Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Speranza

Le trasformazioni d'un piano in sè approssimabili con una trasformazione quadratica dotata d'una conica di punti uniti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.2, p. 193–205.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_2_193_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Le trasformazioni d'un piano in sè approssimabili con una trasformazione quadratica dotata d'una conica di punti uniti.

Nota di FRANCESCO SPERANZA (a Bologna) (*) (**)

Sunto. - *Si determinano le condizioni affinchè una trasformazione puntuale ammetta almeno una trasformazione quadratica osculatrice o semi-osculatrice con conica di punti uniti, in un punto unito o in una coppia generica.*

Summary. - *Conditions are given for a point-transformation between two superposed plains to have, in a fixed point or in a general pair of corresponding points, at least an osculating, or semi-osculating, quadratic transformation with a conic of fixed points.*

1. Numerosi tipi di trasformazioni si possono caratterizzare imponendo che in ogni coppia di punti corrspondenti esse siano approssimabili con trasformazioni di tipo prefissato. In particolare, poi, si possono considerare corrispondenze d'uno spazio in sè, nel qual caso, ovviamente, le trasformazioni approssimanti possono presentare una maggior varietà di tipi distinti.

In questo lavoro si determinano le condizioni affinchè una corrispondenza T d'un piano in sè sia approssimabile fino all'intorno del secondo ordine con una trasformazione quadratica (t.q.) dotata d'una conica di punti uniti. Per quanto concerne l'approssimazione di trasformazioni, essa può intendersi nel senso che le curve corrispondenti ad una curva abbiano contatto geometrico (o analitico) dell'ordine prefissato: se il contatto è del primo ordine, le trasformazioni si diranno, rispettivamente, semi-tangenti (o tangenti); se è del secondo ordine, esse si diranno semi-osculatrici (o rispettivamente, osculatrici).

Riguardo al problema qui trattato, ricordo che M VILLA ha già determinato le trasformazioni quadratiche osculatrici (t.q.o.) ad una trasformazione fra piani sovrapposti in un punto unito,

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 4 marzo 1964.

stabilendone varie proprietà [1]: nel seguito mi varrò delle equazioni delle t.q.o. determinate nel lavoro citato.

Data una trasformazione T d'un piano in sè, si determineranno le condizioni affinchè, in una sua coppia regolare, esista almeno una trasformazione quadratica semi-osculatrice (t.q.s.o.), o almeno una t.q.o., dotata d'una conica di punti uniti: e ciò in un punto unito, o in una coppia di tipo generico, o in una coppia tale che la retta congiungente i punti corrispondenti sia unita nella proiettività determinata dall'intorno del 1° ordine di T. Dai risultati trovati si deduce poi che le T per le quali esiste almeno una t.q.s.o. con una conica di punti uniti, in una coppia generica, sono quelle che posseggono ∞^1 rette unite; e le T per le quali esiste, in una coppia generica, almeno una t.q.o. con una conica di punti uniti sono quelle che posseggono un fascio di rette unite.

2. Consideriamo una trasformazione T d'un piano in sè (o fra due regioni d'un piano) che sia localmente invertibile e di classe C^u $(u \geq 2)$. Per ottenere tutte le t.q.s.o. (v. n. 1) a T in una coppia A, $\bar{A}$, basta considerare una generica trasformazione T' semi-osculatrice a T in A, $\bar{A}$. e trovare le t.q.o. a T' in A, $\bar{A}$. Tali T' sono intanto tangenti a T [2]: se le equazioni di T, T' sono

$$T)\qquad \begin{cases} u = a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots \\ v = b_1x + b_2y + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + \dots, \end{cases}$$

$$T')\qquad \begin{cases} u = a_1'x + a_2'y + a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + \dots \\ v = b'_1x + b_2'y + b_{11}'x^2 + 2b_{12}'xy + b_{22}'y^2 + \dots, \end{cases}$$

(1) Cfr. M. VILLA, *Una cubica collegata ad un punto unito di una trasformazione puntuale*, «Atti Acc. Ligure Sci. e Lett.», Vol. 9, p. 165 (1952). Per le proprietà generali delle t.q.o., cfr. M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. I. Le proiettività caratteristiche. II. Loro costruzione*, «Rend. Acc. Italia» (Ser. VII): vol. 3, p. 718 (1942) e vol. 4, p. 1 (1943).

(2) Due trasformazioni semi-osculatrici (o semi-tangenti) si chiamano anche quasi prossime d'ordine due (o rispettivamente, uno): cfr. B. SEGRE, *Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane*, «Ann. di Mat.» (Ser. IV), Vol. 28, p. 107 (1949), n. 5. Per la proprietà qui utilizzata, cfr. B. SEGRE, op. cit., n. 6.

le condizioni affinchè siano semi-osculatrici sono

$$(1)\quad \begin{cases} a_k = a_k', \qquad b_k = b_k' \\ a'_{11} - a_{11} = ma_1 \quad 2(a'_{12} - a_{12}) = ma_2 + na_1 \quad a'_{22} - a_{22} = na_2 \\ b'_{11} - b_{11} = mb_1 \quad 2(b'_{12} - b_{12}) = mb_2 + nb_1 \quad b'_{22} - b_{22} = nb_2 \end{cases}$$

per m, n opportuni.

Escluderemo d'ora in poi le coppie a direzioni caratteristiche indeterminate, nelle quali non si hanno t.q.o. nè t.q.s.o.

Nei nn. successivi scriveremo le equazioni delle t.q.s.o. nei vari casi che si presentano.

3. Consideriamo in questo numero una coppia tale che $A = \bar{A}$.

La proiettività $\mathcal{S}$ relativa all'intorno del 1° ordine di T può esser generica, o parabolica, o identica (in questo numero non si fanno questioni di realità). Le t.q.o. nei vari casi sono già state determinate da M. Villa, il quale ha anche dimostrato che, se gl'invarianti topologici di T in $A = \bar{A}$ sono $\neq 1$, ogni t.q.o. ha un numero finito di punti uniti [3].

Per esaminare i casi rimanenti, cominciamo a supporre che la $\mathcal{S}$ sia generica o identica; dette

$$(2)\quad \begin{cases} \bar{x} = ax + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots \\ \bar{y} = by + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + \dots \end{cases} \qquad (ab \neq 0),$$

le equazioni di T (essendo unite in $\mathcal{S}$ le rette $x = 0$, $y = 0$), le equazioni delle t.q.o. sono

$$\begin{cases} ba_{11}x\bar{x} + a_{12}(ax\bar{y} + b\bar{x}y) + aa_{22}y\bar{y} + ab(ax - \bar{x}) + \lambda(ax\bar{y} - b\bar{x}y) = 0 \\ bb_{11}x\bar{x} + b_{12}(ax\bar{y} + b\bar{x}y) + ab_{22}y\bar{y} + ab(by - \bar{y}) + \mu(ax\bar{y} - b\bar{x}y) = 0, \end{cases} \quad [4]$$

[3] Cfr. M. Villa, la 1ª op. cit. in [1], nn. 3, 5, 6.

[4] Cfr. M Villa, op. cit. in [3], formule (1) e (2).

e quindi, tenendo conto delle (1), si hanno le t.q.s.o.

$$\begin{cases} b(a_{11}+ma)x\bar{x}+\left(a_{12}+\frac{n}{2}a\right)(ax\bar{y}+b\bar{x}y)+aa_{22}y\bar{y}+ab(ax-\bar{x})+\lambda(ax\bar{y}-b\bar{x}y)=0 \\ bb_{11}x\bar{x}+\left(b_{12}+\frac{m}{2}b\right)(ax\bar{y}+b\bar{x}y)+a(b_{22}+nb)y\bar{y}+ab(by\quad\bar{y})+\mu(ax\bar{y}-b\bar{x}y)=0: \end{cases}$$

ed i relativi punti uniti sono dati da

$$\text{(3)}\quad \begin{cases} b(a_{11}+ma)x^2+\left[(a+b)\left(a_{12}+\frac{n}{2}a\right)+\lambda(a-b)\right]xy+aa_{22}y^2+ab(a-1)x=0 \\ bb_{11}x^2+\left[(a+b)\left(b_{12}+\frac{m}{2}b\right)+\mu(a-b)\right]xy+a(b_{22}+nb)y^2+ab(b-1)y=0. \end{cases}$$

Si ha una conica di punti uniti quando le due coniche coincidono, o quando una delle due equazioni è identicamente soddisfatta. Le due coniche coincidono (si ricordi che $ab \neq 0$) solo se

$$a=b=1, \qquad \left\|\begin{matrix} a_{11}+m & 2a_{12}+n & a_{22} \\ b_{11} & 2b_{12}+m & b_{22}+n \end{matrix}\right\| = 0.$$

Le prime due relazioni dicono che A è un punto d'ipercoincidenza per T [5], cioè che l'identità è tangente a T in $A=\bar{A}$; le rimanenti sono sempre verificate per opportuni valori di m, n.

Imponiamo ora che una delle equazioni (3) sia identicamente soddisfatta; possiamo supporre che ciò accada per la prima (per l'altra si hanno le medesime conclusioni, salvo lo scambio delle variabili x, y). Essa svanisce solo se

$$a=1,\quad a_{22}=0,\quad a_{11}+m=(1+b)\left(a_{12}+\frac{n}{2}\right)+\lambda(1-b)=0.$$

La $a=1$ significa che il punto unito A non è isolato, poichè il punto infinitamente prossimo su $y=0$ è unito: cioè che le

[5] Cfr. F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, a cura di F. CONFORTO e E. MARTINELLI (Cremonese, Roma 1942) p. 278 e segg.; F. GAETA, *Aclaraciones sobre los puntos de coincidencia de una correspondencia entre variedades algebraicas superpuestas*, «Rev. Mat. Hispano-Americana» (Ser. IV) Vol 11, p. 132 (1951); v. p. 135.

curve tangenti ad $y = 0$ hanno contatto analitico del 1° ordine almeno con le corrispondenti (è sufficiente che ciò accada per una curva); la $a_{22} = 0$ significa che $x = 0$ è retta caratteristica.

In entrambi i casi le trasformazioni quadratiche considerate sono ∞^1.

Si ha una t.q.o. con conica di punti uniti se le precedenti relazioni sono soddisfatte per $m = n = 0$. Per il primo tipo si ha

$$(4) \qquad a = b = 1, \qquad \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{matrix} \right\| = 0,$$

cioè l'identità è tangente, e la linearizzante relativa fa corrispondere ad una retta generica una retta fissa; essa infatti è

$$\xi' = a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 \qquad \eta' = b_{11}\xi^2 + 2b_{12}\xi\eta + b_{22}\eta^2$$

(si esclude che l'identità sia osculatrice, cioè che $a_{ik} = b_{ik} = 0$, perchè in tal caso non vi sono t.q.o): tutte le ∞^2 t.q.o. hanno una conica di punti uniti.

L'ultima condizione può anche esprimersi così: vi sono almeno due direzioni (da contarsi con la dovuta molteplicità) lungo le quali una curva e la corrispondente hanno contatto analitico del 2° ordine almeno. Considerata la curva $y = kx + hx^2 + \dots$, e la sua corrispondente

$$\bar{x} = x + (a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2)x^2 + \dots$$
$$\bar{y} = kx + (h + b_{11} + 2b_{12}k + b_{22}k^2)x^2 + \dots$$

esse hanno contatto analitico del 2° ordine solo se

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = b_{11} + 2b_{12}k + b_{22}k^2 = 0.$$

In generale queste sono incompatibili; vi sono due soluzioni solo nel caso si verifichino le (4).

Per il secondo tipo, si deve avere

$$a = 1, \quad a_{11} = a_{22} = 0, \quad (1 + b)a_{12} + \lambda(1 - b) = 0.$$

Se $b \neq 1$, l'ultima dà λ; altrimenti si ricade nel caso precedente $(a = b = 1,\ a_{ik} = 0)$.

Solo se $a = 1$, esistono ∞^1 omologie tangenti con asse fisso in $y = 0$, e centro variabile su $x = 0$:

$$\bar{x} = \frac{x}{1 + \mu y} \qquad \bar{y} = \frac{by}{1 + \mu y}$$

e le relative linearizzanti sono

$$\xi' = a_{11}\xi^2 + (2a_{12} + \mu)\xi\eta + a_{22}\eta^2, \qquad \eta' = \dots$$

e, quindi, solo se $a_{11} = a_{22} = 0$ alle rette $x = 0$, $y = 0$ corrisponde la $x' = 0$.

Le t.q.o. con conica di punti uniti sono ∞^1.

La relazione $a_{11} = 0$ può interpretarsi anche in questo modo: sia $M(0, \xi)$ un punto della $x = 0$; associamo ad ogni P di $y = 0$ la proiezione su $y = 0$ del corrispondente da M; si ha la corrispondenza

$$\bar{x} = \frac{-\xi(x + a_{11}x^2 + \dots)}{-\xi + b_{11}x^2 + \dots} = x + a_{11}x^2 + \dots .$$

Solo se $a_{11} = 0$ vi è contatto analitico del 2° ordine.

Osservazione. Le relazioni $a = 1$, $a_{11} = 0$ significano pure, se $b \neq 1$, che v'è una curva (necessariamente tangente a $y = 0$)

$$y = hx^2 + \dots$$

che con la corrispondente

$$\bar{x} = ax + a_{11}x^2 + \dots \qquad \bar{y} = (hb + b_{11})x^2 + \dots$$

ha contatto analitico del 2° ordine almeno $\left(\text{con } h = -\frac{b_{11}}{b-1}\right)$. Se $b = 1$, invece, occorre sia anche $b_{11} = 0$, ma in tal caso tutte le curve con tangente $y = 0$ soddisfano la condizione. Quindi, se $\mathfrak{S}$ è generica, si può dire che esiste una t.q.o. dotata di conica di punti uniti solo se una direzione unita è caratteristica e lungo l'altra esiste una curva che con la corrispondente ha contatto analitico del 2° ordine (e tali t.q.o. sono ∞^1).

Supponiamo ora che $\mathcal{S}$ sia parabolica; la T si può scrivere

$$(5) \qquad \begin{cases} \bar{x} = a(x+y) + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots \\ \bar{y} = \qquad\quad ay + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + \dots \end{cases} \qquad (a \neq 0)$$ [6].

Le t.q.s.o. sono

$$\begin{cases} (a_{11}+m)x\bar{x} + (2a_{12}-a_{11}+n)x\bar{y} + (a_{22}+n)y\bar{y} + a^2(x+y) - a\bar{x} + \lambda a(\bar{x}y - x\bar{y} - y\bar{y}) = 0 \\ b_{11}x\bar{x} + (2b_{12} - b_{11}+m)x\bar{y} + (b_{22}+n)y\bar{y} + a^2y - a\bar{y} + \mu a(\bar{x}y - x\bar{y} - y\bar{y}) = 0, \end{cases}$$

ed i punti uniti sono dati da

$$\begin{cases} (a_{11}+m)x^2 + (2a_{12}-a_{11}+n)xy + (a_{22}+n-\lambda a)y^2 + (a^2-a)x + a^2y = 0 \\ b_{11}x^2 + (2b_{12}-b_{11}+m)xy + (b_{22}+n-\mu a)y^2 + (a^2-a)y = 0. \end{cases}$$

Le due coniche non possono coincidere, però la seconda equazione può svanire:

$$(6) \qquad a = 1, \qquad b_{11} = 0, \qquad 2b_{12} + m = b_{22} + n - \mu = 0.$$

Le ultime due danno m, n, mentre le prime due indicano che le curve tangenti ad $y = 0$ $(y = hx^2 + ..)$ hanno contatto analitico del 1° ordine e geometrico del 2° ordine (almeno) con le corrispondenti, che sono

$$\bar{x} = ax + (ah + a_{11})x^2 + \dots \qquad \bar{y} = (ah + b_{11})x^2 + \dots;$$

e viceversa. Si osservi che la $y = 0$ è caratteristica, e che, per il verificarsi di $(6_{1,2})$, è sufficiente imporre il contatto con la corrispondente ad una sola curva. Le t.q.s.o. con conica di punti uniti sono ∞^2.

Si ha una t.q.o. con conica di punti uniti se le (6) valgono per $m = n = 0$ cioè se

$$a = 1, \qquad b_{11} = b_{12} = 0, \qquad b_{22} = \mu.$$

[6] Cfr. M VILLA, op. cit. in [2], formula (5) (salvo la posizione $a_{22} = b_{22}$).

Ora, per la (5) esistono ∞^1 omologie tangenti solo se $a = 1$, e sono

$$\bar{x} = \frac{x + y}{\mu y + 1} \qquad \bar{y} = \frac{y}{\mu y + 1}$$

e le relative linearizzanti

$$\xi' = \ldots \qquad \eta' = b_{11}\eta^2 + 2b_{12}\xi\eta + (b_{22} + \mu)\eta^2$$

fanno corrispondere ad $y' = 0$ la $y = 0$ contata due volte solo se $b_{11} = b_{12} = 0$. Le t.q. considerate sono ∞^1.

Concludendo:

Esiste almeno una t.q.s.o. in un punto unito, con una conica di punti uniti, in questi casi:

I) *Le due rette unite in* $\mathcal{S}$ *(distinte o coincidenti) hanno, con le curve corrispondenti in* T, *contatto una analitico del* 1° *ordine, e l'altra ordinario del* 2° *ordine* (almeno).

II) *L'identità è tangente (ipercoincidenza).*

In entrambi i casi le t.q.s.o. con conica di pnnti uniti sono ∞^2.

Esiste almeno una t.q.o. con conica di punti uniti in questi casi:

I) *Esistono esattamente* ∞^1 *omologie tangenti, con asse fisso e centro variabile su una retta* (entrambe unite in $\mathcal{S}$). *Nella linearizzante relativa ad una generica di esse, alle rette unite in* $\mathcal{S}$, *e ad esse sole, corrisponde il luogo dei centri.*

II) *L'identità è tangente, e la linearizzante relativa fa corrispondere ad una retta generica una retta fissa.*

Nel caso I) vi sono ∞^1 t.q. soddisfacenti l'enunciato; nel II) tutte le t.q.o. hanno una conica di punti uniti.

Si può osservare che in questi due ultimi tipi il punto unito non costituisce mai una coincidenza perfetta [7].

4. Sia ora A, $\bar{A}$ una coppia di punti corrispondenti distinti, tale che la retta $A\bar{A}$ non sia unita in $\mathcal{S}$ (coppia di tipo generico). Dimostriamo che:

In una coppia di tipo generico non vi sono t.q.s.o. con una conica di punti uniti.

(7) Cfr. le op. cit. in (5), e inoltre B. SEGRE, *Sulla perfezione delle coincidenze isolate*, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (Ser. VIII), vol. 10, p. 335 (1951_1).

Infatti, le equazioni di T si possono scrivere [8]:

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}} = x + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + \dots, \\ \dfrac{1}{\bar{x}} = y + \beta_{20}x^2 + \beta_{11}xy + \beta_{02}y^2 + \dots . \end{cases}$$

Si possono applicare ancora le (2) e le (3) dell'op. cit. in [1], sostituendo (ad $\bar{x}$) $\dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}$, e (ad $\bar{y}$) $\dfrac{1}{\bar{x}}$ (cfr. le (2)): le t.q.s.o. sono quindi:

$$\begin{cases} (\alpha_{20} + m)x\bar{y} + \dfrac{\alpha_{11} + n}{2}(x + y\bar{y}) + \alpha_{02}y + x\bar{x} - \bar{y} + \lambda(x - y\bar{y}) = 0 \\ \beta_{20}x\bar{y} + \dfrac{\beta_{11} + m}{2}(x + y\bar{y}) + (\beta_{02} + n)y + y\bar{x} - 1 + \mu(x - y\bar{y}) = 0. \end{cases}$$

I punti uniti sono dati da:

$$\begin{cases} (\alpha_{20} + m)xy + x^2 + \dfrac{(\alpha_{11} + n - 2\lambda)}{2}y^2 + (\alpha_{02} - 1)y + \dfrac{\alpha_{11} + n + 2\lambda}{2}x = 0 \\ (\beta_{20} + 1)xy + \dfrac{\beta_{11} + m - 2\mu}{2}y^2 + (\beta_{02} + n)y + \dfrac{\beta_{11} + m + 2\mu}{2}x - 1 = 0. \end{cases}$$

Le due equazioni non possono coincidere, né una d'esse può esser identicamente soddisfatta, da cui l'asserto.

5. Consideriamo ora una coppia A, $\bar{A}$ tale che la $A\bar{A}$ sia unita in $\mathfrak{T}$, che è quindi una prospettività (coppia « prospettica »).

Dimostriamo che:

In una coppia prospettica, se e solo se la $\mathrm{A\bar{A}}$ *è retta caratteristica esiste almeno una t.q.s.o. con conica di punti uniti; ve ne sono, allora,* ∞^1. *Se e solo se le rette* $\mathrm{A\bar{A}}$ *relative a tre punti infinitamente vicini formano fascio v'è almeno una t.q.o. con conica di punti uniti; in tal caso, tutte le t.q.s.o. con conica di punti uniti sono osculatrici.*

[8] Cfr. L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi sovrapposti*, « Boll. Un Mat. Ital. » (Ser. III), vol. 9, p. 360 (1954), formule (14).

Le equazioni di T si scrivono [9]

$$
(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\bar y}{\bar x} &= \alpha y + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + \dots, \\ \frac{1}{\bar x} &= \alpha x + \beta_{20}x^2 + \beta_{11}xy + \beta_{02}y^2 + \dots . \end{aligned} \right.
$$

Tali sviluppi rientrano, formalmente, nel tipo (2); basta porre $\frac{1}{\bar x}$ in luogo di $\bar x$, $\frac{\bar y}{\bar x}$ in luogo di $\bar y$, e

$$
a = b = \alpha, \qquad a_{11} = \beta_{20}, \qquad 2a_{12} = \beta_{11}, \qquad a_{22} = \beta_{02},
$$

$$
b_{11} = \alpha_{20}, \qquad 2b_{12} = \alpha_{11}, \qquad b_{22} = \alpha_{02}.
$$

Le t.q.s.o. sono quindi:

$$
\left\{ \begin{aligned} &(\beta_{20} + m)x + \frac{\beta_{11} + n}{2}(x\bar y + y) + \beta_{02}y\bar y + \alpha^2 x\bar x - \alpha + \lambda(x\bar y - y) = 0 \\ &\alpha_{20}x + \frac{\alpha_{11} + m}{2}(x\bar y + y) + (\alpha_{02} + n)y\bar y + \alpha^2 y\bar x - \alpha\bar y + \mu(x\bar y \quad y) = 0 \end{aligned} \right.
$$

I punti uniti sono quindi dati da

$$
\left\{ \begin{aligned} &\alpha^2x^2 + \frac{\beta_{11} + n + 2\lambda}{2}xy + \beta_{02}y^2 + (\beta_{20} + m)x + \frac{\beta_{11} + n - 2\lambda}{2}y - \alpha = 0 \\ &\frac{\alpha_{11} + m + 2\alpha^2 + 2\mu}{2}xy + (\alpha_{02} + n)y^2 + \alpha_{20}x + \frac{\alpha_{11} + m - 2\alpha - 2\mu}{2}y = 0. \end{aligned} \right.
$$

Le due equazioni non possono coincidere, e la prima non può esser identicamente verificata: ma ciò può accadere della seconda:

$$
(8) \qquad \alpha_{11} + m + 2(\alpha^2 + \mu) = \alpha_{02} + n = \alpha_{20} = \alpha_{11} + m - 2(\alpha + \mu) = 0.
$$

[9] Cfr. l'op. cit. in [8], formule (18): le formule che seguono differiscono da quelle citate, in quanto, non occorrendo gli sviluppi canonici di T, non si è specializzato l'intorno del 2° ordine di A, $\bar A$.

Esse sono sono soddisfatte, per opportuni valori di m, n, μ, solo se $\alpha_{20}=0$, cioè se la $y=0$ è caratteristica, e le t.q. in questione sono ∞^1 (λ arbitrario).

Converrà osservare che, scritte le equazioni di T nella forma

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}}=f(x,\ y), \qquad \frac{1}{\bar{x}}=\varphi(x,\ y),$$

la curva L, luogo dei punti A per cui la $A\bar{A}$ è unita, è

$$\begin{vmatrix} y\varphi-f & (1-x\varphi)f_x+(xf-y)\varphi_x \\ 1-x\varphi & (1-x\varphi)f_y+(xf-y)\varphi_y \end{vmatrix}=0,$$

e la sua tangente nell'origine, secondo le notazioni (7), è

$$(\alpha-\alpha^2-\alpha_{11})y-2\alpha_{20}x=0.$$

Si ritrova che la $A\bar{A}$ è caratteristica se è tangente ad L, e viceversa ([10]).

Si ha una t.q.o. con conica di punti uniti solo se

$$\alpha_{11}+2(\alpha^2+\mu)=\alpha_{02}=\alpha_{20}=\alpha_{11}-2(\alpha+\mu)=0, \tag{9}$$

cioè se

$$\alpha_{20}=\alpha_{02}=\alpha_{11}+\alpha^2-\alpha=0$$

(μ opportuno) e quindi la tangente ad L è indeterminata: ma la condizione non è sufficiente. La retta congiungente i punti

$$A^*(x,\ y,\ 1), \qquad \bar{A}^*(1,\ \alpha y+\ldots,\ \alpha x+\ldots)$$

è

$$\begin{aligned}[-\alpha y-\alpha_{20}x^2+(\alpha-\alpha_{11})xy-\alpha_{02}y^2+\ldots]X+\\+[1-\alpha x^2+\ldots]Y-y+\alpha xy+\ldots=0.\end{aligned} \tag{10}$$

La $A\bar{A}$ è $Y=0$; trascurando gl'infinitesimi del 2° ordine si ha una retta che la incontra nel punto $\left(-\frac{1}{\alpha},\ 0\right)$. La (10)

([10]) Cfr. L. MURACCHINI, op. cit. in ([8]), p. 362.

dassa da questo punto, per ogni x, y, solo se

$$\alpha_{20} = \alpha_{11} - \alpha + \alpha^2 = \alpha_{02} = 0$$

da cui l'asserto. Si osservi che la condizione or ora imposta alle $A\bar{A}$ comporta l'indeterminazione della tangente ad L, e quindi anche che la $A\bar{A}$ sia caratteristica. Inoltre dal confronto delle (8) e delle (9) si ha che, quando le ultime sono verificate, le t.q.s.o. con una conica di punti uniti sono osculatrici. In entrambi i casi, le coniche di punti uniti formano un fascio, dal quale si sia tolta una conica degenere (la $xy - y = 0$, spezzata in $A\bar{A}$ e nell'asse della prospettività $\mathcal{S}$) ([11]).

6. Indicheremo con T_1 una T che possiede ∞^1 rette unite, e con T_1^* una T che possiede un fascio di rette unite (se la T non è definita in tutto il piano, si tratterà di segmenti corrispondenti allineati):

Tutte e sole le T che, in ogni coppia (a jacobiano non nullo e a direzioni caratteristiche non indeterminate) di punti distinti, posseggono almeno una t.q.s.o. (rispettivamente *una t.q.o.) dotata di conica di punti uniti, sono le T_1* (rispettivamente *le T_1^**).

Vi sono, in entrambi i casi, ∞^1 t.q. del tipo detto per ogni coppia.

Infatti, se e solo se la coppia generica di punti corrispondenti è prospettica, T è una T_1; quindi, se T non è una T_1, in una coppia generica non possono esservi t.q.s.o. con conica di punti uniti (n. 4). Invece, per una T_1, $\mathcal{S}$ è una prospettività ed alla retta $A\bar{A}$ corrisponde se stessa ([12]). e quindi essa è caratteristica. perciò (n. 5) vi sono ∞^1 t.q.s.o. con conica di punti uniti.

S'è poi visto che esistono t.q.o. con una conica di punti uniti se tre rette $A\bar{A}$ successive passano per un medesimo punto; allora ogni retta del loro inviluppo è retta cuspidale, e quindi esse formano fascio; e viceversa.

Osservazione. In una T_1, di regola, v'è una curva Γ di punti uniti. Sia O un punto di Γ: la tangente ivi a Γ (t) e la retta s unita in T_1 e passante per O sono unite. Rappresentando T_1 con le equazioni ([12]):

$$y = \lambda x + f(\lambda), \quad \bar{y} = \lambda \bar{x} + f(\lambda), \quad \bar{x} = F(x, \lambda) \quad (\lambda \text{ parametro}),$$

([11]) Per tale conica cfr. L. Muracchini, op. cit. in ([8]), p 364.

([12]) Cfr. L. Muracchini, op. cit. in ([8]), p. 362.

le equazioni di $\mathcal{S}$ sono

$$\bar{k} = \frac{(x + \lambda F_\lambda + f')k + \lambda(f'F_x + xF_x - \lambda F_\lambda - x - f')}{F_\lambda k + F_x(x + f') - \lambda F_\lambda}$$

$\left(k = \dfrac{y - y_0}{x - x_0},\ f' = \dfrac{df}{d\lambda},\ F_x = \dfrac{\partial F}{\partial x},\ \text{ecc.}\right)$. Se le rette t, s coincidono, si ha

$$F_x = 1,$$

e in tal caso le direzioni unite in $\mathcal{S}$ sono indeterminate o coincidenti. Si osservi pure che uno degl'invarianti topologici di T in O vale 1 (essendovi una curva di punti uniti).

Ciò premesso, si può vedere come nei punti di Γ (a jacobiano non nullo e direzioni caratteristiche non indeterminate) le t.q.s.o. e le t.q.o. sono almeno tante quante in una coppia generica di punti corrispondenti in T_1. Cominciamo a supporre che $\mathcal{S}$ non sia identica; allora, delle due rette unite, eventualmente coincidenti, t ed s, una (t) ha contatto analitico del primo ordine almeno con la curva corrispondente, mentre la seconda (s) è caratteristica: quindi (n. 3), in O, T_1 ammette ∞^2 t.q.s.o. con una conica di punti uniti Se invece $\mathcal{S}$ è identica, l'invariante topologico di T_1 vale 1, e quindi (n. 3) vi sono ancora ∞^2 t.q.s.o. con una conica di punti uniti.

Osserviamo poi che se la proiettività $\mathcal{S}$ è generica, poiché la curva Γ ha contatto analitico d'ordine qualsiasi con la corrispondente, vi sono ∞^1 t.q.o. con conica di punti uniti (n. 3, Osservazione).

Se T_1 è una T_1^*, nei punti di Γ in cui $\mathcal{S}$ è generica vi sono quindi ∞^1 t.q.o. con conica di punti uniti. Altrimenti (assunto O come origine) essa può rappresentarsi con le equazioni

$$\bar{x} = x + cy + \dots \qquad \bar{y} = y \qquad \begin{pmatrix} c = 0 \text{ se } \mathcal{S} \text{ è identica} \\ c = 1 \text{ se } \mathcal{S} \text{ è parabolica} \end{pmatrix}.$$

Se $\mathcal{S}$ è parabolica, essendo $b_{11} = b_{12} = 0$, esistono ∞^1 t.q.o. con conica di punti uniti; e se $\mathcal{S}$ è identica, si hanno ∞^2 t.q.o. cosiffatte, essendo $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ (n. 3).

Osservazione II. Analogo al problema qui trattato è il problema di determinare le T d'un piano in sé che ammettono in ogni coppia un'omologia semi-tangente (o rispettivamente tangente): si constata che, in entrambi i casi, esse sono tutte e sole le T_1 (cfr. anche l'op. cit. in [8]), p. 365).