Bollettino Unione Matematica Italiana

Elisa Grandori Guagenti

Superficie di Lamb e di Bernoulli nella magnetofluidodinamica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.1, p. 40–52.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_1_40_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Superficie di Lamb e di Bernoulli nella magnetofluidodinamica (*)

Nota di ELISA GRANDORI GUAGENTI (a Milano) (**)

Sunto. - *Si rileva l'esistenza nella magnetofluidodinamica, sotto determinate ipotesi, di superficie Λ, che sono contemporaneamente di flusso per il campo magnetico e per il campo cinematico. Esse sono analoghe alle superficie di Lamb della ordinaria meccanica dei fluidi (che sono di flusso per il campo vorticoso e per il campo cinematico). Inoltre si mettono in luce le condizioni per cui esistono, anche in magnetofluidodinamica, le superficie di Lamb, e si precisa quando esse sono superficie di Bernoulli.*

§ 1. - Superficie Λ nella magnetofluidodinamica.

1. - È nota l'analogia esistente fra il campo magnetico relativo al moto di un fluido perfettamente conduttore, perfetto o viscoso che sia, e il vortice di un fluido perfetto, soggetto a forze conservative, che rientri nello schema della ordinaria meccanica dei fluidi (si veda [1], [2], [3], ed altri) (1).

Dalle equazioni di campo della m. f. d. (magnetofluidodinamica) se è infinita la conducibilità elettrica, si ricava la seguente equazione per il campo magnetico $\boldsymbol{H}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \text{rot}\,(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1}$$

in cui $\boldsymbol{v}$ è la velocità del fluido.

D'altra parte, per un fluido perfetto non conduttore, di velocità $\boldsymbol{u}$ soggetto a forze conservative, dall'equazione dinamica euleriana discende, qualora si valuti il rotore di ambo i membri, la seguente equazione contenente il vortice ω ($\omega = 1/2 \text{ rot } \boldsymbol{u}$):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{rot}\,(\omega \wedge \boldsymbol{u}) = 0. \tag{2}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca matemateci del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 7 dicembre 1963, e comunicata in riassunto al Congresso dell'U. M. I., tenuto a Genova, 30 settembre - 5 ottobre 1963.

(1) Le parentesi quadre rinviano alla bibliografia.

La (1) e la (2) sono formalmente identiche; al campo magnetico $\boldsymbol{H}$ della (1) corrisponde il campo vorticoso ω della (2), alla velocità $\boldsymbol{v}$ della (1) la velocità $\boldsymbol{u}$ della (2).

È pure noto che una analogia formale sussiste ancora sotto condizioni meno restrittive, e precisamente sotto l'insieme delle seguenti ipotesi *a*) e *b*), riguardanti rispettivamente il fluido conduttore e il fluido non conduttore:

a) il campo magnetico sia relativo ad un fluido non perfettamente conduttore; di più siano costanti la conducibilità elettrica σ e la permeabilità magnetica μ del fluido (vedi ad esempio [4]);

b) il vortice appartenga ad un fluido non più perfetto, ma viscoso; di più sia costante la densità ρ e cioè si tratti di un liquido.

Infatti dalle equazioni di campo della m. f. d., se σ e μ sono costanti, si ricava la seguente equazione [3]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \text{rot}\,(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) + \lambda\,\text{rot}\,\text{rot}\,\boldsymbol{H} = 0, \tag{3}$$

dove $\lambda = 1/\sigma\mu$ è il coefficiente di viscosità magnetico.

D'altra parte dall'equazione dinamica di NAVIER–POISSON, se ρ è costante, discende, qualora si valuti il rotore di ambo i membri, la seguente equazione [5]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{rot}\,(\omega \wedge \boldsymbol{u}) + \nu\,\text{rot}\,\text{rot}\,\omega = 0, \tag{4}$$

dove ν è il coefficiente di viscosità cinematico, rapporto fra il coefficiente di viscosità e la densità del liquido. La (3) e la (4) sono analoghe, come lo erano la (1) e la (2); inoltre al coefficiente di viscosità magnetico λ della (3) corrisponde il coefficiente di viscosità cinematico ν della (4).

Le somiglianze formali fra la (1) e la (2), e fra la (3) e la (4), si rafforzano tenendo conto della solenoidalità dei vettori $\boldsymbol{H}$ ed ω [2].

---

[2] I due vettori tuttavia hanno divergenza nulla per motivi diversi infatti, mentre la relazione

$$\text{div}\,\omega = 0$$

è un'identità, in quanto è $\omega = 1/2\,\text{rot}\,\boldsymbol{u}$, la relazione

$$\text{div}\,\boldsymbol{H} = 0$$

è una condizione cui soddisfa notoriamente il campo magnetico.

In effetti si tratta di un'analogia in senso lato; essa non riguarda le condizioni al contorno, e, anche nel quadro delle equazioni indefinite, non è completa. Pertanto fra fluido conduttore in presenza di campo magnetico e fluido non conduttore, ci sono analogie, ma anche differenze.

2. – Nelle analogie rientra quanto esporremo in questo paragrafo.

Ricordiamo ora alcuni risultati della meccanica dei fluidi. Ivi si denominano "superficie di LAMB", quelle superficie, che ora indicheremo con L, che sono contemporaneamente di flusso per ω e per $\boldsymbol{u}$, mentre si denomina "vettore di LAMB", il vettore $\omega \wedge \boldsymbol{u}$. Le superficie di LAMB, per la stessa definizione, godono della proprietà di essere in ogni punto normali al vettore di LAMB [6].

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza delle superficie L è che sia

$$\omega \wedge \boldsymbol{u} = A \text{ grad } \psi, \tag{5}$$

dave A e ψ sono funzioni del posto e del tempo. Le superficie L hanno equazione $\psi = \text{cost.}$

Condizione necessaria e sufficiente per il verificarsi della (5) è che sia

$$\omega \wedge \boldsymbol{u} \times \text{rot}\,(\omega \wedge \boldsymbol{u}) = 0. \tag{5'}$$

La (5) e la (5') sono perciò equivalenti (vedi ad esempio [7]).

Un vettore che, come $\omega \wedge \boldsymbol{u}$, soddisfi alle (5) si dice complesso-lamellare.

Orbene, per la menzionata analogia, alle superficie L corrispondono le superficie, che denomineremo Λ, che sono contemporaneamente di flusso per $\boldsymbol{H}$ e per $\boldsymbol{v}$. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza delle Λ è che sia complesso-lamellare il vettore $\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}$, che sia cioè

$$\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v} = B \text{ grad } \chi, \tag{6}$$

dove B e χ sono funzioni del posto e del tempo. Le superficie Λ hanno equazione $\chi = \text{cost.}$

Condizione necessaria e sufficiente perchè la (6) sia soddisfatta è che sia

$$\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = 0. \tag{6'}$$

La (6) e la (6′) sono perciò equivalenti.

Le Λ sono superficie ortogonali alla congruenza delle linee d'azione del vettore $\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}$; in quanto tali, ad esse si estendono i risultati di geometria differenziale relativi alle superficie L [8], [9].

Passiamo ora a considerare qualche caso particolare della m. f. d., in cui esistono le superficie Λ. Essi sono analoghi a casi particolari della dinamica dei fluidi non conduttori, in cui esistono le superficie L.

3. – Se un fuido perfetto non conduttore è in moto stazionario soggetto a forze conservative di potenziale unitario U (per unità di massa), e la densità ρ è funzione della sola pressione (in particolare costante), l'equazione dinamica diviene

$$\omega \wedge \boldsymbol{u} = -\frac{1}{2} \operatorname{grad} \Phi,$$

dove

$$\Phi = \frac{1}{2} v^2 - U + \int \frac{dp}{\rho}$$

è il noto trinomio di BERNOULLI. Il vettore di LAMB risulta irrotazionale; la (5) è soddisfatta (con $A = \text{cost}$); esistono le superficie L ed hanno equazione $\Phi = \text{cost}$. La loro esistenza è stata messa in luce da CALDONAZZO [10]. Egli le denomina "superficie di BERNOULLI", in quanto su di esse è costante il trinomio di BERNOULLI; la stessa denominazione si trova presso altri autori (vedi ad esempio [11], [12]).

Consideriamo la situazione analoga in m. f. d.. Un fluido perfettamente conduttore in presenza di campo magnetico sia in condizioni stazionarie, nel senso della m. f. d., cioè gli elementi del campo elettromagnetico e del moto dipendano dal posto, ma siano invariabili col tempo (vedi ad esempio [13]). La (1) diviene

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = 0. \tag{7}$$

La (6) è allora soddisfatta, per esempio con $B = 1$, e le superficie L hanno equazione $X = \text{cost}$. Esse sono inoltre stazionarie, per la stazionarietà del moto. Il campo magnetico e il campo cinematico appaiono stratificati secondo le superficie L. Esse, essendo superficie di corrente, sono superficie materiali.

4. – Nel caso dei fluidi perfetti non conduttori, qualora pur non essendo stazionario il moto, sia stazionaria la distribuzione del vortice, esistono le superficie L. Infatti, nelle predette condizioni, la (2) diviene

$$\operatorname{rot}(\omega \wedge \boldsymbol{u}) = 0 \tag{8}$$

La (5) risulta allora soddisfatta, per esempio con $A = 1$, ed esistono le superficie L. La loro esistenza e la loro proprietà sono state messe in luce da MASOTTI [11].

Sempre secondo l'analogia in esame, alla stazionarietà del vortice corrisponde la stazionarietà del campo magnetico, e la (1) si riduce ancora alla (7). Quindi, se il fluido è perfettamente conduttore e il campo magnetico è stazionario, esistono le superficie Λ.

Esse non sono stazionarie; perchè ciò sia occorre ed è sufficiente che non vari in ogni punto l'orientazione del vettore $\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}$, ossia, tenendo conto della stazionarietà di $\boldsymbol{H}$, che $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ sia complanare ad $\boldsymbol{H}$ e a $\boldsymbol{v}$. Ciò si esprime con l'equazione

$$\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$$

Se così avviene, ancora il campo magnetico e il campo cinematico appaiono stratificati secondo le superficie Λ

5. - Un altro notevole caso di esistenza delle superficie L, per i fluidi non conduttori [11], è quello dei liquidi viscosi, qualora sia stazionaria la distribuzione del vortice ed esista un potenziale di flessione, condizione quest'ultima che si esprime con l'equazione

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\omega = 0. \tag{9}$$

Sotto queste ipotesi infatti sussiste ancora la (8).

Passiamo ora alla m. f. d.. All'ipotesi del liquido viscoso corrisponde quella del fluido non perfettamente conduttore (con σ e μ costanti); alla (9) corrisponde l'equazione

$$\text{rot rot}\,\boldsymbol{H} = 0, \tag{10}$$

ovvero, essendo il campo $\boldsymbol{H}$ legato alla densità di corrente elettrica $\boldsymbol{I}$ dalla relazione rot $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}$, l'equazione

$$\text{rot}\,\boldsymbol{I} = 0; \tag{10'}$$

e quindi all'ipotesi dell'esistenza del potenziale di flessione corrisponde quella dell'esistenza del potenziale della densità di corrente elettrica.

Ciò premesso, se è stazionario il campo magnetico relativo al moto di un fluido non perfettamente conduttore, e se è conservativa la distribuzione della densità di corrente elettrica, esistono le superficie Λ. E infatti, sotto le predette ipotesi, la (3) si riduce alla (7).

Si noti che, grazie alla (10'), risulta armonico il campo della densità della corrente elettrica $\boldsymbol{I}$. Infatti $\boldsymbol{I}$, che è un vettore solenoidale (in quanto uguale a rot $\boldsymbol{H}$), è pure (quando sussiste la (10')) irrotazionale; quindi è

$$\Delta_2 \boldsymbol{I} = \text{grad div}\,\boldsymbol{I} - \text{rot rot}\,\boldsymbol{I} = 0.$$

6. – Nella ordinaria meccanica dei fluidi di denominano "moti di BELTRAMI" quelli per cui il vortice è parallelo alla velocità. Per moti siffatti è ben vero che la (5) è soddisfatta (con $A = 0$), ma il vettore di LAMB si annulla e risultano perciò indeterminate le superficie L (che dovrebbero essere ad esso ortogonali).

Analogamente in m. f. d.. Si considerino i moti per cui è il campo magnetico parallelo alla velocità; essi sono possibili, e se ne trovano numerosi esempi nella letteratura. Per moti siffatti la (6) è soddisfatta (con $B = 0$), ma sono indeterminate le superficie Λ, per lo svanire del vettore $\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}$.

§ 2. - Superficie di Lamb nella magnetofluidodinamica.

1. - Finora si sono introdotte le superficie L come superficie notevoli nella dinamica ordinaria dei fluidi. Ci si può chiedere se, anche nella m. f. d., esse possono esistere.

Condizione necessaria e sufficiente per la loro esistenza rimane la (5), o la (5'), che ad essa è equivalente. Tuttavia il verificarsi di tale condizione, in m. f. d., dipende anche dagli elementi elettromagnetici. Infatti l'equazione dinamica della m. f. d., se il fluido non è viscoso, se è trascurabile l'azione elettrostatica, e se la densità è funzione della sola pressione, è (vedi ad esempio [14])

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} - \operatorname{grad} \Phi, \tag{11}$$

dove Φ è il solito trinomio di Bernoulli, già richiamato. In virtù della [11] il vettore di Lamb si presenta nella forma

$$\omega \wedge \boldsymbol{v} = -\frac{1}{2} \operatorname{grad} \Phi + \boldsymbol{G}, \tag{12}$$

dove si è posto

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right).$$

La (5') diviene

$$\omega \wedge \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{G} = 0. \tag{13}$$

Sotto questa condizione esistono le superficie L.

La (13) è soddisfatta nei seguenti quattro casi:

1) è il moto irrotazionale ($\omega = 0$);

2) è ω parallelo a $\boldsymbol{v}$ (moti di Beltrami) [3];

3) è $\boldsymbol{G}$ irrotazionale (e quindi lo è il vettore di Lamb).

Nei casi 1) e 2), analogamente a quanto accade nella ordinaria meccanica dei ~~fluidi~~, le superficie L sono indeterminate per lo svanire del vettore di Lamb.

---

(3) moti di Beltrami sono possibili anche in m. f. d., e sono già presenti nella letteratura (vedi ad esempio [15]).

Nel caso 3) esistono effettivamente le superficie L. Chiamiamo f il potenziale di $\boldsymbol{G}$, la (12) diviene

$$\omega \wedge \boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\left(-\frac{1}{2}\Phi + f\right).$$

Le superficie L hanno equazione

$$-\frac{1}{2}\Phi + f = \text{cost.}$$

Perchè è

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{G} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\left(\frac{\mu}{\rho}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{H}\right) - \frac{\partial\omega}{\partial t},$$

un esempio interessante di moto che rientra nella categoria definita dalla condizione (3) è quello in cui sia stazionaria la distribuzione del vortice ed inoltre sia irrotazionale il vettore $\frac{\mu}{\rho}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{H}$, oppure, se il fluido è incomprimibile, lo sia il vettore $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{H}$ (4).

Per la categoria definita dalla condizione 4), il vettore di Lamb non è irrotazionale (come nel caso 3)), ma è sempre complesso-lamellare, e cioè si può porre nella forma (5) Le superficie L hanno equazione $\psi = \text{cost.}$

2. - La condizione (13) di esistenza delle superficie L nella magnetodinamica di un fluido perfetto va modificata se si tratta di un fluido viscoso. In quanto segue ci si limita a considerare un liquido viscoso.

L'equazione dinamica per un liquido viscoso conduttore in

(4) A proposito della irrotazionalità di $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{H}$, è notevole un esempio messo in luce da Agostinelli [16]. Siano M ed N due funzioni del posto (oltre che del tempo), tali che $\operatorname{grad}M\times\operatorname{grad}N = 0$; la N sia armonica, e risulti $(\operatorname{grad}N)^2$ funzione di M. Ponendo allora $\boldsymbol{H} = M\operatorname{grad}N$, il vettore $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{H}$ risulta conservativo, essendo il suo potenziale $-\int(\operatorname{grad}N)^2 M\,dM$.

presenza di un campo magnetico è (sempre trascurando l'azione elettrostatica) la seguente (vedi ad esempio [14]):

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} - \operatorname{grad} \Phi, \tag{14}$$

dove Φ è il solito trinomio di BERNOULLI. In virtù della (14), il vettore di LAMB si presenta ancora nella forma (12), dove questa volta è

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\right).$$

Le considerazioni fatte al numero precedente per i fluidi non viscosi rimangono valide per i liquidi viscosi, pur di tener conto della nuova espressione del vettore $\boldsymbol{G}$. Sussiste ancora un esempio di moto, che estende quello di un fluido perfetto dato a proposito della condizione 3); ma alle condizioni di allora (stazionarietà del vortice e irrotazionalità del vettore $\frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H}$) va adesso aggiunta la irrotazionalità del vettore $\nu \operatorname{rot} \omega$ (condizione quest'ultima che, trattandosi di un liquido, si riduce alla irrotazionalità di $\operatorname{rot} \omega$, cioè all'esistenza di un potenziale di flessione).

§ 3. - Superficie di Bernoulli nella magnetofluidodinamica.

Nella ordinaria meccanica dei fluidi accade che, valendo il teorema di BERNOULLI, le superficie L esistono, ed esse sono inoltre superficie di BERNOULLI, in quanto su di esse è costante il trinomio di BERNOULLI.

Non così accade in m. f. d.. Per il moto stazionario di un fluido perfetto conduttore in presenza di campo magnetico, il teorema di BERNOULLI vale sotto determinate condizioni [17] (5), che non implicano l'esistenza delle superficie L. Ricordiamo i risultati noti. Essendo identicamente:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} = - \operatorname{grad} \frac{H^2}{2} + \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H}, \tag{15}$$

(5) Il lavoro citato riguarda la magnetoidrodinamica, ma l'estensione alla m. f. d. è immediata, e tosto ne accenno nel testo.

l'equazione dinamica (11), per il moto stazionario, si può scrivere

$$\text{(16)} \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = -\frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \frac{\mu}{\rho} \operatorname{grad} \frac{H^2}{2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} + \operatorname{grad} U.$$

D'altra parte in m. f. d. la pressione totale p^* è la somma della pressione meccanica, p, con quella magnetica, $\mu \frac{H^2}{2}$, ed è quindi

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{grad} \frac{H^2}{2} = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p^*.$$

Ora se la densità è funzione della sola pressione totale p^* (6) (o in particolare è costante), il trinomio di BERNOULLI della m. f. d. è

$$\Phi^* = \frac{1}{2} v^2 - U + \int \frac{dp^*}{\rho}.$$

e la (16) si scrive come segue:

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} \Phi^* + \frac{\mu}{\rho} \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H}.$$

Solo se l'ultimo addendo è un vettore normale alla velocità, vale il teorema di BERNOULLI, ossia è $\Phi^* = \text{cost.}$ lungo le linee di flusso (7).

---

(6) Sotto opportune ipotesi, vale un'equazione di stato in cui sono legate fra loro la densità, la pressione totale, e l'entropia [18]. Quando si trascurino gli effetti termodinamici, si presenta la possibilità di un'equazione di stato che leghi la densità alla pressione totale.

(7) A proposito del teorema di BERNOULLI nella m. f. d., val la pena di notare esplicitamente che la condizione di perpendicolarità fra la velocità e il vettore $\frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H}$ permette di asserire la costanza del trinomio di BERNOULLI lungo le linee di flusso, ma non (in generale) lungo le linee vorticose, e nemmeno lungo le linee di punti P per cui è

$$(\boldsymbol{v} + m \operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \wedge dP = 0,$$

essendo m una funzione arbitraria del punto P. Inoltre la suddetta perpendicolarità, nel caso di moto irrotazionale, non comporta che sia costante ovunque, ma ancora solo lungo le linee di flusso.

Si osservi ora che la suddetta condizione di validità per il teorema di BERNOULLI, essendo

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} = H\frac{d\boldsymbol{H}}{d\sigma}, \tag{18}$$

dove si è indicata con σ la direzione di $\boldsymbol{H}$, si esprime con l'equazione

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{d\sigma} \times \boldsymbol{v} = 0. \tag{19}$$

Riassumendo:

Supposta la stazionarietà del moto, e la dipendenza della densità dalla pressione totale, la (19) è condizione caratteristica per la validità del teorema di BERNOULLI.

Osserviamo ora che il teorema di BERNOULLI non comporta l'esistenza delle superficie L, perchè la (19), nelle ipotesi or ora riassunte, non soddisfa identicamente la (13). Infatti la (13), per le (17) e (18), nelle ipotesi fatte, si scrive

$$\left(-\operatorname{grad}\Phi^* + \frac{\mu}{\rho} H \frac{d\boldsymbol{H}}{d\sigma}\right) \times \operatorname{rot}\frac{\mu}{\rho} H \frac{d\boldsymbol{H}}{d\sigma} = 0,$$

ed essa non discende dalla (19), nè ad essa equivale, ma è un'ulteriore equazione cui devono soddisfare gli elementi dinamici e magnetici affinchè esistano le superficie L. Perciò nella m. f. d. il teorema di BERNOULLI non comporta l'esistenza delle superficie L.

In particolare le superficie sulle quali è costante il trinomio Φ^*, superficie che ben a ragione si potranno chiamare superficie di BERNOULLI della m. f. d., non godono della proprietà di essere di flusso per la velocità e per il vortice, come invece accade nella fluidodinamica ordinaria. E ciò del resto si può confermare commentando direttamente l'equazione di moto (17): essa mostra che, se vale il teorema di BERNOULLI (e cioè se è verificata la (19)), il vettore grad Φ^* è perpendicolare alla velocità, ma non (in generale) al vortice; perciò le superficie di equazione $\Phi^* = \text{cost.}$ contengono le linee di flusso, ma non (in generale) quelle vorticose.

Tuttavia, anche in m. f. d., può accadere che, contemporaneamente,

a) valga il teorema di BERNOULLI,

b) esistano le superficie L,

c) le superficie L siano inoltre superficie di BERNOULLI (sulle quali è costante il trinomio di BERNOULLI).

Infatti, nel moto stazionario, condizione caratteristica perchè le superficie L siano inoltre superficie di BERNOULLI è che sia

$$\omega \wedge \boldsymbol{v} = C \operatorname{grad} \Phi^*,$$

dove C è funzione del posto: condizione che, per le (17) e (18); diviene

$$C \operatorname{grad} \Phi^* = -\frac{1}{2} \operatorname{grad} \Phi^* + \frac{\mu}{2\rho} H \frac{d\boldsymbol{H}}{d\sigma}$$

e che, per il campo $\boldsymbol{H}$, si esprime come segue:

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{d\sigma} = \alpha \operatorname{grad} \Phi^*, \tag{20}$$

dove α è uguale a $(C + 1/2)\, 2\rho/\mu H$, ed è funzione del posto ed eventualmente del tempo.

La (20), essendo condizione caratteristica per l'avverarsi delle circostanze *b*) e *c*), è anche necessaria per il contemporaneo verificarsi delle *a*), *b*) e *c*); essa è inoltre condizione sufficiente per la validità del teorema di BERNOULLI, in quanto, tenendo conto della (17), assicura la perpendicolarità fra i vettori $d\boldsymbol{H}/d\sigma$ e $\boldsymbol{v}$. Essa è pertanto condizione caratteristica per il contemporaneo verificarsi delle tre circostanza *a*), *b*) e *c*).

Un caso in cui le superficie L esistono e sono superficie di BERNOULLI si ha quando un liquido è in moto stazionario ed il vettore rot $\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H}$ è conservativo, con potenziale uguale a $-H^2/2$, Esso soddisfa la (20) (con $\alpha = 0$), e costituisce un cospicuo esempio, in quanto ad esso (sotto opportune ipotesi) sono applicabili i teoremi di HELMHOLTZ sui vortici, come è stato mostrato da AGOSTINELLI [16].

BIBLIOGRAFIA

[1] W. M. ELSASSER, *The Earth's Interior and Geomagnetism*, Rev. Mod. Phys., v. 22, 1950, p. 30.

[2] J. CARSTOIU, *Analogies et différences dans les tourbillons et champ magnétique*, Comptes Rendus Ac. Sc., v. 251 1960, p. 509.

[3] C. AGOSTINELLI, *Problemi di magnetofluidodinamica ed equazioni fondamentali*, « *Atti del Simposio sulla magnetofluidodinamica di Bari* » (10-14 gennaio 1961), 1962, p. 1.

[4] A. M. PRATELLI, *Su alcune discontinuità trasversali in magnetofluido-dinamica*, Boll. U.M.I., v. 18, 1963 p. 382.

[5] R. BERKER, *Mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Enc. of Phys., v. VIII/2, 1963, p. 3.

[6] C. TRUESDELL and R. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, Enc. of Phys., v. III/1, 1960, p. 404.

[7] J. L. ERICKSEN, *Tensor Fields*, Enc. of Phys., v. III/1, 1960, p. 824.

[8] B. CALDONAZZO, *Sulla geometria differenziale di superficie aventi interesse idrodinamico*, Rend. Ac. Naz. Lincei, v. 33, 1924, p. 396.

[9] M. PASTORI, *Sulle superficie ortogonali a una congruenza normale di curve*, Rend. Ist. Lomb., v. 55, 1927, p. 111.

[10] B. CALDONAZZO, *Un'osservazione a proposito del teorema di Bernoulli*, Boll. U.M.I., v. 6, 1925, p. 1.

[11] A. MASOTTI, *Osservazioni sui moti di un fluido nei quali è stazionaria la distribuzione del vortice*, Rend. Ac. Naz. Lincei, v. 6, 1927, p. 224.

[12] L. CASTOLDI, *Superficie e linee di Bernoulli nel moto stazionario di un fluido reale*, Atti Ac. Ligure Sc. Lett., v. 4, 1947, p. 21.

[13] C. AGOSTINELLI, *Soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto-idrodinamica interessanti la Cosmogonia*, Rend. Ac. Naz. Lincei, v. 17. 1954, p. 216.

[14] A. BULENT CAMBEL, *Plasma Physics and Magnetofluidmechanics*, New York, 1963, p 208.

[15] I. IMAI, *On Flows of Conducting Fluids past Bodies*, Rev. Mod. Phys., v. 32, 1960, p. 993.

[16] C. AGOSTINELLI, *Su alcuni moti magneto idrodinamici ai quali è applicabile la teoria di Helmholtz sui vortici*, Rend. Sem. Mat. Torino, v. 16, 1957, p. 393.

[17] W. B. THOMPSON, *An Introduction to Plasma Physics*, Oxford, 1962 p. 65

[18] H. GRAD, *Reducible Problems in Magneto-Fluids Dynamic Steady Flows*, Rev. Mod. Phys., 1960, p. 835.