UMI

Recensioni.

* F. M. Stewart, Introduction to linear Algebra, D. Van Nostrand Co, Inc., 1963 (Enrico Bompiani)
* Paul Ver Eecke, Les comiques d'Apollonius de Perge, Libraire Scientifique A. Blanchard, Paris, 1963 (Enrico Bompiani)
* A. R. Amir-Moéz, A. L. Fass, Elements of Linear Spaces, Pergamon Press, 1962 (Enrico Bompiani)
* Manuel Balanzat, El numero natural y sus generalizaciones, Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ciencias de la Educations, Publicaciones de Matematicas y Fisica, San Luis, 1953 (Marco Cugiani)
* A. Doneddu, Arithmétique générale, Dunod, Paris, 1962 (Marco Cugiani)
* J. Burlak, K. Brooke, Russian-English Mathematical Vocabulary, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1963 (Giovanni Sansone)
* Nicolas Bourbaki, Elementi di storia della matematica, Feltrinelli, Milano, 1963 (Ettore Carruccio)
* R. Bellman, K. L. Cooke, Differential-Difference Equations, Academic Press, New York London, 1963 (Antonio Pignedoli)
* S. L. Sobolev, Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, American Mathematical Society, Rhode Island, 1963 (Antonio Pignedoli)
* Z. W. Birnbaum, Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Harper e Brothers, New York, 1962 (Antonio Pignedoli)
* A. I. Akhiezer, V. B. Berestetskii, Elements of Auantum Electrodynamics, Oldbourne Press,London, 1963 (Antonio Pignedoli)
* Kitow, Krinizki, Elektronische Digitalrechner und Programmierung, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1963 (Antonio Pignedoli)
* George B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1963 (Antonio Pignedoli)
* Tom M. Apostol, Calculus,Vol. II, Blaisdell Publishing Company,New York, London, 1962 (Antonio Pignedoli)
* Karl Steinbuch, Automat und Mensch (Kibernetische Tatsachen und Hypothsen), Springer Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1963 (Antonio Pignedoli)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.1, p. 64–78.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_1_64_0>

RECENSIONI

F. M. STEWART, *Introduction to linear Algebra*, D. Van Nostrand Co., Inc., 1963, p. XV + 281.

Fra i molti trattati di algebra lineare che il diffondersi di questo insegnamento ha prodotto, quello in esame merita per molti aspetti particolare considerazione.

Oggetto di esso è la teoria degli spazi vettoriali di dimensione finita e delle trasformazioni lineari.

Il Cap. I (introduzione) mostra su esempi adatti come la nozione di spazio vettoriale si presenti spontaneamente in problemi di carattere elementare; il Cap. II (il piano) dà occasione a introdurre le nozioni di dimensione, base, prodotto interno, area orientata in modo del tutto spontaneo.

Preparato così il terreno s'introducono (Cap. III) le nozioni generali di spazio vettoriale (relativo ad un campo scalare assegnato) e quelle di dipendenza e indipendenza lineare, di dimensione, di base e di sottospazi e i teoremi relativi. Il maggior interesse risiede nella teoria delle trasformazioni lineari su spazi vettoriali: e qui (Cap. IV) s'introducono sponta neamente le nozioni di matrice e di operazioni su matrici. Il Cap. V tratta dei funzionali lineari o trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale al suo campo scalare; il loro insieme è lo spazio (vettoriale) duale del dato. La teoria delle forme multilineari e in particolare di quelle alternanti for nisce un modo diretto d'introduzione e dello studio dei determinanti. La trattazione classica di questi è esposta nel Cap. VI. L'ultimo capitolo (VII) è dedicato agli spazi vettoriali in cui sia definito un prodotto interno sia nel campo reale che in quello complesso. E in esso trovano naturalmente posto le nozioni di ortogonalità, di basi ortonormali, di trasformazione simmetrica: e a questo tipo si riattaccano i problemi più interessanti sugli autovalori.

Riassunto così il contenuto vengo ai molti pregi cui ho accennato in principio. Anzitutto il carattere discorsivo: ogni capitolo s'inizia con una specie di colloquio fra l'Autore e il Lettore atto a mettere in evidenza ciò che si vuol fare e perchè e come bisognerà tentare di abbordare il problema. A questo discorso introduttivo fa riscontro alla fine del capitolo un bilancio consuntivo delle idee essenziali che sono entrate in gioco e dei risultati più importanti ottenuti. Altro pregio essenziale è la chiarezza, la rigorosa esposizione e la modernità del linguaggio di cui l'A. fa uso; la ricchezza dei problemi che non sono semplici applicazioni di quanto esposto nel testo ma spesso aggiungono notevoli estensioni del suo contenuto.

Un accorgimento molto utile è quello di confinare in appendici (sette) le nozioni, sostanzialmente di logica matematica (equazioni e identità; variabili, quantificatori, incognite; insiemi; dimostrazioni; indici e sommazione; funzioni), di cui il lettore *può* avere bisogno; i richiami ad esse sono fatti a margine del testo, senza appesantirlo per chi già le conoscesse. Un indice dei simboli, particolarmente necessario dato il rapido sviluppo del loro impiego nella matematica moderna, e un indice analitico chiudono questo eccellente volume.

ENRICO BOMPIANI

PAUL VER EECKE, *Les coniques d'Apollonius de Perge*, p. L + 656, Libraire Scientifique A. Blanchard, Paris, 1963.

È una ristampa della traduzione francese (apparsa la prima volta quaranta anni fa) del trattato sulle coniche di Apollonio di Pergamo.

Questo grande matematico, quasi contemporaneo di Archimede, raccolse in otto libri ben 378 proposizioni sulle coniche della maggior parte delle quali egli fu lo scopritore. A lui com'è noto si debbono i nomi attuali delle tre specie di coniche, la loro generazione come sezioni di coni circolari, proprietà di diametri, assi e asintoti, teoremi sulle tangenti e trasversali, sui fuochi (il nome è di Keplero), sulle intersezioni di coniche, sui massimi e minimi segmenti che si possono condurre da un punto ad una conica

Sono anche note le vicende attraverso le quali i libri sulle coniche sono giunte a noi. I primi quattro libri nel testo greco furono portati a Venezia nel 1427 da Francesco Filelfo, segretario della legazione veneta a Costantinopoli; Giorgio Valla scoprì questo manoscritto e pubblicò a Venezia (1501) la traduzione latina di alcuni frammenti. La prima traduzione latina completa dei primi quattro libri (gli unici allora noti) è dovuta al matematico veneziano G. B. Memo (1537). Francesco Maurolico aveva progettato una nuova traduzione latina che però non fu portata a termine; una versione completa fu pubblicata a Bologna da Federico Commandino nel 1566.

Altri tre libri furono portati in Olanda, in manoscritti arabi, da Jacques Golius; notizie su di essi arrivarono in Francia e in Italia ove Vincenzo Viviani pubblicò nel 1659 una sua ricostruzione del libro quinto. La traduzione dall'arabo in latino fu fatta fare da Alfonso Borelli e da lui pubblicata nel 1679. Un'altra fonte araba permise all'astronomo inglese Halley l'edizione latina del 1710. Un'edizione critica del testo greco dei primi quattro libri fu pubblicata dall'ellenista danese Heiberg nel 1893. La prima traduzione in una lingua moderna è quella del Ver Eecke pubblicata ncl 1922 ed ora ristampata; essa è basata per i primi quattro libri sull'edizione dell'Heiberg e per i tre successivi su quella dell'Halley.

ENRICO BOMPIANI

A. R. AMIR-MOÉZ e A. L. FASS, *Elements of Linear Spaces*, Pergamon Press,, 1962, p. IX + 149.

Il rinnovamento che in tutti i paesi va subendo l'insegnamento della matematica necessita, in questa fase di transizione, di libri che assicurino il raccordo (quindi la completezza nella preparazione dello studente) fra nozioni classiche e quelle più moderne in cui l'interesse predominante è relativo alle strutture che si prendono in esame. A questo scopo (e per l'ordinamento didattico di tipo anglosassone) risponde il libro attuale. La prima parte (5 capitoli) è un richiamo di nozioni relative allo spazio euclideo reale tridimensionale (vettori, trasformazioni lineari e matrici, determinanti ed equazioni lineari, autovalori); nella seconda parte le nozioni precedenti sono estese allo spazio complesso a un numero qualsiasi di dimensioni.

Nella terza parte vengono presentate alcune strutture algebriche, viene estesa la nozione di spazio vettoriale ad un campo qualunque e vengono approfonditi lo studio di alcuni tipi di trasformazioni lineari e la ricerca degli autovalori di matrici, particolarmente di quelle hermitiane.

ENRICO BOMPIANI

MANUEL BALANZAT, *El numero natural y sus generalizaciones*, fasc. 1°, Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ciencias de la Education, Publicaciones de Matematicas y Fisica, San Luis, 1953, pagg. 190.

Il volume è scritto con intento esclusivamente didattico. Esso ha per iscopo di portare a conoscenza degli insegnanti di scuola media della Repubblica Argentina alcuni metodi rigorosi per introdurre i numeri naturali, interi e razionali.

Il tono della esposizione è adeguato allo scopo. In pratica la lettura riesce agevole al livello culturale di un nostro studente del primo anno di Matematica.

La trattazione ha inizio con un'esposizione di notizie elementari sulla teoria degli insiemi e delle prime nozioni relative alle strutture algebriche.

Dopo queste premesse si dà corso alla teoria dei numeri naturali sviluppata partendo dai postulati del Peano. La trattazione è piuttosto ampia e l'Autore si diffonde anche ad illustrare delle questioni collaterali; per esempio egli accenna alla possibilità di servirsi del postulato del minimo nella costruzione del sistema dei numeri naturali, sempre per via assiomatica, anzi tratteggia effettivamente la teoria ché ne risulta.

La teoria dei numeri naturali viene poi presentata per via del tutto diversa sfruttando l'ordine di idee di Dedekind sugli insiemi semplicemente infiniti; infine ne vien fatta una terza presentazione sfruttando le proprietà degli insiemi finiti, ispirata alle teorie di Frege, Cantor e Russel.

Viene poi illustrata la costruzione del dominio dei numeri interi, ottenuto dapprima come ampliamento del sistema dei numeri naturali attraverso la teoria delle coppie, e poi, per via più strettamente algebrica, come dominio d'integrità bene ordinato. L'Autore non dimentica di riferire, per grandi linee, anche la teoria assiomatica del Padoa, che fornisce una terza via, di ispirazione peaniana, per giungere alla definizione del dominio degli interi. Appena accennata è la costruzione di tale dominio mediante la teoria degli operatori.

L'opera si conclude con la presentazione del campo razionale al quale si perviene dapprima considerandolo come campo dei quozienti del dominio degli interi, ed in un secondo momento costruendolo attraverso la teoria degli operatori.

L'Autore non trascura di accennare alle classiche caratterizzazioni del dominio degli interi, come minimo dominio ordinato, e del campo razionale, come minimo campo ordinato.

MARCO CUGIANI

A. DONEDDU, *Arithmétique générale,* Dunod, Paris, 1962, pagg. XIV-442, prezzo 38 NF.

Il libro si propone di dare un'esposizione sistematica dei fondamenti dell'aritmetica e di quelle parti dell'algebra e dell'analisi che ad essi si riconnettono in modo essenziale.

L'impegno di rigore logico non è disgiunto dalla preoccupazione di raggiungere anche una certa immediatezza intuitiva ricorrendo spesso alla presentazione di esempi e all'uso di considerazioni di carattere applicativo. Tutto ciò contribuisce a rendere più agevole l'accostamento agli aspetti teorici della trattazione la quale è nell'insieme perfettamente accessibile al livello di studenti all'inizio dei corsi universitari.

Sembra anzi che lo scopo dell'autore sia stato proprio quello di presentare una specie di introduzione agli studi universitari di analisi e di algebra facendo quasi da ponte tra l'impostazione rigorosa usuale negli studi superiori e quella più o meno intuitiva che costituisce l'ordinario modello didattico delle scuole medie.

L'opera incomincia con un'ampia introduzione sui concetti più generali della teoria degli insiemi e delle rappresentazioni e continua con una esposizione della teoria dei numeri naturali.

Lo svolgimento di quest'ultima è fatto con notevole ampiezza, partendo dai postulati del Peano per arrivare fino alla teoria della divisi bilità e alle congruenze; numerosi complementi di carattere anche applicativo contribuiscono ad ampliare la trattazione.

Questa continua sviluppando la teoria dei numeri razionali assoluti e dei numeri reali assoluti e la teoria delle grandezze.

Solo in un secondo tempo l'autore introduce i numeri relativi concludendo poi la sua trattazione con la teoria della funzione esponenziale e della funzione logaritmica.

Il tutto è corredato da numerosi esercizi che tendono ad illustrare non solo gli aspetti intuitivi ed applicativi del lavoro, ma spesso costituiscono dei notevoli complementi e portano un contributo sostanziale all'assetto teorico della trattazione.

MARCO CUGIANI

J. BURLAK MSC. PHD. e K. BROOKE BA, *Russian-Englisch Mathematical Vocabulary,* VII + 305, 21 s (University Mathematical Texts, Oliver and Boyd Ldt, Edinburg, 1963).

Al volumetto di P. H. Nidditch « Russian Reader in pure and applied Mathematics » recensito nel Vol. XVII (1962), p. 235, di questo Bollettino, inteso a facilitare la lettura della produzione russa, si accompagna ora questo vocabolario redatto dal Dr. J. Burlak lettore di matematica nelle Università di Glasgow e Kenneth e da K. Brooke professore di lingue moderne nell'Università di Keele.

Il vocabolario contiene un ampio elenco dei termini usati nelle mate matiche pure ed applicate e nella statistica.

Una parte introduttoria del vocabolario è d ʻta alla lettura dei testi russi e ad alcune nozioni grammaticali e linguistiche.

Questo vocabolario è da ritenersi assai utile per gli studiosi cui occorre di dover leggere le memorie originali redatte in russo senza attendere le traduzioni in lingua inglese edite dopo qualche tempo in USA e in Inghilterra.

GIOVANNI SANSONE

NICOLAS BOURBAKI, *Elementi di storia della matematica*, Traduzione dal francese di Maria Luisa Vesentini Ottolenghi, ed. Feltrinelli, Milano, 1963, pp. 272.

Le note storiche, comparse negli *Éléments de mathématiques* pubblicati a Parigi a partire dal 1939 dagli eminenti matematici Bourbakisti, sono state raccolte con lievi ritocchi in un volume unico, del quale l'opera presentemente considerata è una ben riuscita traduzione.

Ognuna di tali note si riferisce pertanto ad un singolo argomento trattato negli *Éléments* sopra citati, secondo il seguente piano:
C. I° - Fondamenti della matematica: Logica. Teoria degli insiemi. La formalizzazione della logica. La nozione di verità in matematica. Oggetti, modelli, strutture. La teoria degli insiemi. I paradossi della teoria degli insiemi e la crisi dei fondamenti. La metamatematica.

C. II° - Numerazione Analisi combinatoria.
C. III° - L'evoluzione dell'algebra.
C. IV° - Algebra lineare ed algebra multilineare.
C. V° - Polinomi e corpi commutativi.
C. VI° - Divisibilità. Corpi ordinati.
C. VII° - Algebra non commutativa.
C. VIII° - Forme quadratiche. Geometria elementare.
C. IX° - Spazi topologici.
C. X° - Spazi uniformi.
C. XI° - Numeri reali.
C. XII° - Esponenziali e logaritmi.
C. XIII° - Spazi a n dimensioni.
C. XIV° - Numeri complessi. Misura degli angoli.
C. XV° - Spazi metrici.
C. XVI° Calcolo infinitesimale.
C. XVII° - Sviluppi asintotici.
C. XVIII° - La funzione gamma.
C. XIX° - Spazi funzionali.
C. XX° - Spazi vettoriali topologici.
C. XXI° - Integrazioni.

Bibliografia.

Lo sviluppo delle idee sugli argomenti indicati viene di volta in volta presentato con suggestivi scorci e preziose notizie, in genere ben documentate con precise citazioni bibliografiche (1) tuttavia (come gli AA. stessi

(1) Si nota tuttavia qualche affermazione non documentata e tale da lasciare perplessi. P. es. a p. 54 si legge « fin dai tempi di Aristotele, la logica era sufficientemente sviluppata perchè si comprendesse perfettamente come da una teoria contraddittoria fosse possibile dedurre indifferentemente qualsiasi cosa ». Da quale testo possiamo ricavare che ai tempi di Aristotele era già conosciuto questo risultato, oggi noto come teorema dello Pseudo Scoto, che si fa risalire agli Scolastici?

A p. 118 si afferma che alcuni algebristi del XVI° e XVII° secolo non riconoscono nell'avvertenza a p. 7) « gli studi separati che costituiscono questo volume non pretendono affatto di tracciare, neppure in modo sommario, una storia coerente e completa dello sviluppo della matematica fino ai giorni nostri ». Ciò dipende sia dalla struttura frammentaria dell'opera, sia dal fatto che di taluni argomenti non sono ancora usciti sugli *Éléments* i capitoli corrispondenti.

Su talune questioni particolari, ritengo possibili vedute diverse da quelle presentate nel volume in esame.

Ad esempio, a proposito dei logici delle scuole megarica e stoica, fondatori di una forma di calcolo proposizionale, si legge a p. 14: « Purtroppo la loro influenza fu piuttosto effimera, ed i risultati raggiunti caddero nell'oblio fino al giorno in cui furono riscoperti dai logici del XIX secolo. Il maestro incontestato della logica resta, fino al XVII secolo, Aristotele ».

Ora, specialmente attraverso Boezio, la logica proposizionale era ben nota nel medioevo e confluisce con la sillogistica aristotelica nella logica scolastica (2).

Secondo i nostri A.A. l'apporto dei filosofi scolastici alla logica formale « non comporta alcun progresso di primo piano rispetto alle conquiste dei filosofi dell'antichità ».

Anche se tale giudizio è per sua natura di carattere opinabile, osserverei tra l'altro che nella filosofia scolastica trovano una sistemazione organica e coerente i due indirizzi della logica antica sopra considerati, compaiono le leggi che molto più tardi vennero dette di De Morgan (come viene riconosciuto nella nota 18 a p. 18) viene dimostrato il teorema dello Pseudo Scoto (3) si ha l'inizio di un calcolo proposizionale in logica trivalente... (4).

Non sarei d'accordo sull'affermazione dei nostri AA. (p. 21) secondo i quali di Aristotele non si può dire che si tenne al corrente della matematica dei suoi tempi: ora a prescindere dalle opere matematiche a lui attribuite ed andate perdute, da numerosi passi dei suoi scritti risultano le sue conoscenze nel campo indicato (5) in particolare « la scienza dimostrativa » è da lui pensata sul modello delle matematiche, vi sono fondati motivi per ritenere che Aristotele conoscesse il metodo di esaustione (6), s'interessò di questioni critiche relative alla teoria delle parallele (7).

Del resto, a proposito di un'osservazione di Aristotele, i nostri AA. notano (p. 25) che « la sua osservazione senza dubbio deriva dalla sua consuetudine con i matematici ».

credevano alla possibilità di risolvere qualsiasi equazione algebrica con radicali. Anche su questi precursori del teorema di Ruffini-Abel, si sarebbe desiderata qualche citazione precisa.

(2) V. per es. PETRI HISPANI, *Summulae logicales* (Torino 1947) Tractatus I: de propositionibus; Tractatus IV: de syllogismis.

(3) Cfr. nota (1). Sulla dimostrazione medioevale del teorema dello Pseudo Scoto v. I. M. BOCHENSKI, *A History of formal logic*, Notre Dame, Indiana, 1961, pp. 204 205.

(4) V. p. es. *The Tractatus de praedestinatione et de praescientia Dei et de futuris contingentibus* of WILLIAM OCHKAM edited with *a Study on the Mediaeval Problem of a Three valued Logic* bv PH. BOEHNER O. F. M. New York, 1945.

(5) Sui passi delle opere di Aristotele riguardanti le matematiche v. HEATH, *Mathematics in Aristotle*, Oxford 1949.

(6) V. E. RUFINI, *Il « metodo » di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'Antichità*, Milano 1961, pp. 65 74.

(7) E. RUFINI, *La preistoria delle parallele e il postulato di Euclide* (« Periodico di matematiche », Bologna, gennaio 1923).

Inoltre non direi (v. p. 25) « vediamo così la matematica greca dell'epoca classica sfociare in una specie di certezza empirica ». Questa considerazione molto difficilmente si accorda con il carattere essenzialmente platonico della matematica greca.

Nel capitolo sull'analisi combinatoria (pp. 62-64) non viene nominato il matematico persiano Omar Khayyam.

Una locuzione storicamente impropria si riscontra a p. 24 dove si parla dell'« angolo retto, definito da Euclide come metà dell'angolo piatto ». Ora, l'angolo piatto per Euclide non esiste, anzi il caso che condurrebbe all'angolo piatto viene esplicitamente escluso dal geometra alessandrino (V. *Elementi lib.* I, def. 8).

Nella storia della scoperta del carattere inverso delle operazioni d'integrazione e di derivazione (p. 182 e p. 190) si nota una lacuna in quanto non viene ricordato E. Torricelli, che viene invece citato insieme con Galileo da I. Barrow a proposito del teorema che porta il nome del maestro di Newton. A p. 214 si dice che « si era appreso da Jakob Bernoulli che la serie armonica è divergente », ma questo risultato era già stato dimostrato da P. Mengoli (8) e prima di lui da Oresme (9) e non è certo che detto matematico medioevale sia stato il primo a dimostrare tale divergenza.

Lasciate da parte le precedenti osservazioni di carattere particolare, l'opera considerata, nella sua viva aderenza alle esigenze del pensiero matematico del nostro tempo, presenta profondo interesse per chi desidera esaminare nella loro prospettiva storica le questioni attuali che hanno trovato un'organica sistemazione per merito dei Bourbakisti.

ETTORE CARRUCCIO

R. BELLMAN - K. L. COOKE, *Differential - Difference Equations*, Academic Press - New York - London, 1963, di pag. 462, prezzo $ 13,75.

È il sesto volume di una serie di monografie e testi dedicati alla Matematica nell'ambito delle applicazioni scientifiche e tecniche. Consta trattarsi della prima esposizione organica delle equazioni alle differenze e differenziali. Il volume consta di tredici capitoli.

Il primo di essi è dedicato alla trasformata di Laplace, con paragrafi relativi alla trasformata di Féjer ed a quella di Fourier.

Il secondo capitolo consta di snelli richiami sulle equazioni differenziali lineari, con accenni al metodo di risoluzione dell'equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti per mezzo della trasformazione di Laplace ed ai problemi autovalorici.

(8) V. p. es. A. AGOSTINI, *L'opera matematica di P. Mengoli* (« Archives internationales d'histoire des Sciences » Paris, n. 13, 1950).

(9) N. ORESME, *Questiones super geometriam Euclidis* ed. H. L. Busard, Leida, 1961, q. 1 2.

L'autore prende poi in esame le equazioni alle differenze e differenziali della forma generale:

$$a_0u'(t) + a_1u'(t-\omega) + b_0u(t) + b_1u(t-\omega) = f(t),$$

del primo ordine rispetto alle derivate e rispetto alle differenze. Se è $a_0 \neq 0$ ed $a_1 = 0$, si dice che l'equazione soprascritta è del tipo « ritardato »; se è $a_0 \neq 0$ con $a_1 \neq 0$, l'equazione stessa si dice del tipo « neutro »; se si ha $a_0 = 0$ con $a_1 \neq 0$, si dice che l'equazione in parola è del tipo « anticipato ». Il terzo capitolo del volume di cui stiamo parlando è dedicato alle equazioni lineari alle differenze e differenziali del primo ordine con coefficienti costanti e del tipo « ritardato »; mentre il quarto capitolo tratta dello sviluppo in serie delle soluzioni delle equazioni del primo ordine, sempre del tipo « ritardato ».

Nel capitolo quinto, l'autore si occupa delle equazioni lineari del primo ordine del tipo « neutro » e del tipo « anticipato », con coefficienti costanti; nel capitolo sesto vengono trattati i sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti. Nei citati capitoli terzo, quarto e quinto, va tenuto presente che, oltre alle questioni di esistenza e di unicità, sono oggetto di esame gli sviluppi in serie delle soluzioni ed il comportamento asintotico delle medesime; nel capitolo sesto, ci si occupa anche dei metodi basati sulle trasformazioni.

Ora, una delle equazioni funzionali di maggior interesse per l'Analisi matematica è la equazione funzionale lineare, comunemente chiamata « renewal equation », seguente:

$$u(t) = f(t) + \int_0^t u(t-s)\,\Phi\,(s)ds = f(t) + \int_0^t u(s)\,\Phi\,(t-s)ds.$$

In certe questioni applicative, l'equazione sopra scritta si presenta nella forma:

$$u(t) = f(t) + \int_0^t u(t-s)dG(s).$$

dove l'integrale è nel senso di Stieltjes. La delicatezza della discussione di una tale equazione nasce dalla possibile presenza di singolarità della funzione $u(t)$. Poichè, nella maggioranza delle applicazioni, $G(s)$ è o assolutamente continua o dotata di singolarità a gradino, risulta comodo studiare la prima delle due ultime equazioni funzionali scritte. E l'Autore, cominciando coll'esaminare le questioni di esistenza e di unicità, discute poi alcune proprietà speciali della soluzione, come il fatto che essa è mononotona ed a variazione limitata. Per quanto riguarda l'esplicito ottenere una rappresentazione analitica della soluzione (della prima delle due ultime equazioni funzionali scritte) l'autore fa vedere come si possa usare il metodo della trasformazione di Laplace. Da tale rappresentazione esplicita, l'autore fa derivare, quindi lo studio del comportamento asintotico della soluzione. L'autore esamina poi brevemente l'applicazione di teoremi tauberiani alla questione in parola.

L'ottavo capitolo è dedicato allo studio dei sistemi di « renewal equations » ed il nono all'esame del comportamento asintotico delle equazioni lineari alle differenze e differenziali. Nel decimo, l'autore richiama i capi saldi della teoria della stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, per passare poi alla teoria della stabilità delle soluzioni delle equazioni lineari alle differenze e differenziali. Nel capitolo undecimo si occupa della teoria della stabilità delle soluzioni per le equazioni non lineari alle differenze e differenziali ed anche del comportamento asintotico di tali soluzioni. Si occupa, in particolare, dei teoremi di Poincaré Liapunov e di Dini-Hukuhara.

Ora va tenuto presente che, nello studio, fatto nel volume, delle equazioni alle differenze e differenziali ed, in particolare, nelle dimostrazioni dei teoremi fondamentali concernenti gli sviluppi in serie di esponenziali, hanno notevole importanza le nozioni riguardanti la situazione degli zeri delle funzioni caratteristiche delle equazioni. Tali funzioni hanno la forma:

$$h(s) = a_0 s + a_1 s \exp(-\omega s) + b_0 + b_1 \exp(-\omega s)$$

per equazioni scalari del primo ordine, e la forma

$$h(s) = \det H(s), \text{ con } H(s) = \sum_{i=0}^{m} (A_i s + B_i) \exp(-\omega_i s)$$

per i sistemi generali lineari di equazioni alle differenze e differenziali, con coefficienti costanti, trattati nel capitolo sesto del volume. Tali funzioni sono funzioni intere di tipo speciale, dette « quasi polinomi ».

Nel capitolo duodecimo, l'autore si occupa appunto della collocazione asintotica degli zeri dei quasi polinomi. Nel capitolo decimoterzo, egli tratta, poi, delle proprietà di stabilità degli zeri di tali quasi polinomi.

Ogni capitolo dell'opera è corredato di esaurienti riferimenti bibliografici; una bibliografia integrativa si trova alla fine del volume; sicchè il materiale bibliográfico segnalato al lettore risulta veramente vasto. Ma va anche notato che ogni capitolo è dotato di interessanti problemi ed esercizi. Varî problemi fra quelli proposti riguardano rami di palpitante interesse delle applicazioni matematiche alla Fisica, dalla teoria del reattore nucleare di fissione alla teoria del plasma; o, addirittura, della Neurofisiologia.

In ottima, chiara veste tipografica, in forma che invita allo studio, con belle figure, il volume, che sa conciliare la chiarezza dell'esposizione con l'importanza delle moderne dottrine esposte e che si rivolge con estrema naturalezza a questioni di elevatezza indubbia, appare estremamente utile per i Matematici, per i Fisici; e per i Tecnici che abbiano una preparazione scientifica particolarmente solida.

ANTONIO PIGNEDOLI

S. L. SOBOLEV, *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, traduzione dal russo di F. E. Browder, American Mathematical Society, Rhode Island, 1963, di pag. 239, prezzo $ 6,70.

È il volume settimo di traduzioni di Monografie matematiche curate dalla American Mathematical Society. Come dice l'Autore nella sua prefazione all'opera, si tratta di un libro che risulta da una sistemazione delle lezioni tenute da Sobolev stesso presso l'Università statale di Leningrado

L'opera consta di tre capitoli: il primo dedicato a questioni speciali di Analisi funzionale, destinate a servire da introduzione per le applicazioni fisico matematiche della Analisi funzionale stessa; il secondo dedicato ai metodi variazionali nella Fisica matematica; il terzo dedicato alla teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali del tipo iperbolico.

Veniamo ora a dire partitamente di ognuno dei sopra citati capitoli. Il primo capitolo è costituito da undici paragrafi. Il primo di essi, a carattere introduttivo, contiene richiami sulle funzioni sommabili e sulle disuguaglianze di Hölder e di Minkowski; il secondo è dedicato alle proprietà fondamentali degli spazi L_p (insiemi di tutte le funzioni Φ integrabili insieme con $|\Phi|^p$ in un dominio limitato). Nel terzo paragrafo si tratta dei funzionali lineari in L_p; nel quarto della compattezza degli spazî; nel quinto delle derivate generalizzate; nel sesto delle proprietà degli integrali del tipo del potenziale, cioè degli integrali del tipo

$$U(\overrightarrow{Q}) = \int_{r\leq R} r^{-\lambda} f(\overrightarrow{P}) dv_{\overrightarrow{P}},$$

dove si suppone $f \in L_p$, $(p>1)$ nello spazio illimitato di n variabili, mentre $f=0$ fuori di un certo dominio limitato Ω; λ è un numero tale che $0<\lambda<n$ ed è

$$r = |\overrightarrow{P}-\overrightarrow{Q}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

essendo $r \leq R$ una sfera contenente nel suo interno il dominio Ω.

Il settimo paragrafo è dedicato agli spazî $L_p^{(l)}$ e $W_p^{(l)}$ ($W_p^{(l)}$ è la varietà lineare di tutte le funzioni sommabili $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aventi su un dominio finito Ω tutte le derriate generalizzate di ordine l sommabili, alla potenza $p>1$; $L_p^{(l)}$ è l'insieme i cui elementi sono le classi di elementi in $W_p^{(l)}$ aventi tutte le derivate di ordine l uguali; cioè Φ_1 e Φ_2 sono nella stessa classe in $L_p^{(l)}$ se si ha

$$\frac{\partial^l \Phi_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^l \Phi_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \; (\Sigma \alpha_i = l)$$

quasi dappertutto in Ω).

L'ottavo paragrafo concerne i teoremi di immersione; il nono i metodi generali di normalizzazione e « corollari del teorema di immersione »; il decimo certe conseguenze di tale teorema e l'undecimo la completa continuità dell'operatore di immersione (teorema di Kondrasev).

Il secondo capitolo, dedicato ai metodi variazionali in Fisica-matematica, consta di cinque paragrafi, dal decimosècondo al decimosesto del volume. I paragrafi decimosecondo e decimoterzo riguardano, rispettivamente, il problema di Dirichlet ed il problema di Neumann. Il paragrafo decimoquarto concerne le equazioni poliarmoniche; il decimoquinto l'unicità della soluzione del problema fondamentale dei valori al contorno per l'equazione poliarmonica. Il paragrafo decimosesto, con cui si chiude il capitolo, riguarda il problema degli autovalori. Viene poi il terzo capitolo, sulla teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali del tipo iperbolico. Nel capitolo vengono trattati i seguenti tre gruppi di argomenti:

I) soluzione dell'equazione differenziale delle onde con coefficienti costanti; dipendenza della soluzione dai dati iniziali, e soluzioni generalizzate;

II) equazione delle onde a coefficienti variabili;

III) teoria delle equazioni non lineari.

Questi argomenti vengono analizzati con un metodo generale partente dall'idea di cercare soluzioni negli spazi $L_p^{(l)}$ e $W_p^{(l)}$, ai quali abbiamo già accennato nella presente recensione

Il primo paragrafo del capitolo, cioè il paragrafo decimosettimo del volume, è dedicato alla soluzione dell'equazione delle onde con condizioni iniziali regolari. Il paragrafo decimoottavo concerne il problema di Cauchy generalizzato per l'equazione delle onde.

Nel paragrafo decimonono ci si occupa delle equazioni lineari del tipo normale iperbolico, con coefficienti variabili; nel ventesimo del problema di Cauchy con coefficienti regolari.

Il ventunesimo ed il ventiduesimo (ultimo) sono dedicati, rispettivamente, alle equazioni lineari iperboliche con coefficienti variabili ed alle equazioni quasi-lineari. (Vi si tratta anche l'equazione funzionale di Petrovsky).

Carattere generale del volume è questo: poichè la presentazione dei problemi fisico-matematici trattati richiede una adeguata preparazione concernente i nuovi metodi della Analisi funzionale, di tali metodi il volume, con elevatezza di tono e con notevole forza di sintesi, è fortemente dotato. Sicchè l'opera stessa è decisamente rivolta ai ricercatori che pensino i problemi fisico-matematici in termini matematici assai generali, quindi in termini di Analisi funzionale moderna.

ANTONIO PIGNEDOLI

Z. W. BIRNBAUM, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Harper e Brothers, Publishers, New York, 1962, di pagine 325, senza indicazione di prezzo.

Dopo una chiara prefazione, che mette in luce il carattere e gli scopi dell'opera, vengono le due parti di cui è costituito il volume. La prima, che tratta dei fondamenti del Calcolo delle probabilità, si suddivide in dieci capitoli. Il primo è dedicato all'oggetto del Calcolo delle probabilità. Dopo una introduzione dei concetti di variabili aleatorie e di fenomeni aleatori, si dà il concetto di probabilità. Il secondo capitolo è dedicato alla preparazione dei mezzi matematici usati nel Calcolo stesso, dai « campi di Borel » alle « distribuzioni di probabilità ». Il terzo capitolo concerne le variabili aleatorie discrete *n* dimensionali (con notevole messe di esempi), mentre il quarto è dedicato alle variabili aleatorie *n*-dimensionali continue. Il capitolo quinto riguarda la trasformazione delle variabili aleatorie; il sesto la speranza matematica; il settimo le funzioni caratteristiche; l'ottavo le variabili aleatorie normali; il nono la regressione e correlazione; il decimo, infine, certe importanti distribuzioni probabilistiche, cominciando dalla distribuzione di Poisson pensata come approssimazione della distribuzione polinomiale.

La seconda parte del volume (che comprende i capitoli dal decimoprimo al decimosettimo) è dedicata alle conseguenze del Calcolo delle probabilità nei problemi statistici: ai problemi di stima (cap. XI); a modelli di variabili aleatorie normali (cap. XII); a « tests » di ipotesi statistiche (cap. XIII); al modello di una variabile aleatoria normale bivariata e alla correlazione multivariata e regressione (cap. XIV); al « χ^2 test » (cap. XV); a certe tecniche della Statistica indipendenti dalle distribuzioni (cap. XVI); alla teoria più generale concernente la teoria delle decisioni.

Seguono due appendici: la prima dedicata ad alcuni richiami di teoria degli insiemi; la seconda dedicata alle disuguaglianze di SCHWARZ e di CAUCHY. Il volume è poi corredato di tavole concernenti la distribuzione normale:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(s)ds,$$

la « distribuzione degli studenti » etc.

L'opera è scritta nell'intento di fornire un corso di Calcolo delle probabilità e di Statistica matematica a chi abbia una buona conoscenza della teoria delle matrici e dei determinanti e, sopra tutto, della Analisi infinitesimale. Ma traspare chiaramente lo scopo di non mancare di rigore di fronte alle esigenze dei matematici militanti. Lo scopo duplice e, talora — difficilmente conciliabile, è ottenuto imponendosi alcune limitazioni ed usando alcuni accorgimenti. Per esempio, la teoria generale delle variabili aleatorie — involgente l'uso dell'integrazione nel senso di STIELTJES — non viene inclusa.

In generale, poi, le proposizioni che comportano la conoscenza della teoria dell'integrazione sono formulate in modo che lo studente possa interpretarle correttamente, e con sufficiente generalità, se egli pensa alle funzioni integrande come funzioni continue con, al più, un numero finito di discontinuità; e che il lettore possa pure interpretarle correttamente, se pensa alle funzioni integrande come funzioni misurabili e agli integrali come fatti nel senso di LEBESGUE.

Risultano, quindi, del tutto superflui altri commenti alla interessante e proficua opera dell'autore.

ANTONIO PIGNEDOLI

A. I. AKHIEZER - V. B. BERESTETSKII, *Elements of Quantum Electrodynamics*, Oldbourne Press, London, 1963, di pagine 301, prezzo 12 $.

Si tratta di una traduzione in inglese dell'originale russo « Kvantovaya Elektrodynamika », edito a Mosca nel 1959. La traduzione è fatta nell'ambito del programma di traduzioni scientifiche dello Stato di Israel (Jerusalem, 1962).

Il primo capitolo del volume è dedicato alla Meccanica quantistica del fotone, partendo da una breve introduzione nella quale si richiama il fatto che le proprietà corpuscolari della luce furono, storicamente, il primo fatto fondamentale da cui prese le mosse lo sviluppo della teoria dei quanta e, quindi, della Meccanica quantica, anche se, prima della Meccanica quantica del fotone, fu sistemata la Meccanica quantica dell'atomo. Il capitolo si inizia con un paragrafo dedicato alla funzione d'onda del fotone e termina con la considerazione dei potenziali del « campo fotonico ».

Il secondo capitolo consiste nella esposizione della teoria relativistica dell'elettrone e prende le mosse dagli spinori di Pauli e dalle matrici di Pauli, nonché dalla equazione di Dirac, per passare poi agli stati dell'elet trone e del positrone, agli stati di momento definito e alla polarizzazione, indi alla teoria dell'elettrone in un campo esterno, infine alla transizione all'equazione di Pauli.

Il terzo capitolo concerne i campi quantizzati elettromagnetico ed elettronico-positronico. Partendo dalla quantizzazione del campo elettromagne tico, attraverso la quantizzazione del campo elettronico-positronico, si giunge alle proprietà generali dei campi d'onda e alla quantizzazione di campo, nonché alla teoria della connessione fra spin e statistica.

Il quarto capitolo consiste nella esposizione delle equazioni fondamen tali della Elettrodinamica quantistica e, partendo dallo studio della inter azione, fra il campo elettromagnetico ed il campo elettronico positronico, giunge allo studio della « matrice S » concludendosi con lo studio delle probabilità di transizione.

Il quinto ed ultimo capitolo è dedicato alla « matrice di scattering ». In particolare, un importante paragrafo di tale capitolo è dedicato ai limiti di applicabilità della Elettrodinamica quantistica.

In chiusura del volume è una Appendice dedicata a complementi relativi ai mezzi di calcolo, allo « scattering » di un fotone da parte di un elettrone libero, alla « Bremsstrahlung », alla emissione di fotoni di grande lunghezza d'onda. Opera la cui lettura è certamente di alto interesse per i cultori di Fisica teorica.

ANTONIO PIGNEDOLI

KITOW - KRINIZKI, *Elektronische Digitalrechner und Programmierung*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1963, di pagine 533, prezzo 62 DM; (con 110 figure e 55 tabelle nel testo).

Si tratta di una traduzione tedesca, a cura di Karl-Heinz Rupp, di Hans Schemmel e di Viktor Ziegler, e con la redazione scientifica di Karl Heinz Bachmann, dell'opera originale uscita nel 1959 a Mosca.

Anzitutto vi è una « Introduzione » sui calcolatori analogici e digitali e sul lóro sviluppo. Segue il primo capitolo, che è dedicato ai fondamenti aritmetici della teoria dei calcolatori elettronici digitali, con premesse sui sistemi di numerazione. (Nel capitolo ha già luogo l'esposizione dei metodi di introduzione dei numeri in macchina).

Il secondo capitolo è dedicato alla Logica matematica ed agli elementi fondamentali che entrano in uno schema di macchina calcolatrice (tubi elet tronici, transistori, nuclei di ferrite, etc.).

Nel terzo capitolo ha luogo l'esposizione dei principi costruttivi dei cal colatori elettronici numerici, con esposizione, inoltre, di tipi fondamentali di macchine calcolatrici fabbricate nell'U.R.S.S., come la macchina « BESM », la « Strela » la « Ural » e la « M-3 ».

Il quarto capitolo è dedicato alle prospettive di sviluppo delle macchine calcolatrici elettroniche numeriche, con particolare riguardo allo sviluppo di nuovi principi costruttivi e di nuovi elementi costruttivi, relativamente tanto a macchine destinate a problemi tecnico pratici, quanto a macchine destinate alla ricerca nel campo delle Matematiche.

Il capitolo quinto è dedicato alla esposizione delle istruzioni fondamen tali per la programmazione con le macchine « Strela », « M 3 » e « Ural »;

mentre il sesto tratta dei fondamenti generali della programmazione, con ampio sussidio di esempi, ed il settimo è dedicato alla esposizione dei metodi di programmazione manuale.

Nel capitolo ottavo ha luogo l'esposizione dei metodi di controllo, dell'organizzazione di un programma, della scelta di un particolare metodo di calcolo numerico, del metodo Monte-Carlo, dei procedimenti di rappresentazione e di calcolo dei valori di una funzione.

Il nono capitolo ha per argomento la trasformazione formale di schemi logici di programmi; il decimo la programmazione automatica.

Il volume si conclude con un capitolo, l'undecimo, dedicato alle possibilità di applicazioni non aritmetiche di una macchina calcolatrice elettronica numerica. In tale ordine di idee, vengono discussi i problemi di traduzione: ci si occupa di traduzione dal russo in inglese e viceversa e dal francese al russo; indi si passa a considerare le macchine dal punto di vista della loro possibilità di fare giuochi. L'opera, con la sua ricchezza di argomenti, con la mole delle tabelle e degli esempi costituisce — anche per l'esplicito riferimento alle macchine calcolatrici dell'Unione Sovietica — un assai utile contributo alla conoscenza comparata dello sviluppo — veramente imponendo nel mondo attuale — delle tecniche, oltre che dei mezzi, di Calcolo automatico.

ANTONIO PIGNEDOLI

GEORGE B. DANTZIG, *Linear Programming and Extensions*, A Rand Corporation Research Study, Princeton University Press, 1963, di pagine 625, con molte tabelle e figure - prezzo $ 11,50.

Durante e immediatamente dopo la seconda guerra mondiale, in connessione con lo sviluppo delle macchine calcolatrici elettroniche digitali, ha avuto una autentica fioritura quello che è oggi il vero e proprio corpo di dottrina denominato « Programmazione lineare ».

La produzione industriale, l'evoluzione delle risorse economiche, lo sforzo di organizzazione militare etc., costituiscono complessi di numerose attività inter collegate. Per quanto esistano differenze nelle diverse mete da raggiungere, tuttavia è possibile astrarre il sostrato comune dei diversi aspetti di tali attività, ed un esame scientifico di tali questioni conduce alla formulazione di un « programma », che consenta al « sistema » in esame di muoversi verso il raggiungimento del suo obbiettivo. Quando diciamo « programma », intendiamo dire programma tradotto in formulazione matematica od in essa traducibile, come spesso avviene.

I problemi di programmazione possono presentare carattere deterministico o carattere probabilistico. Il volume di cui stiamo parlando rivolge particolare attenzione a problemi di programmazione lineare che si presentano, in generale, in casi deterministici e a problemi lineari cui si riducono impostazioni aventi carattere probabilistico. Naturalmente le connessioni con l'automazione e con la Cibernetica appaiono palesi.

Il libro, dotato di una vastissima bibliografia e di molte tavole e figure e tabelle numeriche nel testo, nonché di diagrammi funzionali molto utili, è articolato in ventotto capitoli che, prendendo le mosse dalle origini, dalla formulazione e dalla impostazione dei problemi di programmazione lineare, sono dedicati anzitutto alla esposizione delle dottrine analitiche e geometriche (dallo studio delle disuguaglianze lineari a quello degli spazi vettoriali etc.); e passano poi allo studio dei veri e propri problemi applicati (prezzi, problemi di giuochi, di trasporti, etc.), compresi i problemi di incertezza. Inutile, forse, sottolineare l'importanza dell'opera per la Matematica applicata attuale.

ANTONIO PIGNEDOLI

Tom M. Apostol, *Calculus*, vol. II. (Calculus of several variables with applications to Probability and Vector Analysis). Blaisdell Publishing Company, New York, London, 1962 di 527 pagine, senza indicazione di prezzo.

Si tratta di un volume di Analisi, con applicazioni, assai interessante per il matematico applicato, data la vasta messe di esercizi e di problemi che concorrono a formare una tale mentalità. Dal punto di vista del matema tico puro, si tratta di un corso che sintetizza il carattere della esposizione condotta secondo una linea classica con le esigenze di una impostazione di tipo moderno.

Consta di sette grandi capitoli. Il primo di essi è dedicato alle funzioni d'insieme ed alla teoria elementare della probabilità; il secondo all'integrazione multipla.

Nel terzo capitolo, si tratta delle variabili aleatorie e si fa una impostazione del Calcolo della probabilità, nei limiti di un corso non specialistico, dato il carattere generale del volume, ma a livello elevato.

Il quarto capitolo concerne il Calcolo differenziale nei campi scalari, con applicazioni geometriche ed anche con applicazioni alla meccanica (potenziale).

Il quinto capitolo è dedicato agli integrali di linea e prende le mosse proprio da una impostazione meccanica (concetto di lavoro). L'attenzione alle applicazioni fisiche è continua in tutto il capitolo, e così dicasi circa il carattere del capitolo successivo, cioè del sesto, dedicato agli integrali di superficie.

Il capitolo settimo concerne le equazioni differenziali lineari, con applicazioni (per esempio, ci si occupa del moto di un razzo). Vi trova posto una esauriente esposizione delle equazioni differenziali di Legendre e di Bessel.

Il capitolo ottavo (uno dei più interessanti) costituisce una introduzione alla Analisi numerica. Tale introduzione è fatta con spirito molto moderno. Per esempio, l'approssimazione mediante polinomi è introdotta attraverso i concetti che reggono la teoria degli spazi lineari di funzioni. Le grandi linee del capitolo comprendono, oltre i metodi di integrazione numerica, la formula di sommazione di Eulero. L'ultimo capitolo concerne i teoremi di esistenza per le equazioni differenziali.

Molto bella la veste tipografica.

Antonio Pignedoli

Karl Steinbuch, *Automat und Mensch (Kibernetische Tatsachen und Hypothsen)*, Springer Verlag, Berlin, Göttingen-Heidelberg, 1963, di pp. 392, con 135 illustrazioni, prezzo 36 DM.

Si tratta della seconda edizione, ampliata, del volume già da noi prece dentemente recensito su questo stesso Bollettino (B.U.M.I., serie III, anno XVII, N. 3, sett. 1962). L'Autore ha aggiunto alcuni complementi e chiarito ulteriormente alcuni punti di vista. L'opera, che tratta il delicato problema del come gli automatismi cosiddetti « intelligenti » imitino (funzionando in analogia) alcuni aspetti del sistema nervoso, è di grande interesse per i cultori di Cibernetica.

Antonio Pignedoli