = f(x) - f(x').$$

Si ha quindi

$$(5) \quad \sum_{i,j}^{1, m+1} \alpha_{ij}(z)v_{ij}(x) = f(x) - f(x') \quad \text{in } T,$$

avendo posto

$$\alpha_{ij}(z) = a_{ij}(x), \quad i, j \leq m; \\ \alpha_{i, m+1}(z) = a_{im}(x'), \quad i < m, \quad \alpha_{m+1, i} = \alpha_{i, m+1}; \\ \alpha_{m+1, m+1}(z) = a_{mm}(x');$$

$\alpha_{m, m+1}$ può essere fissato arbitrariamente essendo $v_{m, m+1} = 0$, e pertanto, in base al lemma precedentemente dimostrato, $\alpha_{m, m+1}$ può essere definito in modo che

$$(6) \quad \beta |\lambda|^2 \leq \sum_{i,j}^{1, m+1} \alpha_{ij}(z) \lambda_i \lambda_j \leq \beta^{-1} |\lambda|^2 \quad \text{in } T,$$

con β costante positiva dipendente solo da α ed m .

Poniamo

$$B = \partial T \cap \{z : x_{m+1} = x_m'\}.$$

$$\bar{z} = \left(x_1^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \frac{1}{2}r, x_m^0 - \frac{1}{2}r \right), \quad \rho = |z - \bar{z}|.$$

Risulta

$$\begin{aligned} \rho^2 &= |x - x^0|^2 - (x_m - x_m')^2 + \left(x_m - x_m^0 - \frac{1}{2}r\right)^2 + \left(x_{m+1} - x_m^0 + \frac{1}{2}r\right)^2 = \\ &= |z - z^0|^2 + r(x_{m+1} - x_m) + \frac{1}{2}r^2, \end{aligned}$$

$$(7) \quad \rho^2 > \frac{1}{2}r^2, \quad \text{per } z \in T - \{z^0\}, \quad |z^0 - \bar{z}| = \frac{1}{2}r^2.$$

Inoltre

$$|z - z^0|^2 > r^2 \quad \text{per } z \in \partial T - B,$$

ed essendo

$$\rho^2 \geq |z - z^0|^2 + \frac{1}{2} r^2,$$

si ha

$$(8) \quad \rho^2 > \frac{3}{2} r^2 \quad \text{per } z \in \partial T - B.$$

Poniamo

$$n = \frac{m}{2\beta^2}, \quad v(z) = 2^n - \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2n}.$$

Risulta per la (7):

$$(9) \quad v(z) > 0 \quad \text{in } \bar{T} - \{z^0\}, \quad v(z_0) = 0,$$

e per la (8):

$$(10) \quad v(z) > 2^n(1 - 3^{-n}) \quad \text{per } z \in \partial T - B.$$

Si ha

$$v_{ij} = r^{2n} \rho^{-2n-2} 2n \left[\delta_{ij} - (2n+2) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right],$$

$$\sum \alpha_{ij} v_{ij} = r^{2n} \rho^{-2n-2} 2n \left[\sum \alpha_{ii} - (2n+2) \sum \alpha_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right]$$

e per la (6) e la definizione di n

$$(11) \quad \sum \alpha_{ij} v_{ij} \leq -r^{2n} \rho^{-2n-2} \frac{m}{\beta} \leq r^{-2} \frac{m}{\beta} \quad \text{in } T.$$

Posto

$$(12) \quad M = 2^{-n+1}(1-3^{-n})^{-1} \max_{|x-x^0|<r} |u(x) - u(x^0)| + \frac{\beta}{2m} r^2 \sup_{|x-x^0|<r} |f(x)|,$$

risulta

$$\sum \alpha_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (Mv \pm v) \leq 0 \quad \text{in } T,$$

$$Mv \pm v \geq 0 \quad \text{su } \partial T,$$

e quindi per il principio di massimo

$$(13) \quad |v| \leq Mv \quad \text{in } \bar{T}.$$

In particolare si ottiene per $0 < h < r$

$$(14) \quad |u(x^0) - u(x_1^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + h)| \leq \\ \leq M \left\{ 2^n - \frac{r^{2n}}{\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(h + \frac{r}{2}\right)^2 \right]^n} \right\},$$

dividendo ambo i membri per h e passando al limite per h tendente a zero si ha

$$|u_m(x^0)| \leq 4^{n+1} n M,$$

e quindi la tesi.

3. Osserviamo che dalla dimostrazione segue un risultato più generale dell'enunciato del teorema I. Notiamolo esplicitamente perchè ci occorre in seguito.

Risulta dalla definizione di v

$$v(z) \leq 2^{n+1} n \frac{|z - z_0|}{r} \quad \text{per } z \in T$$

e quindi dalle (12), (13) segue per $z = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in T$

$$(15) \quad |u(x_1, \dots, x_m) - u(x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1})| \leq \\ \leq h'_2 (r^{-1} \sup_{|x-x^0|<r} |u(x) - u(x^0)| + r \sup_{|x-x^0|<r} |f(x)|) |z - z^0|.$$

In particolare sussiste il seguente teorema

III. Nelle ipotesi del teorema I. esiste una costante h'_α , dipendente solo da α e n , tale che per ogni funzione di classe $C^{(2)}$ in S , ivi soluzione della (1) risulta:

$$(16) \quad |u(x^0) - u(x_1^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + h)| \leq \\ \leq h'_\alpha \{ r^{-1} \sup_{|x-x^0|<r} |u(x) - u(x^0)| + r \sup_{|x-x^0|<r} |f(x)| \} h, \quad \text{per } |h| < r.$$

4. Nel caso $m = 2$ si ottiene come immediato corollario del teorema III il seguente teorema.

IV. - Se i coefficienti $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2$, soddisfano alla condizione (2) di uniforme ellitticità, esiste una costante h_α , dipendente solo da α , tale che per ogni funzione di classe $C^{(2)}$ in S , ivi soluzione della (1), risulta

$$(17) \quad |u(x) - u(x^0)| \leq h_\alpha \{ r^{-1} \sup_{|x-x^0| < r} |u(x) - u(x^0)| + \\ + r \sup_{|x-x^0| < r} |f(x)| \} |x - x^0|, \quad \text{per } x \in S.$$

Siccome $\alpha \leq a_{11} \leq \alpha^{-1}$, la u è soluzione della equazione uniformemente ellittica

$$u_{11} + 2 \frac{a_{12}}{a_{11}} u_{12} + \frac{a_{22}}{a_{11}} u_{22} = \frac{f}{a_{11}};$$

il coefficiente di x_1 non dipende da x_2 e quindi per il teorema I sussiste la limitazione (16) per $|u(x^0) - u(x_1^0 + h, x_2^0)|$.

Per l'invarianza delle ipotesi rispetto a rotazioni di centro x^0 la (17) è provata.

5. Stabiliamo ora la regolarità all'interno per le soluzioni di certe equazioni ellittiche in tre variabili.

Il procedimento è suscettibile di estensioni al caso di m variabili.

V. - Sia u una funzione di classe $C^{(2)}$ nella sfera S di centro x^0 e raggio r , soluzione della equazione

$$(18) \quad \sum_{i,j}^{1,2} a_{ij}(x) u_{ij}(x) = f(x) \quad \text{in } S,$$

con f limitata in S ed i coefficienti a_{ij} verificanti le ipotesi di uniforme ellitticità (2). Se a_{ij} , per $i, j = 1, 2$, non dipende da x_2 esiste una costante τ_α , dipendente solo dalla costante di ellitticità α , tale che

$$(19) \quad |u(x) - u(x^0)| \leq \tau_\alpha (r^{-\frac{1}{2}} \sup_{|x-x^0| < r} |u(x) - u(x^0)| + \\ + r^{\frac{3}{2}} \sup_{|x-x^0| < r} |f(x)|) |x - x^0|^{\frac{1}{2}}, \quad x \in S.$$

Supponiamo dapprima $r = 1$.

Ad ogni punto $z \equiv (x_1, \dots, x_5)$ di R^5 associamo i punti di R^3 $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$, $x' \equiv (x_1, x_4, x_5)$. Sia $z^0 \equiv (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0)$ e

$$T \equiv \{z: |x - x^0| < 1, |x' - x^0| < 1, x_2 < x_4\}.$$

Consideriamo in T la funzione

$$v(z) = u(x) - u(x').$$

Dividiamo la equazione (18) calcolata nel punto x [nel punto x'] per $a_{11}(x)$ [per $a_{11}(x')$]; sottraendo membro a membro la seconda equazione così ottenuta dalla prima si ottiene

$$\begin{aligned} u_{11}(x) - u_{11}(x') + \sum_{i,j}^{2,3} \frac{a_{ij}(x)}{a_{11}(x)} u_{ij}(x) - \sum_{i,j}^{2,3} \frac{a_{ij}(x')}{a_{11}(x')} u_{ij}(x') + \\ + 2 \sum_{i=2}^3 \frac{a_{1i}(x)}{a_{11}(x)} u_{1i}(x) - 2 \sum_{i=2}^3 \frac{a_{1i}(x')}{a_{11}(x')} u_{1i}(x') = \frac{f(x)}{a_{11}(x)} - \frac{f(x')}{a_{11}(x')}. \end{aligned}$$

Siccome

$$v_{i,j+2} = 0 \quad \text{per } i, j = 2, 3$$

si ha

$$(20) \quad \sum_{i,j}^{1,5} \alpha_{ij}(z) v_{ij}(z) = \frac{f(x)}{a_{11}(x)} - \frac{f(x')}{a_{11}(x')} \quad \text{in } T,$$

avendo posto

$$\alpha_{i,j}(z) = \frac{a_{ij}(x)}{a_{11}(x)} \quad \text{per } i, j = 1, 2, 3, \quad \alpha_{i+2,j+2}(z) = \frac{a_{ij}(x')}{a_{11}(x')} \quad \text{per } i, j = 2, 3,$$

$$\alpha_{1,i+2}(z) = \frac{a_{1i}(x')}{a_{11}(x')} \quad \text{per } i = 2, 3, \quad \alpha_{i,j+2}(z) = \frac{a_{1i}(x) a_{1j}(x')}{a_{11}(x) a_{11}(x')} \quad \text{per } i, j = 2, 3,$$

ed inoltre $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Per il lemma provato nel n° 1 esiste una costante positiva β , dipendente solo da α , tale che

$$(21) \quad |\beta \lambda|^2 \leq \sum_{i,j}^{1,5} \alpha_{ij}(z) \lambda_i \lambda_j \leq \beta^{-1} |\lambda|^2, \quad z \in T.$$

Si ha $v(z^0) = 0$,

$$v(z) - v(z^0) = u(x_1, x_2, x_3) - u(x_1, x_2, x_3) \quad \text{per } x_2 = x_4,$$

e quindi per la (15) vi è una costante $h_{\alpha'}$, dipendente solo da α , tale che

$$(22) \quad |v(z) - v(z^0)| \leq h_{\alpha'} \left\{ \sup_{|x - x^0| < r} |u(x) - u(x^0)| + \sup_{|x - x^0| < r} |f(x)| \right\} |z - z^0|$$

per $x_2 = x_4$; supposto $h_{\alpha'} \geq 1$ la (22) sussiste anche per $z \in \partial T$ e $x_2 \neq x_4$ essendo in tale caso $|z - z^0| \geq 1$. Pertanto la (22) sussiste per $z \in \partial T$; tenuto conto delle (20), (21) per un teorema precedentemente provato ⁽¹⁾ esiste una costante τ_{α} , dipendente solo da α , tale che

$$|v(z) - v(z^0)| \leq \tau_{\alpha} \left\{ \sup_{|x - x^0| < r} |u(x) - u(x^0)| + \sup_{|x - x^0| < r} |f(x)| \right\} |z - z^0|^{\frac{1}{2}}$$

Posto $z = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x, x_3)$ $x = (x_1^0, x_2, x_3)$, si ha

$$(23) \quad |u(x^0) - u(x)| \leq \tau_{\alpha} \left\{ \sup_{|x - x^0| < r} |u(x) - u(x^0)| + \sup_{|x - x^0| < r} |f(x)| \right\} |x - x^0|^{\frac{1}{2}}$$

e questa relazione sussiste per $x = (x_1^0, x_2, x_3) \in S$ e x_2, x_3 per il resto arbitrari. siccome le ipotesi del teorema sono invarianti rispetto a rotazioni nel piano $x_1 x_2$ con centro x^0 la (23) sussiste per $x = (x_1, x_2, x_3)$ comunque in S .

La (23) è provata nel caso che S abbia raggio 1. Nel caso che S abbia raggio r ci si riconduce al caso precedente mediante una dilatazione con centro x^0 e modulo $\frac{1}{r}$. Pertanto la (23) per sfere di raggio r assume l'espressione (19).

⁽¹⁾ C. PUCCI, *Sulle funzioni barriera*. «Le Matematiche», 18, 1963, p. 102-107.