Bollettino
Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Un'osservazione sulla geometria affine delle trasformazioni puntuali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.1, p. 53–59.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_1_53_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Un'osservazione sulla geometria affine delle trasformazioni puntuali

Nota di Mario Villa (a Bologna) (*)

Sunto. - *Si osserva che, nella geometria affine, le trasformazioni razionali che si ottengono troncando gli sviluppi in serie di potenze delle equazioni di una trasformazione puntuale fra due spazi affini, sono intrinsecamente individuate e ci si trattiene su qualche conseguenza.*

1. Nello studio dei problemi di carattere locale sulle trasformazioni puntuali nella geometria affine (e quindi nelle geometrie relative a gruppi che sono sottogruppi del gruppo affine) si ha una notevole semplificazione, rispetto ai problemi analoghi studiati nella geometria proiettiva, dovuta ad un fatto su cui ora mi tratterò.

Per fissare le idee riferiamoci ad una trasformazione puntuale T_2 fra due piani affini π, π' e consideriamo una coppia O, O' (regolare o no) di punti (propri) corrispondenti. Introdotti nei due piani due sistemi di coordinate affini (x, y in π e x', y' in π') di origini O, O', le equazioni di T_2, nell'intorno di (O, O') siano

$$(1)\qquad \begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + [3] \\ y' &= b_1x + b_2y + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + [3], \end{aligned}$$

le a, b essendo costanti e indicando con [3] l'insieme dei termini negli sviluppi in serie di potenze, di grado > 2.

Troncando gli sviluppi (1) ai termini di 2° grado (ad esempio), si ottiene la trasformazione razionale intera $R_{2,2}$ di equazioni

$$(2)\qquad \begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \\ y' &= b_1x + b_2y + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 \ (^1) \end{aligned}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 15 dicembre 1963.

(1) Se $a_{11} = a_{12} = a_{22} = b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ la T_2 è osculata, nell'intorno di (O, O'), dall'affinità $x' = a_1x + a_2y$, $y' = b_1x + b_2y$ (ogni direzione per O, e per O', è caratteristica). Si escluderà nel seguito questo caso.

Orbene, nella geometria affine, la $R_{2,2}$ è intresecamente caratterizzata. Si ha infatti:

La $R_{2,2}$ è l'unica trasformazione razionale di ordine 2 che oscula (cioè approssima fine all'intorno del 2° ordine) la T_2 nella coppia di punti corrispondenti (O, O') e nella quale alla retta impropria di π' corrisponde la retta impropria di π contata due volte. In altri termini: la $R_{2,2}$ è l'unica trasformazione razionale intera di ordine 2 che oscula la T_2 in (O, O').

L'intorno del 2° ordine di T_2 in (O, O') determina dunque la $R_{2,2}$ e inversamente. I caratteri affini della $R_{2,2}$ sono dunque caratteri dell'intorno. Nella geometria affine, nei problemi (locali) relativi all'intorno del 2° ordine di T_2 in (O, O'), ci si potrà quindi valere assai utilmente della trasformazione razionale intera $I_{2,2}$. Così per la determinazione di riferimenti intrinseci e per l'interpretazione geometrica degli invarianti [2].

Fissati i riferimenti intrinseci nei due piani, il significato geometrico degli invarianti si ottiene subito considerando le due coniche corrispondenti nella $R_{2,2}$ alle rette $x' = 0$ e $y' = 0$.

Nelle righe precedenti, per fissare le idee, ci siamo riferiti ad una trasformazione puntuale fra due piani affini e all'intorno del 2° ordine di una coppia di punti corrispondenti, ma è chiaro che l'osservazione fatta vale per una trasformazione puntuale T_p fra spazi affini di dimensione p qualunque e per un intorno d'ordine n qualunque di una coppia di punti corrispondenti. Un tale intorno d'ordine n determina, nella geometria affine, una trasformazione razionale intera $R_{p,n}$ d'ordine n che approssima la trasformazione data fino all'intorno d'ordine n le cui equazioni si ottengono troncando gli sviluppi ai termini di grado n [3]. E questa trasformazione razionale, i cui caratteri affini sono caràtteri dell'intorno, si può utilizzare utilmente nei problemi relativi all'intorno stesso [4].

(2) Ciò vale per intorni d'ordine qualunque. Per l'intorno del 2° ordine si può anche ricorrere alle direzioni caratteristiche e ai punti limiti delle proiettività caratteristiche Si veda; M. VILLA, *La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari*, «Rend. dell'Accademia d'Italia», Ser. VII, Vol. IV, pp. 141,142 (1943).

(3) Per $n = 1$, la trasformazione razionale intera $R_{p,1}$ è un'affinità (l'affinità tangente). Si veda, supposta la coppia (O, O') regolare: M. VILLA, *Lezioni di geometria*, Vol. II, Cedam, Padova, pp. 313, 314, 338 (1952).

(4) Così, fissati i riferimenti affini intrinseci nei due spazi affini, per ottenere il significato geometrico degli invarianti di ordine n, si possono considerare le ipersuperficie corrispondenti in $R_{p,n}$ agli iperpiani fondamentali del riferimento fissato in uno degli spazi.

2. La trasformazione razionale intera $R_{p,n}$ può essere birazionale (cioè cremoniana) e può essere anche cremoniana biintera (cioè razionale intera in entrambi i sensi) [5], questi caratteri riflettendosi in caratteri dell'intorno relativo.

Riprendiamo a considerare la trasformazione puntuale T_2 fra due piani (affini) e l'intorno del 2° ordine della coppia di punti corrispondenti (O, O').

Supponiamo la coppia (O, O') regolare. ossia $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (n. 1).

Nella trasformazione razionale $R_{2,2}$, alle rette per O' corrispondono le coniche del fascio F di equazione

$$a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 +$$

$$+ \lambda (b_1x + b_2y + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2) = 0,$$

dove λ è un parametro.

Si ha:

La trasformazione razionale $R_{2,2}$ è cremoniana quando e solo quando si presenta uno dei due casi:

1) *le coniche del fascio F hanno gli stessi punti impropri e in uno di essi hanno anche la stessa tangente ($\neq$ dalla retta impropria);*

2) *le coniche del fascio F si osculano in un punto della retta impropria (la tangente d'osculazione essendo la retta impropria).*

La proprietà è pressochè evidente in quanto nella $R_{2,2}$ a due rette per O' e alla retta impropria di π' corrispondono rispettivamente due coniche C_1, C_2 di F e la retta impropria (di π) contata due volte.

La $R_{2,2}$ è cremoniana quando e solo quando la rete determinata dalle coniche C_1, C_2 e dalla retta impropria (contata due volte) è omaloidica e pertanto segue subito la proprietà enunciata.

Segue:

Affinchè la trasformazione razionale $R_{2,2}$ sia cremoniana è necessario che coincidano due delle tre rette caratteristiche per O (per O').

(5) Riteniamo più conveniente la denominazione di trasformazione cremoniana biintera anzichè quella di trasformazione cremoniana intera usata da altri Autori; si chiameranno invece trasformazioni cremoniane intere le trasformazioni cremoniane intere in un sol senso.

Infatti le rette caratteristiche per O sono le congiungenti O coi punti base ($\neq O$) del fascio F [6]. E siccome, per quanto si è detto sopra, due di questi punti base sono infinitamente vicini, l'asserto è dimostrato.

Si ha pure:

La trasformazione razionale $R_{2,2}$ è cremoniana biintera quando e solo quando le coniche del fascio F si osculano in un punto della retta impropria (la tangente d'osculazione essendo la retta impropria).

Introduciamo in π coordinate omogenee x_1, x_2, x_3. L'equazione di F si scrive

$$a_1x_1x_3 + a_2x_2x_3 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \lambda(b_1x_1x_3 + b_2x_2x_3 +$$

$$+ b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2) = 0.$$

Supponiamo dapprima che le a_{11}, a_{12}, a_{22} non siano tutte nulle e così pure che non siano tutte nulle le b_{11}, b_{12}, b_{22}.

Affinchè le coniche di F abbiano gli stessi punti impropri dev'essere

$$b_{11} = ka_{11}, \qquad b_{12} = ka_{12}, \qquad b_{22} = ka_{22}, \tag{3}$$

essendo k una costante $\neq 0$.

Assumendo uno dei due punti impropri delle coniche di F come punto $A_1(1, 0, 0)$, si ha

$$a_{11} = b_{11} = 0. \tag{4}$$

Affinchè le coniche di F abbiano in A_1 la stessa tangente deve essere, tenuto conto della 2ª delle (3),

$$b_1 = ka_1. \tag{5}$$

Dalle (3), (4), (5) segue in definitiva

$$b_1 = ka_1, \quad b_{12} = ka_{12}, \quad b_{22} = ka_{22}, \quad a_{11} = b_{11} = 0. \tag{6}$$

Per le (6), le (2) divengono

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \\ y &= ka_1x + b_2y + k(2a_{12}xy + a_{22}y^2). \end{aligned} \tag{7}$$

[6] Si veda: M. VILLA, *Ricerche locali sulle trasformazioni cremoniane*, Mem. I, « Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna », Ser. X, Vol. I, p. 83, nota (4), 1944.

Si noti che $b_2 \neq ka_2$ essendo la coppia (O, O') regolare.

Dalle (7) segue

$$kx' - y' = (ka_2 - b_2)y,$$

da cui

$$y = \frac{kx' - y'}{ka_2 - b_2}. \tag{8}$$

Sostituendo l'espressione di y data dalla (8) nella prima delle (7), si ottiene

$$x\left(a_1 + 2a_{12}\frac{kx' - y'}{ka_2 - b_2}\right) = x' - a_2\frac{kx' - y'}{ka_2 - b_2} - a_{22}\left(\frac{kx' - y'}{ka_2 - b_2}\right)^2 \tag{9}$$

Dalle (8), (9) si conclude che affinchè la $R_{2,2}$ sia cremoniana biintera occorre e basta che sia $a_{12} = 0$ [e quindi per le (6) anche $b_{12} = 0$] (7).

D' altra parte quando $a_{12} = b_{12} = 0$ anche la seconda intersezione con la $x_3 = 0$ delle coniche di F viene a cadere in $(1, 0, 0)$ e quindi le coniche di F si osculano in tal punto (la tangente d'osculazione essendo la $x_3 = 0$) e inversamente.

Rimane da considerare il caso fin qui escluso in cui (ad esempio) $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ (8).

Il fascio F è individuato dalle coniche

$$a_1x_1x_3 + a_2x_2x_3 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \quad (b_1x_1 + b_2x_2)x_3 = 0. \tag{10}$$

Assumendo uno dei due punti impropri della prima di queste coniche come punto $(1, 0, 0)$ sarà $a_{11} = 0$. Se $b_1 \neq 0$, le coniche di F non possono dar luogo al 1° dei casi suddetti per cui la $R_{2,2}$ è cremoniana, perchè la seconda delle (10) ha in $(1, 0, 0)$ per tangente la $x_3 = 0$, nè al 2° dei casi suddetti perchè in $(1, 0, 0)$ le coniche (10) non si osculano.

(7) Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione cremoniana intera $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_p)$ $(i = 1, 2, \dots, p)$ fra due spazi affini a p dimensioni di coordinate affini $x_1, x_2, \dots, x_p$ e $y_1, y_2, \dots, y_p$, gli f_i essendo polinomi, sia biintera è che lo jacobiano J delle f_i sia una costante. Si veda: B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, Vol. II, « Ed. Universitarie Docet », Roma, p. 393, 1956.

Pertanto per determinare la condizione affinchè la (7) sia biintera, si può anche applicare il risultato precedente. È quì $J = (b_2 - ka_2)(a_1 + 2a_{12}y)$ e si riduce ad una costante quando (e solo quando) è appunto $a_{12} = 0$ (essendo $b_2 \neq ka_2$).

(8) Di conseguenza le a_{11}, a_{12}, a_{22} non sono tutte nulle [si veda la (1)]

D'altra parte per $a_{11}=b_1=0$, le (2) divengono

$$(11)\qquad \begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \\ y' &= \qquad\quad b_2 y \end{aligned}$$

dove $a_1 b_2 \neq 0$ essendo la coppia (O, O') regolare.

Dalle (11) segue $y = \frac{1}{b_2} y'$ e quindi

$$x\left(a_1 + 2\frac{a_{12}}{b_2} y'\right) = x' - \frac{a_2}{b_2} y' - \frac{a_{22}}{b_2^2} y'^2.$$

Si conclude che affinchè la $R_{2,2}$ sia cremoniana biintera occorre e basta che sia $a_{12}=0$ (9).

Ma per $a_{11}=a_{12}=b_1=0$ le due coniche (10) si osculano in $(1, 0, 0)$ e inversamente.

Segue:

Affinchè la trasformazione razionale $R_{2,2}$ sia cremoniana intera è necessario che coincidano le tre rette caratteristiche per O (per O').

Infatti, come si è già ricordato, le rette caratteristiche per O sono le congiungenti O coi punti base ($\neq O$) del fascio F. E siccome, per quanto si è detto sopra, questi tre punti base sono infinitamente vicini, l'asserto è dimostrato.

3. Aggiungiamo ancora che, nella geometria proiettiva, una trasformazione puntuale tra due piani proiettivi, in una coppia regolare O, O' di punti corrispondenti nella quale due direzioni caratteristiche coincidono, si può, con una conveniente scelta dei riferimenti proiettivi nel due piani, rappresentare fino all'intorno del 2° ordine di O, O', con le equazioni

$$\begin{aligned} x' &= x - xy + [3] \\ y' &= y + [3], \end{aligned}$$

le x, y e x', y' essendo coordinate proiettive non omogenee (10),

(9) Per le (11) è $J = b_2(a_1 + 2a_{12}y)$ e si riduce ad una costante quando (e solo quando) è appunto $a_{12}=0$ (essendo $b_2 \neq 0$).

(10) Si veda: M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali fra due piani con direzioni caratteristiche coincidenti*, Nota I, Rend. dell'Accademia delle Scienze di Bologna, Ser. XI, Vol. XI, 1964; M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali con direzioni caratteristiche coincidenti*, Rend. dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Ser. III, Vol. 78, p 326, 1945.

E qui la $R_{2,2}$

$$x' = x - xy \qquad (10)$$
$$y' = y$$

è cremoniana. Infatti dalle (10) si ottiene

$$x = \frac{x'}{1 - y'}$$
$$y = y'.$$

Aggiungiamo infine che, nella geometria proiettiva, una trasformazione puntuale tra due piani proiettivi, in una coppia regolare O, O' di punti corrispondenti nella quale le tre direzioni caratteristiche coincidono, si può con una conveniente scelta dei riferimenti proiettivi dei due piani, rappresentare fino all'intorno del 2° ordine di O, O' con le equazioni

$$x' = x + y^2 + [3]$$
$$y' = y + [3]$$

le x, y e x', y' essendo coordinate proiettive non omogenee [11].

E qui la $R_{2,2}$

$$x' = x + y^2 \qquad (11)$$
$$y' = y$$

è cremoniana intera. Infatti dalle (11) si ottiene

$$x = x' - y'^2$$
$$y = y' .$$

[11] Si veda: M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali fra due piani con direzioni caratteristiche coincidenti*, Nota II, Rend. dell'Accademia delle Scienze di Bologna, Ser. XI, Vol. XI, 1964.