Angelo De Marco

Soluzione di un'equazione integrale soddisfatta dalla funzione di Bessel K_0.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.3, p. 327–329.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_3_327_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Soluzione di un'equazione integrale soddisfatta dalla funzione di Bessel K_0

Nota di ANGELO DE MARCO

Istituto di Fisica Università di Torino - INFN Sez. di Torino (*)

Sunto. - *Si risolve con il metodo della trasformata di Fourier l'equazione integrale $\pi(x) * \pi(x) = \alpha e^{-\alpha|\tau|}$ e si trova che essa è soddisfatta dalla funzione di Bessel K_0.*

In molti problemi di Fisica o di Statistica, ricorrono spesso delle equazioni integrali del tipo:

$$P(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(x)\pi(x-\tau)dx \tag{1}$$

in cui la $P(\tau)$ è una funzione nota e la $\pi(x)$ è la funzione incognita. Vogliamo far vedere in questa nota, che nel caso in cui la $P(\tau)$ assuma la forma

$$P(\tau) = \alpha e^{-\alpha|\tau|}\,; \quad \alpha > 0$$

la soluzione della (1) è la funzione di BESSEL modificata del terzo genere di ordine zero K_0.

La soluzione della (1) è immediata se si fa uso delle trasformate di FOURIER. Se introduciamo infatti le funzioni caratteristiche

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\tau}P(\tau)d\tau\,; \quad g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\pi(x)dx$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 6 luglio 1964.

la (1) diventa

$$(2) \qquad g(u) = \pm \sqrt{F(u)}$$

Calcolando l'integrale per la $F(u)$ si ottiene:

$$F(u) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos u\tau e^{-\alpha|\tau|} d\tau + i\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u\tau e^{-\alpha|\tau|} d\tau = 2\alpha \int_{0}^{\infty} \cos u\tau e^{-\alpha\tau} d\tau =$$

$$= 2\alpha \left[\frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha^2 + u^2} (\alpha \cos u\tau + u \sin u\tau) \right]_0^\infty = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + u^2}$$

Eseguendo la trasformata inversa della $g(u)$ e tenendo presente la (2) si ha:

$$\pi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} g(u) du =$$

$$= \pm \frac{\alpha\sqrt{2}}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ux}{\sqrt{\alpha^2 + u^2}} du + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ux}{\sqrt{\alpha^2 + u^2}} du \right]$$

ora il secondo integrale vale zero mentre il primo è uguale a $2K_0(\alpha|x|)$ (vedi per es. Bateman Manuscript project - Tables of Integral Transforms vol. 1 pag. 9).

Ne segue che ponendo $y = \alpha x$ e $z = \alpha\tau$, risulta valida la relazione:

$$(3) \qquad I = \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(|y|) K_0(|y - z|) dy = \frac{\pi^2}{2} e^{-|z|}$$

Una verifica di questa relazione, la si può ottenere eseguendo direttamente l'integrale. Si ottiene in tal caso

$$I = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} \int_0^\infty \frac{du'}{\sqrt{(u')^2+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos uy \cos (u'y - u'z) dy \tag{4}$$

L'integrale in y, sviluppando il $\cos (u'y - u'z)$, diventa

$$\cos u'z \int_{-\infty}^{+\infty} \cos uy \cos u'y dy + \sin u'z \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u'y \cos uy dy =$$

$$= \pi\delta(u - u') \cos u'z)$$

essendo il secondo integrale nullo ed il primo uguale a π volte la fnnzione impropria di Dirac. [1]

Ne segue [2]

$$I = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} \int_0^\infty \frac{\pi\delta(u-u') \cos u'z}{\sqrt{u'^2+1}} du' = \pi \int_0^\infty \frac{\cos uz}{u^2+1} du =$$

$$= \pi \cdot \frac{\pi}{2} e^{-|z|} = \frac{\pi^2}{2} e^{-|z|}$$

Si ringrazia sentitamente il Prof. F. Tricomi per gli utili consigli.

(1) Vedi per es. Dirac, — Quantum Mechanics — 2° ed. Oxford, 1935 pag. 76.

(2) Per l'ultimo integrale vedi Bateman Manuscript project, *Tables of Integral Transforms*, vol. 1 New. Jork 1954, pag. 8.