Bollettino Unione Matematica Italiana

Maria Teresa Vacca

Sul limite di Poincaré per una massa fluida di alta conduttività elettrica uniformemente rotante in cui si genera un campo magnetico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.2, p. 127–137.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_2_127_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Sul limite di Poincaré per una massa fluida di alta conduttività elettrica uniformemente rotante in cui si genera un campo magnetico.

Nota di MARIA TERESA VACCA (a Torino) (*) (**)

Sunto. - *Per una massa fluida compressibile di conduttività elettrica infinita, uniformemente rotante intorno ad un suo asse baricentrale, si stabiliscono delle limitazioni alle quali deve soddisfare la velocità angolare di rotazione affinchè sussista l'equilibrio relativo. Si dànno inoltre delle formule che sono l'estensione alla magnetofluidodinamica della relazione che esprime il teorema di Poincaré della fluidodinamica classica. Si considera in particolare il caso di una massa fluida immersa in un campo magnetico uniforme, nell'ipotesi che il campo magnetico sia di intensità sufficientemente piccola.*

1. Consideriamo una massa fluida di alta conduttività elettrica, tale da potersi ritenere infinita, uniformemente rotante intorno ad un suo asse baricentrale, che assumeremo come asse z, e soggetta alla propria gravitazione.

Essendo O il centro della massa fluida ed $\vec{\omega}$ il vettore velocità angolare di rotazione, la velocità $\vec{v}$ di una particella P sarà data da

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge (P - O) \tag{1}$$

e quindi l'accelerazione risulta

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] = -\frac{1}{2}\omega^2 \operatorname{grad} r^2 \tag{2}$$

dove r, in un sistema di coordinate cilindriche r, φ, z, è la distanza di un punto dall'asse di rotazione.

Indicando con U il potenziale delle forze di mutua attrazione newtoniana delle particelle fluide, con ρ la densità, p la pressione,

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 15 dicembre 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n° 3 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R. (1963-64).

$\vec{H}$ il campo magnetico e μ la permeabilità magnetica (costante), l'equazione del moto diventa

$$(3) \qquad -\frac{1}{2}\omega^2\rho \operatorname{grad} r^2 = -\operatorname{grad} p + \mu \operatorname{rot} \vec{H} \wedge \vec{H} + \rho \operatorname{grad} U.$$

L'equazione di continuità in condizioni stazionarie si riduce all'equazione

$$\operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

che per il valore $\vec{v} = \omega r^2 \operatorname{grad} \varphi$ dato dalla (1) è identicamente verificata nell'ipotesi della simmetria assiale, in cui cioè tutti gli elementi del campo e del moto sono indipendenti dall'anomalia φ.

Il campo magnetico $\vec{H}$, in condizioni stazionarie e nell'ipotesi di conduttività elettrica infinita, deve verificare l'equazione

$$(4) \qquad \operatorname{rot} (\vec{H} \wedge \vec{v}) = 0$$

con la condizione

$$(5) \qquad \operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Indicando con H_r, H_φ, H_z le componenti cilindriche del campo magnetico dalla (4), tenuto conto della (5), si deduce che deve essere [1]

$$(6) \qquad \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = 0,$$

cioè il campo magnetico sarà simmetrico rispetto all'asse z. Dalla (5) si ha inoltre

$$(7) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r H_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

[1] Cfr. C. AGOSTINELLI, *Sulle equazioni dell'equilibrio adiabatico magnetodinamico di una massa fluida gassosa uniformemente rotante e gravitante*, («Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», serie VIII, vol. XXVI, fasc. 5 - Maggio 1959).

la quale mostra che dovrà esistere una funzione del campo $V(r, z)$ tale che

$$H_r = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}. \tag{8}$$

Per il campo magnetico si ha quindi

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{grad}\, r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{grad}\, z + rH_\varphi\,\mathrm{grad}\,\varphi = \\ &= \frac{1}{r}\,\mathrm{grad}\, V \wedge \vec{a_\varphi} + H_\varphi\,\vec{a_\varphi}\end{aligned} \tag{9}$$

da cui si ricava

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = -\frac{\nabla_2 V}{r}\,\vec{a_\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\,\vec{a_z} - \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z}\,\vec{a_r}\right], \tag{10}$$

essendo $\vec{a_r}$, $\vec{a_\varphi}$, $\vec{a_z}$ i versori secondo cui variano le coordinate r, φ, z e dove è

$$\nabla_2 V = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{11}$$

Segue ancora

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\vec{H} \wedge \vec{H} &= -\frac{\nabla_2 V}{r^2}\,\mathrm{grad}\, V + \\ &+ \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial z}\right]\vec{a_\varphi} - \frac{1}{2r^2}\,\mathrm{grad}\,(rH_\varphi)^2.\end{aligned} \tag{12}$$

Dall'equazione (3) del moto si deduce che deve essere

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} \wedge \vec{H} \times \vec{a_\varphi} = 0$$

e quindi la (12) porge

$$\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \tag{13}$$

cioè rH_φ sarà funzione di V:

$$rH_\varphi = F(V). \tag{14}$$

La (12) si riduce pertanto alla

$$\text{rot}\,\vec{H} \wedge \vec{H} = -\left(\nabla_2 V + F\frac{dF}{dV}\right)\frac{1}{r^2}\,\text{grad}\,V. \tag{15}$$

Prendendo ora il rotore di ambo i membri della (3) si ha

$$\mu\left\{\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nabla_2 V + FF'}{r^2}\right) - \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nabla_2 V + FF'}{r^2}\right)\right\} + \omega^2 r\frac{\partial \rho}{\partial z} + \tag{16}$$

$$+\frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial \rho}{\partial r}\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \qquad \left(F' = \frac{dF}{dV}\right).$$

D'altra parte, supposto che la pressione sia funzione della sola densità, $p = p(\rho)$, ponendo $\mathcal{F}(\rho) = \int \frac{dp}{\rho}$, l'equazione (3), dopo aver diviso ambo i membri per ρ, si può scrivere

$$\text{grad}\left[\mathcal{F}(\rho) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - U\right] + \frac{\mu}{r^2\rho}(\nabla_2 V + FF')\,\text{grad}\,V = 0 \tag{17}$$

e prendendo il rotore di ambo i membri si ha

$$\text{grad}\,\frac{\nabla_2 V + FF'}{r^2\rho} \wedge \text{grad}\,V = 0. \tag{18}$$

Avremo perciò

$$\frac{\nabla_2 V + FF'}{r^2\rho} = \Phi(V) \tag{19}$$

con Φ funzione di V.

Se ora moltiplichiamo ambo i membri della (3) scalarmente per $\vec{H}$ otteniamo

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho\frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial r} - \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \rho\frac{\partial U}{\partial r} - \omega^2 r\rho\right)\frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{20}$$

Da questa si deduce che deve esistere un fattore integrante $\lambda(r, z)$ tale che

$$\text{(21)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= \lambda\left(\frac{\partial p}{\partial r} - \omega^2 r\rho - \rho\frac{\partial U}{\partial r}\right) \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \lambda\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho\frac{\partial U}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Assumendo $\lambda = \frac{1}{h\rho}$, con h costante arbitraria, si ha

$$\text{(22)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{1}{h}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} - \omega^2 r - \frac{\partial U}{\partial r}\right) \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{1}{h}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

da cui segue l'integrale

$$\text{(23)}\qquad V = \frac{1}{h}\left[\mathcal{P}(\rho) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - U\right].$$

Ricavando da questa il potenziale U e sostituendo nella (16) si ha

$$\text{(24)}\qquad \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nabla_2 V + FF'}{r^2} + \frac{h}{\mu}\rho\right) - \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nabla_2 V + FF'}{r^2} + \frac{h}{\mu}\rho\right) = 0$$

da cui si deduce che

$$\text{(25)}\qquad \frac{\nabla_2 V + FF'}{r^2} + \frac{h}{\mu}\rho = \Psi(V)$$

con $\Psi(V)$ funzione arbitraria di V.

Dal confronto delle (19) e (25) segue che in generale anche la densità ρ è funzione di V e quindi lo è anche il rapporto

$$\text{(26)}\qquad \frac{\nabla_2 V + FF'}{r^2} = -\frac{\operatorname{rot}\vec{H} \wedge \vec{H} \times \operatorname{grad} V}{(\operatorname{grad} V)^2}.$$

Ma le equazioni (19) e (25) risultano compatibili, con ρ non necessariamente funzione di V, assumendo

$$\Phi = -\frac{h}{\mu}, \qquad \Psi = 0. \tag{27}$$

Le (19) e (25) si riducono allora all'unica equazione

$$\frac{\nabla_2 V + FF'}{r^2\rho} = -\frac{h}{\mu}. \tag{28}$$

2. Se ora prendiamo la divergenza di ambo i membri della (17) ed osserviamo che per l'equazione di Poisson risulta

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U \equiv \nabla_2 U = -4\pi f \rho \tag{29}$$

dove f è la costante di attrazione universale, abbiamo

$$\triangle_2 \mathfrak{P} - 2\omega^2 + 4\pi f\rho + \mu \operatorname{div}\left(\frac{\nabla_2 V + FF'}{r^2\rho} \operatorname{grad} V\right) = 0. \tag{30}$$

Integrando rispetto a tutto il volume τ occupato dal fluido ed indicando con σ la superficie che lo delimita, ne deduciamo

$$\omega^2 = 2\pi f \frac{1}{\tau}\int_\tau \rho d\tau + \frac{1}{2\tau}\left[\int_\sigma \frac{d\mathfrak{P}}{dn} d\sigma + \int_\sigma \mu \frac{\nabla_2 V + FF'}{r^2\rho}\frac{dV}{dn} d\sigma\right] \tag{31}$$

essendo $\vec{n}$ la normale esterna alla superficie σ.

Poichè sulla superficie σ è

$$\frac{d\mathfrak{P}}{dn} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dn} < 0, \tag{32}$$

dalla (31), avendo riguardo alla (19), segue che sarà

$$\omega^2 < 2\pi f \rho_m + \frac{\mu}{2\tau}\int_\sigma \Phi(V)\frac{dV}{dn} d\sigma, \tag{33}$$

dove $\rho_m = \frac{1}{\tau}\int_\tau \rho d\tau$ è la densità media della massa fluida.

La (33) nella sua interpretazione meccanica costituisce una estensione alla magnetofuidodinamica del teorema di POINCARÉ che stabilisce un limite superiore per la velocità angolare di rotazione di masse fluide rotanti.

Dalla (33) si ha che l'equilibrio relativo della massa fluida sarà possibile se il campo magnetico indotto è tale che

$$2\pi f \rho_{m^\circ} + \frac{\mu}{2\tau} \int_\sigma \Phi(V) \frac{dV}{dn} d\sigma > 0. \tag{34}$$

In caso contrario l'equilibrio sarà impossibile e si avrà distacco di fluido dalla superficie.

Nel caso particolare in cui $\Phi = -\frac{h}{\mu}$ e $\Psi = 0$, e sussiste quindi la (28), con ρ non necessariamente funzione di V, la condizione (34) diventa

$$\rho_m > \frac{h}{4\pi f \tau} \int_\sigma \frac{dV}{dn} d\sigma \tag{35}$$

e quando questa è soddisfatta si ha

$$0 < \frac{\omega^2}{2\pi f} < \rho_m - \frac{h}{4\pi f \tau} \int_\sigma \frac{dV}{dn} d\sigma. \tag{36}$$

Il limite superiore di POINCARÉ risulterà allora abbassato, od innalzato, secondo se è

$$h \int_\sigma \frac{dV}{dn} d\sigma > 0, \quad \text{oppure} \quad h \int_\sigma \frac{dV}{dn} d\sigma < 0. \tag{37}$$

Questo dipende ovviamente dal segno della costante h e dai valori di $\frac{dV}{dn}$ sulla superficie σ.

Osserviamo che essendo $\vec{n}$ il versore della normale esterna in un punto della superficie ed $\vec{a}_m$ il versore della tangente al profilo meridiano passante per lo stesso punto, orientato in modo che sia

$$\vec{a}_m = \vec{n} \wedge \vec{a}_\varphi,$$

si ha

$$\frac{dV}{dn} = \operatorname{grad} V \times \vec{n} = \operatorname{grad} V \times \vec{a}_\varphi \wedge \vec{a}_m = \operatorname{grad} V \wedge \vec{a}_\varphi \times \vec{a}_m \tag{38}$$

e quindi, in virtù della (9), la componente H_m del campo magnetico tangente al detto profilo meridiano risulta

$$H_m = \frac{1}{r} \operatorname{grad} V \wedge \vec{a}_\varphi \times \vec{a}_m = \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}. \tag{39}$$

Perciò se in superficie è nulla la componente del campo magnetico tangente al profilo meridiano, in ogni punto della superficie è $\frac{dV}{dn} = 0$ ed allora il teorema di POINCARÉ rimane invariato.

3. Particolarmente importante per le applicazioni astrofisiche è il caso in cui la massa fluida è immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{H}_0$ diretto secondo l'asse di rotazione ed il campo magnetico indotto $\vec{h}$ è in intensità sufficientemente piccolo da poter trascurare i termini di ordine superiore al primo.

In questo caso ponendo

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h} \tag{40}$$

l'equazione del moto diventa

$$-\frac{1}{2}\omega^2 \operatorname{grad} r^2 = -\operatorname{grad} \mathcal{F}(\rho) + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \vec{h} \wedge \vec{H}_0 + \operatorname{grad} U \tag{41}$$

e prendendo la divergenza di ambo i membri si ottiene

$$2\omega^2 = \Delta_2 \mathcal{F} - \mu \operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{rot}\vec{h}}{\rho} \wedge \vec{H}_0\right) + 4\pi f \rho. \tag{42}$$

Dalla condizione $\operatorname{div}\vec{h} = 0$, si deduce che anche in questo caso esisterà una funzione $V(r, z)$ tale che

$$h_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad h_z = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}. \tag{43}$$

Per la simmetria intorno all'asse z dalla (41) si ha che deve essere

$$\operatorname{rot} \vec{h} \wedge \vec{H_0} \times \vec{a_\varphi} = 0, \quad \text{cioè} \quad \operatorname{rot} \vec{h} \times \vec{a_r} = 0,$$

e quindi, in conformità della (10),

$$\frac{\partial (r h_\varphi)}{\partial z} = 0$$

Ne segue

$$\operatorname{rot} \vec{h} = -\frac{\nabla_2 V}{r} \vec{a_\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r h_\varphi)}{\partial r} \vec{a_z}$$

e

$$\operatorname{rot} \vec{h} \wedge \vec{H_0} = -H_0 \frac{\nabla_2 V}{r} \vec{a_r}. \tag{44}$$

Sostituendo nella (41) e nella (42) si ha

$$-\frac{1}{2} \omega^2 \operatorname{grad} r^2 = -\operatorname{grad} \mathcal{S} - \frac{\mu H_0}{\rho} \frac{\nabla_2 V}{r} \vec{a_r} + \operatorname{grad} U \tag{45}$$

e

$$2\omega^2 = \Delta_2 \mathcal{S} + \mu H_0 \operatorname{div}\left(\frac{\nabla_2 V}{r\rho} \operatorname{grad} r\right) + 4\pi f \rho. \tag{46}$$

Prendendo il rotore di ambo i membri della (45) si ottiene

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\nabla_2 V}{r\rho}\right) \wedge \operatorname{grad} r = 0$$

e quindi

$$\frac{\nabla_2 V}{r\rho} = g(r) \tag{47}$$

con $g(r)$ funzione arbitraria di r.

Essendo nota la funzione $\mathcal{G}(\rho)$, se si fissa la funzione $g(r)$ la (46) diventa un'equazione in cui è incognita la sola densità ρ.

Si ha precisamente

$$(48) \qquad \triangle_2 \mathcal{G}(\rho) + 4\pi f \rho = 2\omega^2 - \mu H_0 \operatorname{div} [g(r) \operatorname{grad} r].$$

La densità ρ va dunque determinata in modo da soddisfare alla (48) ed alla condizione di annullarsi in superficie. Dopo ciò la (47) definisce la funzione V del campo magnetico.

Nel caso in cui il fluido è in condizioni adiabatiche si ha $p = c\rho^\gamma$ con c e γ costanti (essendo γ uguale al rapporto tra il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante); perciò risulta $\mathcal{G} = \frac{c\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1}$ e l'equazione (48) diventa

$$(49) \qquad \triangle_2 \rho^{\gamma-1} + \frac{4\pi f(\gamma - 1)}{c\gamma} \rho =$$

$$= \frac{\gamma - 1}{c\gamma} \left\{ 2\omega^2 - \mu H_0 \left[\frac{1}{r} g(r) + g'(r) \right] \right\}.$$

Se ora integriamo ambo i membri della (48), estendendo l'integrale a tutto il volume τ occupato dal fluido, abbiamo

$$(50) \qquad \omega^2 = \frac{1}{2\tau} \int_\sigma \frac{d\mathcal{G}}{dn} d\sigma + 2\pi f \frac{1}{\tau} \int_\tau \rho d\tau + \frac{\mu H_0}{2\tau} \int_\sigma g(r) \frac{dr}{dn} d\sigma$$

e poichè in superficie è $\frac{d\mathcal{G}}{dn} < 0$, troviamo

$$(51) \qquad \omega^2 < 2\pi f \rho_m + \frac{\mu H_0}{2\tau} \int_\sigma g(r) \frac{dr}{dn} d\sigma.$$

Anche in questo caso perchè l'equilibrio possa sussistere deve essere

$$(52) \qquad 2\pi f \rho_m + \frac{\mu H_0}{2\tau} \int_\sigma g(r) \frac{dr}{dn} d\sigma > 0$$

ed il limite superiore di POINCARÉ risulterà abbassato od innalzato secondo se è

$$H_0 \int_\sigma g(r) \frac{dr}{dn} d\sigma < 0, \quad \text{oppure} \quad H_0 \int_\sigma g(r) \frac{dr}{dn} d\sigma > 0. \tag{53}$$

Consideriamo il caso particolare in cui

$$g(r) = k_0 r, \qquad (k_0 \text{ costante}), \tag{54}$$

e quindi

$$\nabla_2 V = k_0 r^2 \rho. \tag{55}$$

In questo caso l'equazione (49) diventa

$$\Delta_2 \rho^{\gamma-1} + \frac{4\pi f(\gamma-1)}{c\gamma}\rho = \frac{\gamma-1}{c\gamma}[2\omega^2 - 2\mu H_0 k_0] \tag{56}$$

e la (51) porge

$$\omega^2 < 2\pi f \rho_m + \mu H_0 k_0. \tag{57}$$

Supposto $H_0 > 0$, cioè che la direzione del campo magnetico esterno sia nel verso positivo dell'asse di rotazione, il limite superiore di POINCARÉ risulterà abbassato od innalzato secondo se è $k_0 < 0$, oppure $k_0 > 0$. Per k_0 in valore assoluto sufficientemente piccolo la condizione

$$2\pi f \rho_m + \mu H_0 k_0 > 0$$

perchè sussista l'equilibrio, sarà certamente soddisfatta.