Bollettino Unione Matematica Italiana

Fabio Manaresi

Sulle equazioni differenziali lineari paraboliche del secondo ordine.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.1, p. 16–26.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_1_16_0>

Sulle equazioni differenziali lineari paraboliche del secondo ordine

Nota di FABIO MANARESI (a Bologna) (*) (**)

Sunto. - *Ricerca di una soluzione fondamentale per una equazione differenziale lineare parabolica del secondo ordine.*

1. Introduzione. – In una recente memoria di G. FICHERA (¹) vengono precisate le nozioni di *problemi al contorno «ben posti»* per un'equazione differenziale lineare parabolica del secondo ordine nella sua forma più generale

$$(1) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{1}^{n}{}_{h}\, b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu = f \qquad (a_{hk} = a_{kh}).$$

dove a_{hk}, b_h, c, f sono funzioni reali definite in un dominio rego lare dello spazio cartesiano S_n. Inoltre per tali problemi si stabi liscono teoremi di unicità e, limitatamente al caso di *soluzion deboli*, teoremi di esistenza.

D'altra parte, per quanto mi è noto, lo studio di una *soluzion fondamentale* (²) e delle *soluzioni forti* di dati problemi al contorn si è limitato esclusivamente ad equazioni paraboliche che, ne caso del secondo ordine, rientrano nel tipo

$$(2) \qquad \sum_{1}^{n-1}{}_{hk}\, a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{1}^{n-1}{}_{h}\, b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu - \frac{\partial u}{\partial x_n} = f \qquad (a_{hk} = a_{kh}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. l'11 novembre 1963.

(**) Lavoro eseguito nel Gruppo di Ricerca n. 2 (anno 1962-63).

(¹) G. FICHERA, *Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-parabolicl del secondo ordine*, «Atti Acc. Naz. Lincei», serie VIII, vol. V (1956).

(²) Cfr., ad esempio, G. GIRAUD, *Sur certaines opérations aux dérivé partielles du type parabolique*, «C. R. de L'Académie des Sciences», t. 19 Paris (1932), pp. 98-100; F. G. DRESSEL, *The fundamental solution of tl parabolic equation*, «Duke Math. Journal», vol. 13 (1946), pp. 61-7(W. POGORZELSKI, *Étude de la solution fondamentale de l'équation par bolique*, «Ricerche di Matematica», vol. V (1956), pp. 25-57.

con la parte dell'operatore, che non contiene derivate rispetto a x_n, ellittica in ogni punto del dominio di definizione dei coefficienti.

Il presente lavoro costituisce un primo passo per la ricerca di una soluzione fondamentale per un'equazione parabolica, che rientra nel tipo (1), ma non nel tipo (2): si trova dapprima una soluzione fondamentale di un'equazione a coefficienti costanti (n. 2 e n. 3) e infine (n. 4) si studia la singolarità di una *quasi-soluzione* dell'equazione del medesimo tipo avente per coefficienti delle funzioni assegnate.

2. Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\sum_{1}^{n}{}_{hk}\, a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{1}^{n}{}_{h}\, b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} = 0 \qquad (n \geq 2,\ a_{hk} = a_{kh}); \tag{3}$$

dove i coefficienti a_{hk} e b_h sono costanti e tali che:

a) la forma quadratica

$$\sum_{1}^{n}{}_{hk}\, a_{hk} X_h X_k \tag{4}$$

sia semidefinita positiva di caratteristica $n - 1$;

b) risulti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 \ldots b_n \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} < 0. \tag{5}$$

Si noti che, giusta l'ipotesi *a*), il primo membro della (5) rappresenta una forma quadratica nelle b_h semidefinita negativa di caratteristica 1, giacchè il suo discriminante è formato dagli opposti degli aggiunti degli elementi a_{hk} nel discriminante A della (4).

Si consideri, nel semispazio $\overset{n}{\underset{1}{\Sigma_i}}\lambda_i x_i > 0$, una funzione del tipo

$$(6) \qquad u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\overset{n}{\underset{1}{\Sigma_i}}\lambda_i x_i\right)^{-\frac{n-1}{2}} \exp \frac{\overset{n}{\underset{1}{\Sigma_{ij}}} c_{ij} x_i x_j}{\overset{n}{\underset{1}{\Sigma_i}}\lambda_i x_i},$$

dove le λ_i si assumono proporzionali ai coseni direttori della normale alla giacitura caratteristica della (3), talchè dovrà essere

$$(7) \qquad \overset{n}{\underset{1}{\Sigma_k}} a_{ik}\lambda_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Alle (7) si soddisfa, ad esempio, ponendo λ_k uguale al complemento algebrico B_k di b_k in Δ, sicchè le ∞^1 soluzioni del sistema (7) sono date da

$$(8) \qquad \lambda_k = \gamma B_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

con γ costante arbitraria (che si assumerà diversa da zero affinchè le λ_k non siano tutte nulle).

Se si vuole che la (6) sia una soluzione della (3), le costanti c_{ij} devono rendere soddisfatte le seguenti condizioni

$$(9) \qquad \begin{cases} 4\overset{n}{\underset{1}{\Sigma_{hk}}} a_{hk}c_{hk} = (n-1)\overset{n}{\underset{1}{\Sigma_k}} b_k\lambda_k, \\ 4\overset{n}{\underset{1}{\Sigma_{hk}}} a_{hk}c_{jh}c_{ik} = c_{ij}\overset{n}{\underset{1}{\Sigma_k}} b_k\lambda_k - 2\lambda_i \overset{n}{\underset{1}{\Sigma_k}} b_k c_{ik}. \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

In virtù della (8) la prima delle (9) diviene

$$(10) \qquad 4\overset{n}{\underset{1}{\Sigma_{hk}}} a_{hk}c_{hk} = (n-1)\gamma\Delta = (n-1)\gamma\overset{n}{\underset{1}{\Sigma_k}} b_k B_k,$$

dove $(n-1)B_k$ si può considerare come la somma degli $n-1$ sviluppi di B_k secondo gli elementi di ciascuna delle sue $n-1$ linee formate con le a_{hk}. Uguagliando poi nella (10) i coefficienti di a_{hk} $(h, k = 1, 2, ..., n)$ al primo e all'ultimo membro, posto nella forma suddetta, si trae

$$c_{hk} = \frac{\gamma}{4} A_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, ..., n),$$

dove A_{hk} è il complemento algebrico di a_{hk} in Δ.

Si verifica agevolmente che le c_{hk}, così definite, soddisfano alle condizioni

$$\sum_{1}^{n}{}_k\, b_k c_{ik} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

$$4 \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, a_{hk} c_{jh} c_{ik} = c_{ij} \sum_{1}^{n}{}_k\, b_k \lambda_k \qquad (i, j = 1, 2, ..., n),$$

e quindi anche alle altre equazioni (9).

Pertanto si può scrivere

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij}\, c_{ij} x_i x_j = -\frac{\gamma}{4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & x_1 & x_2 \dots x_n \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \dots b_n \\ x_1 & b_1 & a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ x_2 & b_2 & a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & b_n & a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\sum_{1}^{n}{}_i\, \lambda_i x_i = \gamma \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \dots x_n \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ne consegue che, a meno di un fattore costante, la soluzione del tipo (6) della (3) è espressa da

$$(11)\qquad u(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \dots x_n \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{4} \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & x_1 & x_2 \dots x_n \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \dots b_n \\ x_1 & b_1 & a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ x_2 & b_2 & a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & b_n & a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \dots x_n \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}} \right\}.$$

In secondo luogo si prova che la forma quadratica nelle x_1, $x_2, \dots, x_n$

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & x_1 & x_2 \dots x_n \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \dots b_n \\ x_1 & b_1 & a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ x_2 & b_2 & a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & b_n & a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{1}^{n}{}_{hk} \gamma_{hk} x_h x_k, \quad \gamma_{hk} = -\frac{4}{\gamma} c_{hk} = -A_{hk}.$$

è semidefinita positiva di caratteristica $n-1$.

Infatti, il discriminante Γ della (12) è formato dagli opposti degli aggiunti degli elementi a_{hk} in Δ, sicchè, indicato con $D^{h_1, h_2, \dots, h_p}_{k_1, k_2, \dots, k_p}$ il minore di ordine p formato con gli elementi comuni alle righe h_1-esima, h_2-esima, ..., h_p-esima ed alle colonne k_1-esima, k_2-esima

.., k_p-esima di un determinante D, si trova facilmente $\Gamma = 0$ e

$$\Gamma^{k_1, k_2, \dots, k_p}_{k_1, k_2, \dots, k_p} = \tag{13}$$

$$= (-1)^p \Delta^{p-1} \begin{vmatrix} 0 & b_{\nu_1} & b_{\nu_2} & \dots b_{\nu_{n-p}} \\ b_{\nu_1} & a_{\nu_1\nu_1} & a_{\nu_1\nu_2} & \dots a_{\nu_1\nu_{n-p}} \\ b_{\nu_2} & a_{\nu_2\nu_1} & a_{\nu_2\nu_2} & \dots a_{\nu_2\nu_{n-p}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\nu_{n-p}} & a_{\nu_{n-p}\nu_1} & a_{\nu_{n-p}\nu_2} & \dots a_{\nu_{n-p}\nu_{n-p}} \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-p} \neq \\ \neq k_1, k_2, \dots, k_p, \end{pmatrix} \quad (p = 1, 2, \dots, n-1).$$

Giusta la condizione $a)$, supposto, ad esempio, che sia $A^{1, 2, \dots, p}_{1, 2, \dots, p} > 0$ $(p = 1, 2, \dots, n-1)$, l' ultimo determinante al secondo membro della (13) è una forma quadratica nelle $b_{\nu_1}, b_{\nu_2}, \dots, b_{\nu_{n-p}}$ definita negativa per $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-p}$ diversi da n.

Ne discende che, essendo in base alla (5) $\sum_1^n {}_h\, b_h^2 > 0$, se risulta $\sum_1^{n-1} {}_h\, b_h^2 > 0$, si ha

$$\Gamma^{k_1k_2\dots k_{n-1}}_{k_1k_2\dots k_{n-1}} > 0, \quad \Gamma^{k_2k_3\dots k_{n-1}}_{k_2k_3\dots k_{n-1}} > 0, \quad \dots, \quad \Gamma^{k_{n-2}k_{n-1}}_{k_{n-2}k_{n-1}} > 0, \quad \Gamma^{k_{n-1}}_{k_{n-1}} > 0,$$

con $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ diversi da h, talchè saranno positivi anche tutti i minori principali degli ordini $1, 2, \dots, n-2$ di $\Gamma^{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}}_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}}$, mentre, se riesce $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 0$. $b_n \neq 0$, allora si ha

$$\Gamma^{1, 2, \dots, n-1}_{1, 2, \dots, n-1} > 0, \quad \Gamma^{2, 3, \dots, n-1}_{2, 3, \dots, n-1} > 0, \quad \dots, \quad \Gamma^{n-2, n-1}_{n-2, n-1} > 0, \quad \Gamma^{n-1}_{n-1} > 0$$

e quindi saranno positivi anche tutti i minori principali degli ordini $1, 2, \dots, n-2$ di $\Gamma^{1, 2, \dots, n-1}_{1, 2, \dots, n-1}$.

3. Ammesso, per fissare le idee, che sia $A^{1, 2, \dots, p}_{1, 2, \dots, p} > 0$ $(p = 1, 2, \dots, n-1)$, si dimostra che è possibile trovare una sostituzione lineare propria

$$y_h = \sum_1^n {}_k\, \beta_{hk} x_k \qquad (h = 1, 2, \dots, n) \tag{14}$$

che ad un tempo muta la (3) nella forma canonica

$$\sum_{1}^{n-1}{}_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} - \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0 \tag{15}$$

e la (11), a meno di un fattore costante, nella forma

$$u(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_n^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{4} \frac{\sum_{1}^{n-1}{}_h y_h^2}{y_n} \right\}. \tag{16}$$

Infatti, la trasformata della (3) mediante la (14) è

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} \left(\sum_{1}^{n}{}_{hk} a_{hk} \beta_{ih} \beta_{jk} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{1}^{n}{}_i \left(\sum_{1}^{n}{}_k b_k \beta_{ik} \right) \frac{\partial u}{\partial y_i} = 0.$$

Affinchè questa coincida con la (15) i coefficienti della (14) devono soddisfare al sistema

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{1}^{n}{}_{hk} a_{hk} \beta_{ih} \beta_{jk} = \begin{cases} 1 & i = j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 0 & i < j = 2, 3, \ldots, n \\ 0 & i = j = n \end{cases} \\ & \sum_{1}^{n}{}_k b_k \beta_{ik} = \begin{cases} 0 & i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ -1 & i = n, \end{cases} \end{aligned} \right. \tag{17}$$

che equivale alla coppia di sistemi

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{1}^{n}{}_{hk} a_{hk} \beta_{ih} \beta_{jk} = \begin{cases} 1 & i = j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 0 & i < j = 2, 3, \ldots, n-1 \end{cases} \\ & \sum_{1}^{n}{}_k b_k \beta_{ik} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \right. \tag{18}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{1}^{n}{}_{hk} a_{hk} \beta_{ih} \beta_{nk} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ & \sum_{1}^{n}{}_k b_k \beta_{nk} = -1. \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Quest' ultimo, a sua volta, riesce equivalente a

$$(20)\qquad \begin{cases} \sum_{1}^{n} {}_k\, a_{hk}\beta_{nk} = 0 \qquad h = 1, 2, \dots, n \\[2ex] \sum_{1}^{n} {}_k\, b_k \beta_{nk} = -1. \end{cases}$$

Alle prime n equazioni del sistema (20) si soddisfa, in base alle (7) e (8), ponendo

$$\beta_{nk} = \lambda_k = \gamma B_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

che, sostituite nell' ultima equazione, forniscono $\gamma = -\frac{1}{\Delta}$ e quindi

$$y_n = -\frac{1}{\Delta}\sum_{1}^{n} {}_k\, B_k x_k = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \dots x_n \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

In secondo luogo si supponga, ad esempio, che sia

$$b_n \neq 0, \qquad \Gamma^{1, 2, \dots, p}_{1, 2, \dots, p} > 0 \qquad (p = 1, 2, \dots, n-1)$$

e si consideri la sostituzione lineare propria

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\sum_{1}^{n} {}_i\, \Gamma^1_i x_i}{\sqrt{\Gamma^1_1}} \\[3ex] y_k = \dfrac{\sum_{k}^{n} {}_i\, \Gamma^{1, 2, \dots, k-1, k}_{1, 2, \dots, k-1, i}\, x_i}{\sqrt{\Gamma^{1, 2, \dots, k-1}_{1, 2, \dots, k-1}}\sqrt{\Gamma^{1, 2, \dots, k}_{1, 2, \dots, k}}} \qquad k = 2, 3, \dots, n-1 \\[3ex] y_n = x_n \end{cases}$$

che muta la forma quadratica (11) nel tipo canonico $\sum_{1}^{n-1} {}_k\, y_k^2$.

La sostituzione lineare (14) del tipo voluto, posto per omogeneità di scrittura $\Gamma_0^0 = 1$, è allora

$$\left\{\begin{aligned} y_k &= \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \frac{\sum_{i\,k}^{n} \Gamma^{1,\,2,\,\dots,\,k-1,\,k}_{1,\,2,\,\dots,\,k-1,\,i}\, x_i}{\sqrt{\Gamma^{1,\,2,\,\dots,\,k-1}_{1,\,2,\,\dots,\,k-1}}\sqrt{\Gamma^{1,\,2,\,\dots,\,k}_{1,\,2,\,\dots,\,k}}} \qquad k = 1,\, 2, \dots,\, n-1 \\ y_n &= -\frac{1}{\Delta} \sum_{k\,1}^{n} B_k x_k . \end{aligned}\right.$$

Invero, il suo modulo è $(-1)^{n-1} b_n\, |\Delta|^{\frac{n-1}{2}} \neq 0$, i coefficienti dell'ultima equazione soddisfano al sistema (20) e si verifica facilmente che i coefficienti delle prime $n-1$ equazioni rendono soddisfatto il sistema (18).

Da quanto precede risulta che la funzione $U(x_1, x_2, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ definita da

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} 0 & x_1 - \xi_1 & x_2 - \xi_2 \dots x_n - \xi_n \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \;\dots\; a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \;\dots\; a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} \;\dots\; a_{nn} \end{vmatrix}^{-\frac{n-1}{2}}$$

$$\cdot \exp\left\{ -\frac{1}{4} \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & x_1 - \xi_1 & x_2 - \xi_2 \dots x_n - \xi_n \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \;\dots\; b_n \\ x_1 - \xi_2 & b_1 & a_{11} & a_{12} \;\dots\; a_{1n} \\ x_2 - \xi_2 & b_2 & a_{21} & a_{22} \;\dots\; a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - \xi_n & b_n & a_{n1} & a_{n2} \;\dots\; a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & x_1 - \xi_1 & x_2 - \xi_2 \dots x_n - \xi_n \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \;\dots\; a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \;\dots\; a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} \;\dots\; a_{nn} \end{vmatrix}} \right\}$$

se il primo determinante che figura nella (21) è positivo, e dallo zero se tale determinante è negativo o nullo, costituisce una *soluzione fondamentale* della (3).

4. Se i coefficienti della (3) sono funzioni continue di x_1, x_2, ..., x_n in un dominio S dello S_n e tali da rendere ivi soddisfatte le condizioni a) e b) (n. 2), allora la $U(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, con le a_{hk} e b_h funzioni di $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in S$ si dice una *quasi-soluzione* della (3).

In ogni caso i determinanti, che figurano al numeratore ed al denominatore dell'esponente nella (21), si annullano contemporaneamente solo per $x_k = \xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Infatti, l'annullarsi del determinante al denominatore implica che la prima riga debba essere una combinazione lineare delle rimanenti, poichè queste risultano linearmente indipendenti in virtù della (5), cioè riesce

$$\sum_1^n{}_h \mu_h b_h = 0$$

$$\sum_1^n{}_h \mu_h a_{hk} = x_k - \xi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

dove le μ_h sono costanti o funzioni di ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n secondochè tali si suppongono le a_{hk} e b_h.

Ne consegue, ove si aggiungano alla prima le ultime n righe moltiplicate per $-\mu_1$, $-\mu_2$, ..., $-\mu_n$ rispettivamente,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x_1 - \xi_1 & x_2 - \xi_2 & \ldots & x_n - \xi_n \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ x_1 - \xi_1 & b_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ x_2 \quad \xi_2 & b_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n - \xi_n & b_n & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\Delta \sum_1^n{}_k \mu_k (x_k - \xi_k),$$

sicchè l'annullarsi di questo determinante implica

$$\sum_1^n{}_k \mu_k (x_k - \xi_k) = 0. \tag{23}$$

Moltiplicando primo e secondo membro della (22) per μ_k indi sommando per k da 1 a n, si ricava, giusta la (23),

$$\sum_{1}^{n}{}_{hk}\, a_{hk}\mu_h\mu_k = \sum_{1}^{n}{}_{k}\, \mu_k(x_k - \xi_k) = 0. \tag{24}$$

Poichè la forma quadratica nelle μ_k al primo membro della (24) è semidefinita positiva di caratteristica $n-1$ in base all'ipotesi a) (n. 2), la (24) equivale a

$$\sum_{1}^{n}{}_{h}\, a_{hk}\mu_h = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

da cui, per la (22), si trae, come volevasi,

$$x_k - \xi_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$