
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PAOLA MANACORDA

La disuguaglianza di Harnack per l'equazione del calore.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 19
(1964), n.1, p. 31–39.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_1_31_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La disuguaglianza di Harnack per l'equazione del calore

Nota di PAOLA MANACORDA (a Milano) (*) (**)

Sunto. - *Partendo da un teorema di Pini e Hadamard — che qui viene dimostrato per altra via — relativo ad una disuguaglianza di tipo Harnack per le soluzioni positive della equazione del calore, si determinano forma e proprietà della costante che compare nella disuguaglianza.*

Consideriamo l'equazione del calore

$$(1) \quad u_t = u_{xx}$$

nel rettangolo $R_h \equiv \{(x, t); 0 < x < 1, 0 < t \leq h\}$; diciamo che $u(x, t)$ è soluzione della (1) in R_h se è ivi dotata di derivata prima rispetto a t e di derivata seconda rispetto ad x e verifica la (1) in ogni punto di R_h .

PINI [4] e HADAMARD [2] hanno provato che:

Fissati comunque quattro numeri positivi x_1, x_2, t_1, t_2 con $0 < t_1 < t_2$ ed x_1, x_2 maggiori di 0 e minori di 1, esiste una costante positiva K dipendente soltanto da x_1, x_2, t_1, t_2 , tale che qualunque soluzione positiva della equazione del calore in R_{t_2} verifica la condizione

$$(2) \quad u(x_2, t_2) \geq Ku(x_1, t_1)$$

In questa nota si dà una diversa dimostrazione del teorema. Si determina inoltre esplicitamente la costante K migliore possibile e le funzioni u per le quali nella (2) sussiste il segno di uguaglianza; la costante K così determinata dipende con continuità da x_1, x_2, t_1, t_2 .

1. Nozioni preliminari.

Siano $\varphi_0(x)$ una funzione continua in $(0, 1)$ e $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$, funzioni continue in $(0, h)$ ed inoltre si abbia

$$(3) \quad \varphi_0(0) = \varphi_1(0), \quad \varphi_0(1) = \varphi_2(0)$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 7 dicembre 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 40 (anno 1960-61) del Comitato per la matematica del C. N. R.

In queste ipotesi esiste una funzione u , continua in $\bar{R}_h$, soluzione in R_h della equazione del calore, verificante le condizioni

$$(4) \quad u(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{per } 0 \leq x \leq 1,$$

$$(5) \quad u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(1, t) = \varphi_2(t) \quad \text{per } 0 \leq t \leq h.$$

La funzione u ha la seguente ben nota espressione:

$$(6) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 G(x, \xi, t) \varphi_0(\xi) d\xi + \int_0^t G_\xi(x, 0, t - \tau) \varphi_1(\tau) d\tau - \\ - \int_0^t G_\xi(x, 1, t - \tau) \varphi_2(\tau) d\tau$$

dove la funzione di GREEN G ha le seguenti espressioni equivalenti,

$$(7) \quad G(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4t}} - \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4t}} \right\},$$

$$(8) \quad G(x, \xi, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \operatorname{sen} n \pi x \operatorname{sen} n \pi \xi,$$

risultando tali serie convergenti per $t > 0$.

Notiamo alcune proprietà della G . Dalla (8) segue

$$(9) \quad G(x, 0, t) = G(x, 1, t) = 0 \quad \text{per } t > 0.$$

Per la (7) è

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n(x-\xi+n)}{t}} - \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+n)(\xi+n)}{t}} \right\},$$

e quindi

$$(10) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} e^{\frac{(x-\xi)^2}{4t}} G(x, \xi, t) = 1,$$

e la convergenza è uniforme per $x, \xi \in [a, b] \subset]0, 1[$.

La (10) indica il comportamento della G per $t \rightarrow 0$ ed in particolare che risulta $G \rightarrow +\infty$ per $\xi = x$ e $t \rightarrow 0$. Inoltre dalla (10) segue $G > 0$ per t sufficientemente piccolo; tenuto conto della (9) e che $G_t = G_{\xi\xi}$ come si verifica facilmente, per le proprietà di minimo delle soluzioni della equazione del calore (1)

$$(11) \quad G(x, \xi, t) > 0 \quad \text{per } 0 < x < 1, \quad 0 < \xi < 1 \text{ e } t > 0.$$

Si ha, derivando rispetto a ξ la (7) e la (8)

$$(12) \quad G_{\xi}(x, \xi, t) = \frac{1}{2t^{3/2}} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} (x - \xi + 2n) e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4t}} + \right. \\ \left. + \sum_{-\infty}^{+\infty} (x + \xi + 2n) e^{-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4t}} \right\},$$

$$(13) \quad G_{\xi}(x, \xi, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t} n\pi \cos n\pi\xi \sin n\pi x,$$

e pertanto, ponendo $\xi = 0$,

$$(14) \quad G_{\xi}(x, 0, t) = t^{-3/2} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2n)^2}{4t}} (x + 2n),$$

$$(15) \quad G_{\xi}(x, 0, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t} n\pi \sin n\pi x,$$

mentre, ponendo $\xi = 1$,

$$(16) \quad G_{\xi}(x, 1, t) = t^{-3/2} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2n-1)^2}{4t}} (x + 2n - 1),$$

$$(17) \quad G_{\xi}(x, 1, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi^2 t} n\pi \sin n\pi x,$$

e quindi

$$(18) \quad G_{\xi}(x, 1, t) = -G_{\xi}(1 - x, 0, t),$$

relazione che permette di dedurre immediatamente le proprietà di G_{ξ} per $\xi = 1$ dalle analoghe valevoli per $\xi = 0$.

(1) Vedi L. NIRENBERG [3].

La (14) può scriversi

$$(19) \quad G_{\varepsilon}(x, 0, t) = t^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} [x + \psi(x) - \psi(-x)],$$

ove si ponga

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n(n+x)}{t}} (2n+x).$$

Si ha quindi

$$t^{+3/2} e^{\frac{x^2}{4t}} x^{-1} G_{\varepsilon}(x, 0, t) = 1 + \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x} = 1 + \frac{1}{2} \psi'(x^*),$$

ed essendo $|x^*| < 1$, si ha

$$\begin{aligned} |\psi'(x^*)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n(x^*+n)}{t}} \left[1 - \frac{n}{t} (x^* + 2n) \right] \right| < \\ &< \left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n(x^*+n)}{t}} \left[1 + \frac{n}{t} (1 + 2n) \right] \right|, \end{aligned}$$

e pertanto

$$(20) \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{+3/2} e^{\frac{x^2}{4t}} x^{-1} G_{\varepsilon}(x, 0, t) = 1 \text{ uniformemente per } 0 < x \leq a < 1.$$

La G_{ε} risulta continua per $0 \leq x \leq 1$, $0 < t$ e può essere prolungata con continuità per $t \rightarrow 0$, eccettuato nell'origine, come risulta dalla (20).

Per la (15) e la (20) si ha:

$$(21) \quad G_{\varepsilon}(0, 0, t) = 0 \text{ per } t > 0; \quad G_{\varepsilon}(1, 0, t) = 0 \text{ per } t \geq 0;$$

$$(22) \quad G_{\varepsilon}(x, 0, t) \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0, x \neq 0;$$

per la (20) e la (21) e per il già citato teorema di NIRENBERG, si ottiene:

$$(23) \quad G_{\varepsilon}(x, 0, t) > 0 \quad \text{per } 0 < x < 1, t > 0.$$

Dalla seconda delle (21) e dall'uniforme continuità della $G_\xi(x, 0, t - \tau)$ in $\frac{1}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq \tau \leq t$, si ha:

$$(24) \quad \max_{0 \leq \tau \leq t} G_\xi(x, 0, t - \tau) \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 1.$$

Proviamo inoltre che

$$(25) \quad \max_{0 \leq \tau \leq t} G_\xi(x, 0, t - \tau) \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Infatti dalla (14) si ha:

$$G_\xi(x, 0, x^2) = x^{-1} e^{-\frac{1}{4}} + x^{-3} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2n)^2}{4x^2}} (x + 2n);$$

e per $x \rightarrow 0$ il primo termine del secondo membro tende a $+\infty$.

Notiamo infine che dalla (12) segue:

$$(26) \quad G_\xi(x, \xi, t) = \frac{1}{2} G_\xi(x - \xi, 0, t) + \frac{1}{2} G_\xi(x + \xi, 0, t) \text{ per } \xi < x; \xi < 1 - x,$$

$$(27) \quad G_\xi(x, \xi, t) = \frac{1}{2} G_\xi(x - \xi + 1, 1, t) + \frac{1}{2} G_\xi(x + \xi - 1, 1, t) \text{ per } \xi > x; \xi > 1 - x.$$

Prima di procedere alla dimostrazione del teorema di PINI-HADAMARD notiamo anche la seguente semplice relazione:

Siano $V(s)$ e $W(s)$ due funzioni continue non negative nello intervallo chiuso $(0, L)$ e sia Φ la classe delle funzioni φ sommabili e non negative in $(0, L)$ tali che

$$\int_0^L W(s) \varphi(s) ds \neq 0.$$

Si ha:

$$(28) \quad \inf_{\varphi \in \Phi} \frac{\int_0^L V(s) \varphi(s) ds}{\int_0^L W(s) \varphi(s) ds} = \inf_{0 \leq s \leq L} \frac{V(s)}{W(s)}$$

Infatti, indicati con m^* ed m rispettivamente il primo e secondo membro della (28) è

$$\frac{\int_0^L V(s)\varphi(s)ds}{\int_0^L W(s)\varphi(s)ds} \geq m,$$

da cui risulta $m^* \geq m$. Basta ora provare che $m^* \leq m$. La funzione $\frac{V}{W}$ è continua nell'insieme aperto E ottenuto da $(0, L)$ privandolo degli zeri di W , ed in E tale rapporto ha estremo inferiore m . Fissato quindi un ε positivo arbitrario esiste un intervallo (α, β) in E dove $\frac{V}{W} < m + \varepsilon$.

Indicata con φ_ε la funzione della classe Φ che vale 1 in (α, β) e 0 al di fuori, risulta

$$m^* < \frac{\int_0^L V(s)\varphi_\varepsilon(s)ds}{\int_0^L W(s)\varphi_\varepsilon(s)ds} = \frac{\int_\alpha^\beta V(s)ds}{\int_\alpha^\beta W(s)ds} < m + \varepsilon.$$

La (28) risulta quindi provata, data l'arbitrarietà di ε .

2. Una disuguaglianza per le soluzioni positive della equazione del calore.

Proviamo ora i risultati enunciati nella introduzione. La funzione

$$(29) \quad W_1 = \frac{G(x_2, \xi, t_2)}{G(x_1, \xi, t_1)}$$

è per la (11), continua e positiva per $0 < \xi < 1$, $0 < t_1 < t_2$ ed x_1, x_2 interni a $(0, 1)$.

Si ha dalla (9)

$$(30) \quad \frac{G(x_2, \xi, t_2)}{G(x_1, \xi, t_1)} = \frac{G_{\bar{\xi}}(x_2, \bar{\xi}, t_2)}{G_{\bar{\xi}}(x_1, \bar{\xi}, t_1)}$$

con $\bar{\xi}$ fissato opportunamente in $(0, \xi)$; essendo il secondo membro, in base alla (26), continuo per $0 \leq \bar{\xi} \leq 1 - x_1$, $0 < x_1$, $x_2 < 1$, $0 < t_1 < t_2$, risulta uniformemente

$$(31) \quad \lim_{\bar{\xi} \rightarrow 0} W_1 = \frac{G_{\bar{\xi}}(x_2, 0, t_2)}{G_{\bar{\xi}}(x_1, 0, t_1)},$$

$$(32) \quad \lim_{\bar{\xi} \rightarrow 1} W_1 = \frac{G_{\bar{\xi}}(x_2, 1, t_2)}{G_{\bar{\xi}}(x_1, 1, t_1)}.$$

Quindi, per la (23), W_1 è continua e positiva per $0 \leq \bar{\xi} \leq 1$, $0 < x_1$, $x_2 < 1$, $0 < t_1 < t_2$. Posto

$$(33) \quad m_1 = \min_{0 \leq \bar{\xi} \leq 1} W_1,$$

m_1 risulta positiva e continua rispetto a x_1 , x_2 , t_1 , t_2 per $0 < x_1$, $x_2 < 1$, $0 < t_1 < t_2$.

La funzione

$$(34) \quad W_2 = \frac{G_{\bar{\xi}}(x_2, 0, t_2 - \vartheta)}{G_{\bar{\xi}}(x_1, 0, t_1 - \vartheta)},$$

è per la (23) continua e positiva per $0 < x_1$, $x_2 < 1$, $0 < \vartheta < t_1$. Si ha dalla (22):

$$(35) \quad \lim_{\vartheta \rightarrow t_1} W_2 = +\infty,$$

e quindi, posto

$$(36) \quad m_2 = \min_{0 \leq \vartheta \leq t_1} W_2,$$

m_2 è positiva e continua rispetto a x_1 , x_2 , t_1 , t_2 per $0 < x_1$, $x_2 < 1$, $0 < t_1 < t_2$.

Analogamente si prova che posto

$$(37) \quad W_3 = \frac{G_{\bar{\xi}}(x_2, 1, t_2 - \theta)}{G_{\bar{\xi}}(x_1, 1, t_1 - \theta)},$$

e

$$(38) \quad m_3 = \min_{0 \leq t \leq t_1} W_3,$$

m_3 risulta positiva e continua rispetto a x_1, x_2, t_1, t_2 per $0 < x_1, x_2 < 1, 0 < t_1 < t_2$.

Indicata con Γ la classe delle funzioni continue positive in $\bar{R}_{t_2}$ soluzioni della (1) in R_{t_2} poniamo

$$(39) \quad K = \inf_{u \in \Gamma} \frac{u(x_2, t_2)}{u(x_1, t_1)}.$$

Per la (28) provata nel n. 1, considerata la soluzione della (1) data dalla (6), risulta:

$$(40) \quad K = \min(m_1, m_2, m_3);$$

e pertanto K è positiva e continua rispetto a x_1, x_2, t_1, t_2 per $0 < x_1, x_2 < 1$ e $0 < t_1 < t_2$.

È stata così provata la (2) per soluzioni positive della equazione del calore in R_{t_2} , continue in R_{t_2} . Questa ultima restrizione può essere facilmente rimossa. Sia infatti u una soluzione positiva dell'equazione del calore in R_{t_2} .

Fissato un numero positivo ε consideriamo il rettangolo

$$R_{t_2}^{(\varepsilon)} = \{(x, t); \varepsilon < x < 1 - \varepsilon; \varepsilon < t_1 < t_2\};$$

supponiamo ε tale che (x_1, t_1) ed (x_2, t_2) appartengano ad $R_{t_2}^{(\varepsilon)}$.

Mediante un opportuno cambiamento di variabili, corrispondente ad una traslazione ed una dilatazione, il rettangolo $R_{t_2}^{(\varepsilon)}$ viene trasformato in un rettangolo R_{τ_ε} ed u in una funzione v soluzione positiva della equazione del calore in R_{τ_ε} continua in $\bar{R}_{\tau_\varepsilon}$. Indicati con $(x_{1,\varepsilon}, t_{1,\varepsilon})$ e $(x_{2,\varepsilon}, \tau_\varepsilon)$ i punti corrispondenti a (x_1, t_1) e (x_2, t_2) si ha

$$\frac{u(x_2, t_2)}{u(x_1, t_1)} = \frac{v(x_{2,\varepsilon}, \tau_\varepsilon)}{v(x_{1,\varepsilon}, t_{1,\varepsilon})} \geq K(x_{1,\varepsilon}, t_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon}, \tau_\varepsilon).$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$, $(x_{1,\varepsilon}, t_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon}, \tau_\varepsilon)$ tende a (x_1, t_1, x_2, t_2) e quindi per la continuità di K il teorema è provato nella sua generalità.

Notiamo infine l'espressione delle funzioni u per le quali vale il segno di uguaglianza nella (2). Per x_1, t_1, x_2, t_2 fissati, l'espressione di K è data dalla (40) e dalle (33), (36) e (38). Se $K = m_1$, vi è uno $\bar{\xi}$ tale che per $\xi = \bar{\xi}$ è $W_1 = m_1$; in tal caso $G(x, \bar{\xi}, t)$ è una soluzione non negativa della equazione del calore in R_{t_2} , per la quale nella (2) si verifica l'uguaglianza. Se invece $K = m_2$, vi è un $\bar{z}$ tale che per $z = \bar{z}$ è $W_2 = m_2$; in tal caso la $G_{\bar{\xi}}(x, 0, t - \bar{z})$ è una soluzione non negativa della equazione del calore per la quale nella (2) vale l'uguaglianza.

Analogamente, se $K = m_3$, la funzione estremante è data da $G_{\bar{\xi}}(x, 1, t - \bar{z})$ se $\bar{z}$ è il punto per cui $W_3 = m_3$.

Indichiamo con $P(x_1, t_1, x_2, t_2)$ il punto di coordinate $(\bar{\xi}, 0)$ se $K = m_1$, $(0, \bar{z})$ se $K = m_2$, $(1, \bar{z})$ se $K = m_3$ e diciamo questo punto *polo*, relativo ai punti $Q_1 = (x_1, t_1)$, $Q_2 = (x_2, t_2)$. Esso non è necessariamente determinato in modo univoco. Si osserva che la funzione estremante il rapporto $\frac{u(x_2, t_2)}{u(x_1, t_1)}$ è una soluzione dell'equazione del calore che ha come traccia su $\bar{R}_{t_2} - R_{t_2}$ una funzione di DIRAC di polo P .

Fissati Q_1 e Q_2 , servendosi dei risultati di GROSS [1] si potrebbe provare che esiste al più un polo su ciascuno dei segmenti $(t=0, 0 \leq x \leq 1)$, $(0 \leq t \leq t_2, x=0)$, $(0 \leq t \leq t_2, x=1)$; potendo esservene uno su ciascuno dei tre segmenti. Lo studio delle posizioni dei poli al variare di Q_1 e Q_2 potrebbe essere interessante anche per il significato fisico del problema e renderebbe opportuna una apposita analisi qualitativa e quantitativa.

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. GROSS, *Formula di Taylor e linee di livello per le soluzioni della equazione del calore*, «Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei», serie VIII vol. 32 (1952), pagg. 477-484.
- [2] J. HADAMARD, *Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» (2), 3, (1954).
- [3] L. NIRENBERG, *A strong maximum principle for parabolic equations*, «Communications on pure and applied mathematics», vol. 6, 1953, pagg. 167-177.
- [4] B. PINI, *Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova», 23, 422-434 (1954).