Domingos Pisanelli

Sull'invertibilità degli operatori analitici negli spazi di Banach.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.2, p. 110–113.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_2_110_0>

Sull'invertibilità degli operatori analitici negli spazi di Banach

Nota di DOMINGOS PISANELLI (a S. Paolo - Brasile) (*)

Sunto. *Si danno condizioni sufficienti per l'invertibilità di un operatore analitico secondo Frechet estendendo il "calcul des limites" di Cauchy.*

Sia $y = f(x)$ un operatore analitico in un aperto di X con valori in Y entrambi spazi localmente convessi sul corpo complesso C. Abbiamo dimostrato ([2], p. 29) una formola per la maggiorazione del differenziale di ordine n di $f(x)$. Quando X ed Y sono spazi di BANACH, questa formola prende l'aspetto:

$$\| \delta^n f(x_0, h_1, \ldots, h_n) \| \leq a_n \| h_1 \| \ldots \| h_n \| \tag{1}$$

dove $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < +\infty$ e $a_1 = 1$.

Vogliamo ora estendere il "calcul des limites" di CAUCHY per dimostrare l'invertibilità locale di un operatore analitico secondo FRECHET o, ciò che è lo stesso negli spazi di BANACH, analitico secondo FANTAPPIÈ (J. SEBASTIAO e SILVA ([3], p. 25)).

Per le definizioni e i teoremi ci atterremo al trattato di HILLE: Functional Analysis and Semi-Groups [1].

TEOREMA. - *Sia* $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ *analitico secondo Frechet nell'intorno* $\| \mathrm{x} - \mathrm{x}_0 \| < \mathrm{r}$ *di* X, *con valori in* Y, *entrambi spazi di Banach su* C. *Supponiamo che* $\delta \mathrm{f}(x_0, h)$ *sia un'applicazione biunivoca di* X *su* Y. *Esiste allora un unico operatore* $\mathrm{x} = \varphi(\mathrm{y})$ *analitico secondo Frechet in un intorno di* $\mathrm{y}_0 = \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$ *ove* $(\mathrm{f}_0\varphi)(\mathrm{y}) = \mathrm{y}$ *e* $\varphi(\mathrm{y}_0) = \mathrm{x}_0$.

Per semplicità supporremo che $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Come si sa $L(y)$ inverso di $\delta f(0, h)$ è lineare e continuo in Y ([4], p. 36).

$F(x) = L(f(x))$ sarà analitico secondo FRECHET nell'intorno

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 7 ottobre 1963.

$\| x \| < r$ in X con valori in X e avremo:

$$F(x) = x \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n} \delta^n F(0, x) \equiv \sum_{n \geq 1} P_n(x) \qquad \| x \| < r.$$

Supponiamo che esista $F^{-1}(y)$ analitico secondo FRECHET in un intorno $V(0)$ di zero, con valori in $\| x \| < r$ tale che

$$F_0 F^{-1}(y) = y \qquad F^{-1}(0) = 0. \tag{2}$$

Avremo allora:

$$\sum_{n \geq 1} P_n \left(\sum_{m \geq 1} Q_m(y) \right) \equiv \sum_{n \geq 1} P_n \left(\sum_{m_1 \geq 1} Q_{m_1}(y), \dots, \sum_{m_n \geq 1} Q_{m_n}(y) \right) = y \tag{3}$$

dove $P_n(h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{n!} \delta^n F(0, h_1, \dots, h_n)$ e $\sum_{m \geq 1} Q_m(y)$ è lo sviluppo di TAYLOR di $F^{-1}(y)$ nell'intorno $V(0)$. Da (2) si avrà sviluppando $F_0 F^{-1}$:

$$\sum_{k \geq 1} \Sigma' \, P_n(Q_{m_1}(y), \dots, Q_{m_n}(y)) = y \qquad y \in V(0)$$

dove il primo sommatorio è esteso alle soluzioni positive e intere dell'equazione $m_1 + \dots + m_n = k$ per tutti gli $n \geq 1$.

Dal principio di identità si avrà:

$$P_1(Q_1(y)) = y$$

$$\Sigma' \, P_n(Q_{m_1}(y), \dots, Q_{m_n}(y)) = 0 \qquad (k > 1)$$

donde

$$Q_1(y) = y$$

$$Q_k(y) = - \Sigma'' \, P_n(Q_{m_1}(y), \dots, Q_{m_n}(y)) \qquad (k > 1) \tag{4}$$

ciò che dimostra per induzione l'unicità dell' operatore in questione perchè il sommatorio è ora esteso a tutte le soluzioni positive e intere dell'equazione $m_1 + \ldots + m_n = k$ per tutti gli $n > 1$ e quindi $m_j < m_1 + \ldots + m_n = k$ $(1 \leq j \leq n)$.

Viceversa queste formule (4) ci danno la possibilità di costruire per induzione gli operatori polinomiali $Q_k(y)$ $(k \geq 1)$.

Dimostriamo che:

$$\| Q_k(y) \| \leq b_k \| y \|^k \qquad k \geq 1 \tag{5}$$

dove $(b_k)_{k \geq 1}$ è una successione di numeri positivi tali che

$$\overline{\lim} \sqrt[k]{b_k} < +\infty.$$

Infatti da (1) si ha:

$$\| P_n(h_1, \ldots, h_n) \| \leq a_n \| h_1 \| \ldots \| h_n \| \tag{6}$$

con

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < +\infty \text{ e } a_1 = 1.$$

Sia la serie di potenze:

$$z - a_1 z^2 - \ldots - a_n z^n - \ldots$$

e

$$w + b_2 w^2 + \ldots + b_m w^m + \ldots$$

la sua inversa.

Si ha $\| Q_1(y) \| = \| y \|$. Ammessa (5) per $k - 1$ si ha da (5) e da (6):

$$\| Q_k(y) \| \leq \Sigma'' \, a_n \| Q_{m_1}(y) \| \ldots \| Q_{m_n}(y) \| \leq$$

$$(\Sigma'' \, a_n b_{m_1} \ldots b_{m_n}) \| y \|^k = b_k \| y \|^k,$$

dove come al solito il sommatorio è esteso alle soluzioni intere e positive dell'equazione $m_1 + \ldots + m_n = k$ per tutti gli $n > 1$.

Dalla G-analiticità degli operatori polinomiali $Q_m(y)$ e dalla convergenza uniforme di

$$\sum_{m \geq 1} Q_m(y) \tag{7}$$

in ogni $\| y \| \leq r_1 < \rho \left(\frac{1}{\rho} = \overline{\lim} \sqrt[m]{b_m} \right)$ si avrà l'analicità di (7) in $\| y \| < \rho$. Potremo allora trovare $s > 0$ in modo che $\| \sum_{m \geq 1} Q(y) \| < r$ quando $\| y \| < s$ e ciò dimostra (2) e quindi il teorema

Questione aperta.

La definizione di analicità di un operatore si estende agli spazi localmente convessi. La costruzione dell'operatore inverso $F^{-1}(y)$ vale formalmente in questa categoria di spazi. Si potrebbe allora tentare l'estensione del teorema dato usufruendo forse della disuguaglianza fondamentale di [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Hille, *Functional Analysis and Semi-Groups*, « American Mathematical Society Publications », 1948.

[2] D. Pisanelli, *Contribuçao ao Estudo dos Operadores Analiticos*, in pubblicazione nel « Bolotim da Societade de Matemática de São Paulo.

[3] J. Sebastião - Silva, *Sui fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici*, « Portugaliae Mathematica », vol. 12, 1953.

[4] N. Bourbaki, Livre I, *Espaces Vectoriels Topologiques*, chap. I.