BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIALUISA DE SOCIO

Su alcune questioni di unicità in elettromagnetismo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 19
(1964), n.2, p. 146–152.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_2_146_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Su alcune questioni di unicità in elettromagnetismo.

Nota di MARIALUISA DE SOCIO (a Milano) (*) (**)

Sunto. - Prendendo spunto da recenti pubblicazioni di J. Serrin e D. E. Edmunds, si dimostra, sfruttando il lemma di Gronwall, un teorema di unicità (in $t > 0$ e $t < 0$) per le equazioni di Maxwell in un dominio D , note le condizioni iniziali e, al contorno, la componente tangenziale del vettore E od H .

I. - Recentemente J. SERRIN e D. E. EDMUNDS (1) hanno considerato un fluido viscoso incompressibile, mobile in un dominio limitato o illimitato, con velocità assegnata in ogni istante al contorno e nel secondo caso con eccesso di pressione (2) infinitesimo all'infinito di ordine maggiore di $\frac{1}{2}$, e hanno provato che se è nota la velocità del fluido stesso in un certo istante, allora per ogni valore del tempo t , positivo e negativo, esiste al più una sola distribuzione delle velocità compatibile con le date condizioni iniziali e al contorno. In sostanza, assegnate le condizioni al contorno, se è nota la velocità del fluido in un certo istante, la velocità è determinata non solo nel futuro, come negli ordinari teoremi di unicità, ma anche nel passato. In questa nota dimostreremo come nell'elettromagnetismo valga un teorema analogo a quello ora citato, che però non si può provare con i soliti metodi (3) con cui si dimostra il teorema di unicità nel campo elettromagnetico.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 13 febbraio 1964.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca del n. 4 del Comitato Nazionale delle Matematiche del C.N.R.

(1) J. SERRIN: *The initial value problem for the Navier — Stokes equation* — University of Minnesota 1962.

D. E. EDMUNDS: *On the Uniqueness of viscous flows* — *Archive for Rational Mechanics and Analysis* — XIV (1963) 171.

(2) Cioè la differenza fra la pressione p e la pressione p_0 all'infinito.

(3) C r. ad es. SOMMERFELD — *Electrodynamics* — (Accademie Press, 1952, pag. 30 e seguenti).

Infatti ricordiamo le ordinarie equazioni di MAXWELL:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{array} \right.$$

dove al solito $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ sono i vettori campo elettrico e magnetico, $\mathbf{E}_i$ indica il campo impresso, ε , γ , μ la costante dielettrica, la conduttività e la permeabilità magnetica.

La citata dimostrazione del teorema di unicità per le (1), corredate da opportune condizioni iniziali e al contorno, presuppone il coefficiente γ di $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i$ positivo, conforme all'esperienza, ed è valida per valori positivi del tempo.

Per estendere il teorema di unicità a valori negativi del tempo si potrebbe porre $t = -t_1$, con $t_1 > 0$, $\mathbf{H} = -\mathbf{H}_1$, sicché si otterrebbero le equazioni:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t_1} - \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} \end{array} \right.$$

formalmente identiche alle (1), ma con coefficiente di $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i$, $-\gamma$, negativo; per quanto si è detto, non sarebbe possibile applicare il metodo già ricordato. È necessario perciò, per giungere al teorema in discorso, seguire un altro procedimento, che in sostanza si riduce ad applicare il lemma di GRONWALL, già usato in altre questioni di unicità (*). In questa nota faremo appunto

(*) Cfr. anche per la bibliografia: D. GRAFFI — *Sui teoremi di unicità nella dinamica dei fluidi* — Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano — Vol. XXXII, 1962.

Il lemma, in una forma particolare che interessa in questo lavoro, afferma che se $a(t)$ è una funzione continua sempre ≥ 0 ed è per ogni $t > 0$

$$a(t) \leq M \int_0^t a(t) dt$$

con M costante positiva, segue allora $a(t)$ nulla per ogni $t > 0$.

vedere come il teorema enunciato rientra nel seguente, molto più generale.

Si consideri il sistema di equazioni (che generalizzano le (1) e le (2)):

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i, \mathbf{H}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{array} \right.$$

in cui il vettore $\mathbf{J}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i, \mathbf{H})$ densità di corrente è, per ogni $|\mathbf{E} + \mathbf{E}_i|$, $|\mathbf{H}|$ inferiori ad un numero N positivo e del resto arbitrario, soddisfacente alla condizione tipo LIPSCHITZ:

$$(4) \quad |\mathbf{J}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i + \mathbf{e}, \mathbf{H} + \mathbf{h}) - \mathbf{J}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i, \mathbf{H})| \leq M_1 |\mathbf{e}| + M_2 |\mathbf{h}|,$$

con M_1 ed M_2 numeri positivi eventualmente dipendenti da N ⁽⁵⁾, ma indipendenti da $\mathbf{e}$ ed $\mathbf{h}$, dalle coordinate e dal tempo. Ovviamente la (4) è soddisfatta se, come nel caso di (2): $\mathbf{J} = -\gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$.

Ammetteremo inoltre, sempre conforme all'esperienza, ε e μ limitati inferiormente da un numero positivo, cioè $\varepsilon \geq \varepsilon_{\min} > 0$; $\mu \geq \mu_{\min} > 0$.

Noi dimostreremo che in un dominio (D) le (3) ammettono una sola soluzione soddisfacente alle solite condizioni di regolarità, qualora sia assegnato in ogni istante $\mathbf{E}_i$ in tutto (D), i valori di $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ in (D) per $t = 0$ (condizioni iniziali) e in ogni istante i valori delle componenti tangenziali $\mathbf{E}_i$, o $\mathbf{H}_i$, di $\mathbf{E}$ o $\mathbf{H}$, sulla frontiera σ di (D).

È bene notare che le equazioni (3) si presentano in diverse questioni fisiche. Infatti esistono conduttori non lineari, inoltre per i fenomeni tipo HALL la densità di corrente può dipendere anche dal campo magnetico.

È bene anche notare che il teorema in discorso sarebbe valido anche se al secondo membro della prima di (3) si aggiungesse una densità di corrente impressa $\mathbf{J}_i$. Osserviamo infine che dimostreremo il nostro teorema solo per $t \geq 0$; il caso $t < 0$ si riconduce al precedente con la sostituzione già accennata: $t = -t_1$, $\mathbf{H} = -\mathbf{H}_1$ nelle (3). $\mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ verrà mutato in $-\mathbf{J}(\mathbf{E}, -\mathbf{H}_1)$, che soddisfa certamente alla (4).

(5) Si supponga anche $|\mathbf{E} + \mathbf{E}_i + \mathbf{e}|$, $|\mathbf{H} + \mathbf{h}|$ inferiori ad N .

II. - Per la dimostrazione dell'enunciato teorema di unicità procediamo, al solito, per assurdo. Supponiamo cioè che oltre E ed H esista anche un campo regolare E' ed H' , col medesimo E_i , soddisfacente anch'esso alle equazioni (3) e alle stesse condizioni iniziali e al contorno

Posto:

$$(5) \quad e = E' - E \quad h = H' - H,$$

si ha, sottraendo le (3) dalle equazioni che dalle (3) si ottengono sostituendo ad E ed H , E' ed H' rispettivamente:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} h = \varepsilon \frac{\partial e}{\partial t} + J(E + E_i + e, H + h) - J(E + E_i, H) \\ \operatorname{rot} e = -\mu \frac{\partial h}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Sia ora (D) un dominio finito limitato dalla superficie σ , moltiplichiamo la prima delle (6) scalarmente per e , la seconda per h , sottraiamo membro a membro ed integriamo in (D) ; otteniamo in base anche al teorema della divergenza e a note proprietà:

$$(7) \quad \int_{\sigma} e_i \times h_i \cdot n d\sigma + \int_{(D)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon e^2 + \mu h^2}{2} \right) d(D) + \\ + \int_{(D)} [J(E + E_i + e, H + h) - J(E + E_i, H)] \cdot e d(D) = 0$$

dove u_i indica la componente tangenziale del vettore generico u sulla σ .

Ora poiché E_i ed E'_i , o H_i e H'_i assumono uguali valori alla superficie σ , risulta ivi o $e_i = 0$, o $h_i = 0$, pertanto il primo integrale di (7) è sempre nullo. Segue in base alla (4) ⁽⁶⁾ e alla relazione

(6) Si tenga presente che essendo F , E' , H , H' , E_i regolari, essi saranno limitati, sicché esisterà un numero positivo N tale che $|E + E_i|$, $|E' + E_i|$, $|H|$, $|H'|$ saranno inferiori ad N . La (4) è perciò applicabile come si è detto nel testo.

di CAUCHY (7)

$$\begin{aligned}
 \int_{(D)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon e^2 + \mu h^2}{2} \right) d(D) &= \int_{(D)} [\mathcal{J}(E + E_i, H) - \mathcal{J}(E + E_i + e, H + h)] \cdot e d(D) \leq \\
 (8) \quad &\leq \int_{(D)} (M_1 e^2 + M_2 e h) d(D) \leq \int_{(D)} \left(M_1 e^2 + M_2 \frac{e^2 + h^2}{2} \right) d(D) = \\
 &= \int_{(D)} \left(\frac{2M_1 + M_2}{\varepsilon} \frac{\varepsilon e^2}{2} + \frac{M_2}{\mu} \frac{\mu h^2}{2} \right) d(D) \leq M \int_{(D)} \frac{\varepsilon e^2 + \mu h^2}{2} d(D),
 \end{aligned}$$

detto M il più grande dei due numeri $\frac{2M_1 + M_2}{\varepsilon_{\min}}$, $\frac{M_2}{\mu_{\min}}$.

Poiché all'istante $t = 0$ e in ogni punto P di (D) è $e = h = 0$, in quanto sia E ed H , sia E' ed H' soddisfano alle date condizioni iniziali, integrando la (8), si ha, poiché (D) è fisso, e ed h regolari e a primo membro si può scambiare il segno di derivata con quello d'integrale:

$$\int_{(D)} \frac{\varepsilon e^2 + \mu h^2}{2} d(D) \leq M \int_0^t \left[\int_{(D)} \frac{\varepsilon e^2 + \mu h^2}{2} d(D) \right] dt$$

e, per il citato lemma di GRONWALL, $\int_{(D)} \frac{\varepsilon e^2 + \mu h^2}{2} d(D) \equiv 0$ in tutto

$(0, t)$, ossia $e = h = 0$ in ogni punto P di (D) e per ogni istante t .

I due campi E, H, E' ed H' sono pertanto coincidenti.

III. - Passiamo ora al caso di un dominio D esterno a una o più superfici σ . Il metodo che ora seguiremo consisterà nell'adattare al nostro caso un procedimento ben noto per le ordinarie equazioni di MAXWELL (8).

Consideriamo un punto generico P di D e un istante pure generico t_0 . Sia Σ una sfera di centro P e raggio R decrescente con velocità $v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{\min} \mu_{\min}}}$. Supponiamo che il valore iniziale R_0 di R sia sufficientemente grande in modo che $R = R_0 - vt$ per ogni $0 \leq t \leq t_0$, sia sempre positivo e inoltre la sfera con tale

(7) Cioè la relazione $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ dove a e b sono numeri reali.

(8) Cfr. ad es. COURANT HILBERT: *Methods of Mathematical, Physics* Interscience Publisher 1962, Vol. II Cap. VI 6, n. 3.

raggio contenga sempre nel suo interno le σ ⁽⁹⁾ In altre parole la sfera Σ va contraendosi nel tempo, avendo sempre nel suo interno le σ e il punto P .

Applichiamo ora al dominio (D) di volume S , interno a Σ ma esterno alle σ , la (7) del numero precedente, si ottiene con lo stesso significato dei simboli e ricordando che $\mathbf{e}_t \times \mathbf{h}_t \cdot \mathbf{n} = 0$ su σ :

$$\int_S \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon e^2 + \mu h^2}{2} \right) dS + \int_S [\mathbf{J}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_t + \mathbf{e}, \mathbf{H} + \mathbf{h}) - \mathbf{J}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_t, \mathbf{H})] \cdot \mathbf{e} dS + \int_{\Sigma} \mathbf{e}_t \times \mathbf{h}_t \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0.$$

Ora si ha com'è noto:

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \int_S \frac{\epsilon e^2 + \mu h^2}{2} dS = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon e^2 + \mu h^2}{2} \right) dS - v \int_{\Sigma} \frac{\epsilon e^2 + \mu h^2}{2} d\Sigma.$$

Quindi, osservando che è sempre $|\mathbf{e} \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}| \leq eh$, sostituendo in (9) e ricordando i procedimenti che hanno condotto alla (8) del numero precedente si ottiene

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \int_S \frac{\epsilon e^2 + \mu h^2}{2} dS \leq M \int_S \frac{\epsilon e^2 + \mu h^2}{2} dS - \int_{\Sigma} \left(v \frac{\epsilon e^2 + \mu h^2}{2} - eh \right) d\Sigma.$$

Ora si ha, ricordando il valore di v :

$$\begin{aligned} v \frac{\epsilon e^2 + \mu h^2}{2} - eh &= \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon e^2}{\sqrt{\epsilon_{\min} \mu_{\min}}} + \frac{\mu h^2}{\sqrt{\epsilon_{\min} \mu_{\min}}} - 2eh \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e^2 + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} h^2 - 2eh \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} h \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Allora, sopprimendo nella (10) l'ultimo termine a 2° membro, la disuguaglianza viene rafforzata e si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_S \frac{\epsilon e^2 + \mu h^2}{2} dS \leq M \int_S \frac{\epsilon e^2 + \mu h^2}{2} dS.$$

⁽⁹⁾ L'ipotesi che Σ contenga nel suo interno le σ è stata introdotta per semplificare l'esposizione, ma non è necessaria.

Infine col procedimento del numero precedente, cioè applicando il lemma di GRONWALL, si ottiene:

$$(11) \quad \int_S \frac{\epsilon e^2 + \mu h^2}{2} dS = 0$$

per ogni $0 \leq t \leq t_0$. In particolare per $t = t_0$ si deduce dalla (11) $e = h = 0$ in P . Poiché P e t_0 sono arbitrari il teorema di unicità resta provato in ogni istante t e in ogni punto P di D .

IV. - Tornando al caso di un dominio (D) finito limitato da una superficie σ é bene notare che il teorema di unicità vale nell'intervallo di tempo $(0, T)$, o $(-T, 0)$, se sono assegnate solo in questo intervallo i valori di E_i in tutti i punti di (D) e di E_t o H_t su σ , oltre che le condizioni iniziali.

Ora, poiché si può ammettere che sia $J(0, 0) = 0$, se nell'intervallo $(-T, 0)$, estremi inclusi, é E_t identicamente nullo in (D) e E_t , o H_t uguale a zero in ogni punto di σ , le (3) ammettono, in corrispondenza alle condizioni iniziali $E = H = 0$, la sola soluzione $E \equiv 0$, $H \equiv 0$, come appare ovviamente dalle equazioni stesse e dal teorema di unicità ora dimostrato.

Questo risultato permette di estendere al campo elettromagnetico un'osservazione di SERRIN e EDMUNDUS ⁽¹⁰⁾, cioè che se in un dominio limitato da una superficie σ si ha in un certo istante un campo elettromagnetico non nullo e da quell'istante in poi é $E_t = 0$ in tutto (D) e E_t , o H_t , uguale a zero in tutti i punti di σ , ovvero se da quell'istante in poi non si produce energia in (D) e non si ha flusso d'energia attraverso σ , il campo nell'interno non può annullarsi altro che dopo un tempo infinito. Infatti se, per assurdo, il campo si annullasse dopo un tempo finito, si potrebbe porre l'origine del tempo nell'istante in cui il campo é zero; allora detto $-T$ l'istante in cui comincia ad annullarsi E_t su (D) e E_t , o H_t , su σ , si avrebbe E ed H identicamente nulle anche in $-T$, contro l'ipotesi.

Considerazioni di questo tipo potrebbero farsi, con qualche precisazione, anche per un dominio infinito, ma su ciò non insistiamo.

(10) Vedi nota (1).