Bollettino Unione Matematica Italiana

Marziano Marziani

Sull'energia irradiata da un dipolo in presenza di una terra non omogenea.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.1, p. 3–11.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_1_3_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Sull'energia irradiata da un dipolo in presenza di una terra non omogenea.

Nota di MARZIANO MARZIANI (a Ferrara) (*) (**)

Sunto. - *Si estende al caso della Terra non omogenea un procedimento per la valutazione approssimata dell'energia irradiata da un dipolo, ottenendo risultati che comprendono quelli stabiliti recentemente da H. Bremmer a proposito della propagazione radio su superficie terrestre composta di zone omogenee elettricamente diverse.*

1. Come è stato mostrato recentemente ([1]), una valutazione approssimata dell'energia totale irradiata da un dipolo in presenza di una terra piana e omogenea, dotata di conduttività finita, può aversi con procedimento assai semplice. Questo si fonda, in sostanza, sull'uso della cosidetta condizione al contorno di M. A. LEONTOVICH ove si assuma quale valore approssimato del vettore magnetico sulla superficie terrestre σ quello corrispondente all'ipotesi della perfetta conduttività. Le formule che si ottengono coincidono con quelle che A. SOMMERFELD ([2]) ha dedotto dalla sua soluzione esatta trascurando termini molto piccoli nel caso di elevata conduttività del suolo. Pertanto le approssimazioni suddette appaiono, sul piano pratico, del tutto giustificate e suscettibili di nuove applicazioni. Infatti, osservato che la trattazione del caso non omogeneo col

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 5 settembre 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

([1]) M. MARZIANI, *Sull'energia irradiata da un dipolo*, «Boll. Un. Mat. It.» (3), vol. 16 (1961), pp. 117-123.

([2]) A. SOMMERFELD, *Partial Differential Equations in Physics*, New York, «Academic Press Inc.», 1949, p. 270 e segg.

metodo del SOMMERFELD presenterebbe difficoltà notevoli (3), si può pensare di estendere a tale problema le considerazioni semplificatrici svolte in precedenza. Queste, però, sembrano a priori non più direttamente applicabili quando la superficie terrestre si compone di zone omogenee dotate di proprietà elettriche diverse (come ad es. continente e mare) (4) implicando in questo caso le nostre ipotesi una discontinuità per la componente superficiale del vettore elettrico sulla linea di separazione di due zone (5). Ed è noto che una discontinuità di questo tipo, traducendosi in una brusca variazione della densità di corrente superficiale, equivale ad un addensamento di carica magnetica sul contorno, capace, in certi casi (6), di modificare sensibilmente i risultati. Conviene dunque, in questa nota, riprendere la questione dal principio con un procedimento alquanto diverso anche se ispirato agli stessi criteri della ricerca precedente. Si stabilisce così una formula approssimata, (la (9) del testo), che assieme alla (1) riduce alle quadrature il problema della valutazione dell'energia irradiata in presenza di una terra con indice complesso di rifrazione (7) comunque variabile col posto.

Il risultato, del tutto simile nella forma a quello acquisito per la terra omogenea, si applica, in particolare, ad un'isola o continente omogeneo di forma e dimensioni qualsiasi confinante col mare. La valutazione, in questo e in altri casi interessanti la tecnica delle radio-onde, coincide sostanzialmente con quella che può aversi

(3) Tali difficoltà sono del resto le stesse che si incontrano nel problema più generale della propagazione delle radio-onde su una terra piana non omogenea. Si vedano su tale argomento e per la bibliografia relativa H. BREMMER: *Propagation of Electromagnetic Waves*, in « Handbuch der Physik », Berlin, Springer Verlag, 1958, Band XVI p. 541 e E. L. FEINBERG: *Propagation of Radio Waves along an Inhomogeneous Surface.* Supplemento al vol. XI serie X del Nuovo Cimento (1959), pp. 60-91.

(4) Le nostre considerazioni presupponevano la continuità del vettore elettrico e delle sue derivate prime su σ.

(5) Discontinuità derivante dall'applicazione della condizione al contorno di M. A. LEONTOVICH a due zone di natura diversa. Le variazioni delle proprietà elettriche del suolo agiscono invece in maniera trascurabile sulla componente superficiale del vettore magnetico.

(6) Ad es. in alcune trattazioni del problema della diffrazione da parte di una fenditura in uno schermo perfettamente conduttore (cfr. ad es. J. A. STRATTON: « *Teoria dell'elettromagnetismo* ». Torino, Einaudi, 1952, p. 644 oppure B. B. BAKER and E. T. COPSON: « *The mathematical theory of Huygens principle* » Oxford, Clarendon Press, 1950, p. 115.

(7) Sufficientemente grande in modulo rispetto all'unità.

dai risultati che H. BREMMER e altri Autori hanno di recente stabilito.

2. Allo scopo di impostare la risoluzione del problema, cominciamo col ricordare che un dipolo elettrico verticale, posto in un punto $A_0(0, 0, h)$ con $h > 0$ dell'atmosfera [8] in presenza della terra, la cui superficie σ supporremo coincidente col piano xy del sistema cartesiano di riferimento O, x, y, z, irradia complessivamente un'energia W (media per periodo) data dalla relazione [9]

$$W = -\frac{I_0 l}{2} Re \{ E_z(A_0) \} \tag{1}$$

ove I_0 rappresenta l'ampiezza della corrente sinusoidale che percorre il dipolo, l la lunghezza del dipolo stesso, ed $E_z(A_0)$ il valore assunto dalla componente verticale del vettore elettrico $\boldsymbol{E}$ nel punto ove è situato il dipolo [10]. Come appare dalla (1), la valutazione dell'energia W dipende, in definitiva, dal calcolo di tale componente verticale del vettore elettrico. È da notare a questo proposito che dalla relazione

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi + k_0^2 \tag{2}$$

(ove $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu}$ è la costante di propagazione nell'atmosfera, ω essendo la pulsazione) [11] che esprime il vettore elettrico $\boldsymbol{E}$ in funzione del vettore di HERTZ

$$\Pi = \Pi \boldsymbol{k}$$

($\boldsymbol{k}$ = versore dell'asse z diretto verso l'atmosfera) si trae [12]:

$$E_z = \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k_0^2\Pi = -\Delta_2\Pi \qquad \left(\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{3}$$

(8) Si suppone l'atmosfera omogenea e dotata di costante dielettrica ε_0 e permeabilità magnetica μ.

(9) Cfr. ad es. M. MARZIANI: loc. cit p. 121.

(10) $Re(u)$ e $Im(u)$ denotano la parte reale e il coefficiente dell'immaginario del numero complesso in parentesi.

(11) Il fattore temporale che si sottintende è $e^{-i\omega t}$ i essendo l'unità immaginaria e t il tempo.

(12) Si ricordi che la funzione di HERTZ Π soddisfa all'equazione delle onde di HELMHOLTZ $\Delta\Pi + k_0^2\Pi = 0$, Δ essendo al solito l'operatore di LAPLACE nello spazio a tre dimensioni.

Si suppone poi sufficientemente bassa la frequenza del campo elettromagnetico ed elevata la conduttività della terra in modo che la sua costante dielettrica complessa ε' (variabile da punto a punto a causa della variabilità delle proprietà elettriche del suolo) sia grande in modulo nei confronti della costante dielettrica ε_0 dell'atmosfera ([13]). Sotto tali ipotesi i componenti superficiali $\boldsymbol{E}_t$ e $\boldsymbol{H}_t$ del vettore elettrico e di quello magnetico sono legati fra loro su σ dalla relazione approssimata (condizione di M. A. LEONTOVICH) ([14])

$$\boldsymbol{E}_t = \zeta \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_t \tag{4}$$

ove l'impedenza superficiale

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}$$

deve considerarsi funzione generalmente continua del punto Q di σ.

([13]) Com'è noto, $\varepsilon' = \varepsilon + i\gamma/\omega$ ε e γ essendo rispettivamente la costante dielettrica e la conduttività della terra. La permeabilità magnetica della stessa si suppone invece uguale a quella dell'atmosfera e quindi costante.

([14]) Nel caso di una terra (piana) omogenea, la (4) può dimostrarsi nel modo seguente. È noto (cfr. ad es. J. A. SRATTON: loc. cit. p. 641) che in un punto $P(x, y, z)$ interno alla terra il vettore elettrico è esprimibile nella forma:

$$\boldsymbol{E}(P) = -\frac{i\omega\mu}{4\pi}\int_\sigma \frac{e^{ikr}}{r}(\boldsymbol{k}\wedge \boldsymbol{H})d\sigma_Q - \tag{^{0}}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}_P\int_\sigma \frac{e^{ikr}}{r}(\boldsymbol{k}\wedge \boldsymbol{E})d\sigma_Q + \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}_P\int_\sigma \frac{e^{ikr}}{r}(\boldsymbol{k}\times \boldsymbol{E})d\sigma_Q$$

ove $r = |P - Q|$ e $k = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu}$, la radice essendo intesa con parte reale positiva. Ora, agli integrali della (^{0}), che sono del tipo

$$J = \int_\sigma e^{ikr}\varphi(Q, P)\,d\sigma_Q = e^{-ikz}\int_\sigma e^{ik(r+z)}\varphi(Q, P)d\sigma_Q,$$

è applicabile il metodo di approssimazione del saddle-point. Infatti, quanto più il comportamento della terra s'avvicina a quello di un buon conduttore, tanto maggiore è la quantità positiva $Im(k)$ e quindi tanto più prossimo a zero il fattore $e^{ik(r+z)}$ per ogni Q di σ diverso da $Q_0(x, y, 0)$. Pertanto solo un piccolo intorno di Q_0 dà un contributo effettivo nel calcolo di J. Ma in tale intorno è

$$\varphi(Q, P) \backsim \varphi(Q_0, P) \qquad r + z \backsim -\frac{\rho^2}{2z}$$

Si può ora osservare che sostituendo nella (4) ad $\boldsymbol{E}_t$ l'espressione che si ottiene dalla (2) e a $\boldsymbol{H}_t$ quella che si trae dalla relazione

$$\boldsymbol{H} = - i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot}(\Pi \boldsymbol{k})$$

la (4) stessa acquista la forma

$$\operatorname{grad}_\sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z} = - \frac{ik_0}{n} \operatorname{grad}_\sigma \Pi \tag{5}$$

ove $\operatorname{grad}_\sigma F$ denota il gradiente superficiale della funzione F ([15]) e $n = \sqrt{\varepsilon'/\varepsilon_0}$ è l'indice complesso di rifrazione della terra.

Pertanto il problema che ci interessa è ricondotto a quello di

ρ essendo la distanza di Q da Q_0, e quindi

$$J \sim e^{-ikz}\varphi(Q_0, P) \int_\sigma e^{-\frac{ik\rho^2}{2z}} d\sigma_Q = - \frac{2\pi i}{k} z\varphi(Q_0, P) e^{-ikz}.$$

Applicando tale formula agli integrali della (°) si ottiene

$$\boldsymbol{E}(P) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}[\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}(Q_0)]e^{-ikz} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(Q_0)e^{-ikz}$$

cosicchè, quando P tende a σ,

$$\boldsymbol{E} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}(\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}). \tag{°°}$$

La (°°) implica l'annullarsi del componente verticale di $\boldsymbol{E}$ in seno alla terra (ma non nell'atmosfera essendo k grande in modulo rispetto k_0) e, per la continuità di $\boldsymbol{E}_t$ e $\boldsymbol{H}_t$ attraverso σ, il sussistere della (4) (con valore costante dell'impedenza superficiale) su detta superficie. Nel caso di una terra (piana) non omogenea si può, in generale, ritenere ancora valida in prima approssimazione la formula (4) ora stabilita per la terra omogenea (a patto di sostituire all'impedenza superficiale il suo valore locale $\zeta(Q)$). Non sarà inutile osservare che nel caso di una terra non piana il procedimento esposto consentirebbe di tener conto della curvatura della superficie terrestre (cfr. H. BREMMER: loc. cit. p. 464, formula (18.11)).

([15]) Ovviamente:

$$\operatorname{grad} F = \operatorname{grad}_\sigma F + \frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

determinare una soluzione Π dell'equazione delle onde, regolare nel semispazio $z > 0$ salvo che nel punto A_0 (ove presenta la singolarità della funzione di HERTZ del campo primario di un dipolo), che verifichi per $z = 0$ alla (5) e all'infinito a condizioni di radiazione.

3. Indicati rispettivamente con $\Phi(Q)$ e con $\Psi(Q)$ i valori (soddisfacenti alla (5) ma peraltro incogniti) che Π e $\frac{\partial \Pi}{\partial z}$ assumono in un punto Q di σ, e detto P_0 il generico punto del semispazio $z > 0$, la funzione

$$\Pi'(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{e^{ik_0 r}}{r}\,\Psi(Q)d\sigma_Q \tag{6}$$

(ove r è la distanza di P_0 da Q) soddisfa ([16]) in P_0 all'equazione delle onde, oltre che alle condizioni all'infinito, e su σ è tale che

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial z} = \Psi(Q) = \frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Allora

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} + \frac{e^{ik_0 r'}}{r'}\right) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{e^{ik_0 r}}{r}\,\Psi(Q)d\sigma_Q \tag{7}$$

(ove $p = \frac{iI_0 l}{\omega}$ è il momento elettrico del dipolo e r_0 e r' sono rispettivamente le distanze di P_0 dai punti $A_0(0, 0, h)$ e $A_1(0, 0, -h)$), essendo soluzione dell'equazione delle onde, dotata sul piano $z = 0$ di derivata normale uguale a $\Psi(Q)$, oltre che del richiesto comportamento in A_0 e all'infinito, per il teorema di unicità coincide con $\Pi(P_0)$ nel semispazio $z > 0$.

Se ora si fissa l'attenzione sul contributo dovuto alla conduttività finita della terra (rappresentato dall'espressione che più

([16]) Cfr. ad es. B. B. BAKER and E. T. COPSON: loc. cit. p. 157
La (6), che è conseguenza della nota formula di HELMHOLTZ, sussiste in condizioni analoghe a quelle della formula di GREEN (si veda per queste ultime L. LICHTENSTEIN: *Neuere Entwicklung der Potentialtheorie.* in «Encyklopadie der Mathem. Wissensch.», Band. II (3), p. 212).

sopra abbiamo indicato con Π') [17] si vede che il vettore elettrico $\boldsymbol{E}'$ derivante dalla funzione di HERTZ Π' ha, in virtù della (3), come componente verticale nel punto P_0

$$E_z'(P_0) = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_2 \int \frac{e^{ik_0 r}}{r}\,\Psi(Q)\,d\sigma_Q$$

cioè, tenuto anche conto della (5),

$$E_z'(P_0) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{div}_{P_0} \int_\sigma \frac{e^{ik_0 r}}{r}\,\mathrm{grad}_\sigma\,\Psi(Q)\,d\sigma_Q = \tag{8}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{div}_{P_0} \int_\sigma \frac{e^{ik_0 r}}{r}\,\frac{ik_0}{n}\,\mathrm{grad}_\sigma\,\Phi(Q)\,d\sigma_Q\,.$$

Convenendo, come nel caso omogeneo, di assumere quale valore approssimato di $\boldsymbol{H}_t$ su σ quello corrispondente all'ipotesi della perfetta conduttività, $\Phi(Q)$ risulta uguale a $2\,\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1}$ (ove r_1 è la distanza di Q da A_1) e di conseguenza la (8) diventa:

$$E_z'(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{div}_{P_0} \int_\sigma \frac{e^{ik_0 r}}{r}\,\frac{2ik_0}{n}\,\mathrm{grad}_\sigma \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1}\right) d\sigma_Q\,. \tag{9}$$

L'espressione (9), calcolata in A_0, fornisce attraverso la (1) la soluzione (approssimata ma del tutto generale) del problema [18] in una forma analoga a quella da noi data nel caso omogeneo [19].

[17] La funzione $\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} + \frac{e^{ik_0 r'}}{r'}\right)$ che compare nella (7) rappresenta la funzione di HERTZ nell'ipotesi della perfetta conduttività.

[18] Limitatamente al contributo della conduttività finita del suolo, essendo quello della perfetta conduttività già noto.

[19] Cfr. M. MARZIANI: loc. cit. p. 122. In tale formula bisogna sostituire $\frac{e^{ik_0 r}}{r}$ a $\frac{e^{-ik_0 r}}{r}$ (come giustamente ha rilevato L. ROBIN nella recensione del detto lavoro in Mathematical Reviews, vol. 24 N. 5 B (1962), B 1859). Tale svista non pregiudica peraltro la validità delle conclusioni della ricerca.

4. Il risultato precedente è applicabile in particolare quando la superficie terrestre consta di un'isola σ_1 (omogenea e di forma qualsiasi) e del mare σ_2 (considerato come un mezzo a conduttività infinita) che la circonda. In questo caso, poichè l'indice complesso di rifrazione assume il valore costante n_1 su σ_1 mentre tende all'infinito su σ_2, dalla (9) si ottiene:

$$E_z'(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\frac{2ik_0}{n_1}\operatorname{div}_{P_0}\int_{\sigma_1}\frac{e^{ik_0 r}}{r}\operatorname{grad}_\sigma\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1}\right)d\sigma_Q$$

che si può trasformare nella

$$E_z'(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1}\frac{e^{ik_0 r}}{r}\frac{2ik_0}{n_1}\Delta_{2Q}\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1}\right)d\sigma_Q - \tag{10}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{e^{ik_0 r}}{r}\frac{2ik_0}{n_1}\operatorname{grad}_\sigma\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1}\right)\times \boldsymbol{v}\,ds$$

C essendo il contorno di σ_1 e $\boldsymbol{v}$ il versore normale a C che giace su σ ed è orientato verso l'interno di σ_1 ([20]). La (10) poi, in conse-

([20]) In relazione a quanto s'è detto all'inizio circa la discontinuità del componente superficiale del vettore elettrico è bene osservare che essendo su σ_1

$$\frac{\partial E_z'}{\partial z} = -\Delta_{2Q}\frac{\partial \Pi'}{\partial z} = \frac{2ik_0}{n_1}\Delta_{2Q}\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1}\right)$$

$$E' = -\frac{2ik_0}{n_1}\operatorname{grad}_\sigma\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1}\right)$$

e inoltre

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k}\wedge \boldsymbol{t}$$

($\boldsymbol{t}$ versore tangente a C) la (10) diventa

$$E_z'(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1}\frac{e^{ik_0 r}}{r}\frac{\partial E_z'}{\partial z}d\sigma_Q - \frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{e^{ik_0 r}}{r}(E'\wedge d\boldsymbol{s})_z$$

conforme alla teoria proposta dal KOTTLER per le distribuzioni superficiali discontinue (cfr. ad es. J. A. STRATTON: loc. cit. pp. 644-645.

guenza della identità di GREEN nel piano, risulta equivalente a

$$(11)\qquad E_{*}'(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1}\frac{e^{ik_0r_1}}{r_1}\frac{2ik_0}{n_1}{}'\Delta_{2Q}\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0r}}{r}\right)d\sigma_Q - -\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{e^{ik_0r_1}}{r_1}\frac{2ik_0}{n_1}\operatorname{grad}_\sigma\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0r}}{r}\right)\times\boldsymbol{v}ds$$

ove il primo termine che figura a secondo membro può pensarsi derivante, per il tramite della (3), dalla funzione di HERTZ

$$(12)\qquad \frac{1}{2\pi}\frac{2ik_0}{n_1}\int_{\sigma_1}\frac{e^{ik_0r_1}}{r_1}\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0r}}{r}d\sigma_Q.$$

Indicando allora con $\Pi_\infty(Q, A_0)$ il valore in Q della funzione di HERTZ del campo generato in ipotesi di perfetta conduttività dal dipolo posto in A_0, ed attribuendo a $\Pi_\infty(Q, P_0)$ un significato analogo, si ha:

$$\Pi_\infty(Q, A_0) = 2\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0r_1}}{r_1}\qquad \Pi_\infty(Q, P_0) = 2\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0r}}{r}$$

e la (12) diventa

$$(13)\qquad \frac{\varepsilon_0}{p}\frac{ik_0}{n_1}\int_{\sigma_1}\Pi_\infty(Q, A_0)\Pi_\infty(Q, P_0)d\sigma_Q.$$

La (13), (a parte le diverse notazioni), coincide con la formula ottenuta al riguardo da H. BREMMER ([21]) e comprendente i risultati numerici acquisiti da altri Autori.

Al campo derivante dalla (13) s'aggiunge nel nostro risultato quello espresso dal secondo termine della (11), dovuto all'azione della carica magnetica distribuita lungo il contorno C di σ_1. Questo secondo termine (che del resto diventa trascurabile quando P_0 è lontano da C) non figura invece nel risultato del BREMMER che, prescindendo dalle brusche variazioni di n, assume quale condizione su σ la

$$\frac{\partial\Pi}{\partial z} = -\frac{ik_0}{n}\Pi$$

in luogo della (5) (ossia della (4)) da noi adottata.

([21]) H. BREMMER: *The Propagation over an Inhomogeneous Earth considered as a Two-dimensional Scattering Problem*, in Electromagnetic Wave propagation, New York, Academic Press (1960), pp. 253-260 (cfr. in particolare la formula (16) di p. 257).