Claire Bareau

Quelques transormations géometriques.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.4, p. 446–453.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_4_446_0>

Quelques transformations géométriques (*)

Nota di CLAIRE BAREAU (a Bruxelles) (**)

Sunto. - *Si mostra come la nozione di trasformazione geometrica si possa introdurre nella Scuola secondaria.*

L'exposé qui va suivre est le compte rendu d'une expérience poursuivie à l'Ecole Decroly pendant ces dernières années avec mes élèves qui ont actuellement 17 ans. Mon but est de vous montrer comment la notion de transformation peut être introduite petit à petit, précisée, étudiée de façon de plus en plus profonde.

Il est important de souligner qu'à l'Ecole Decroly :

1) les élèves (même de 16 ans) sont constamment actifs et que c'est dans l'activité que se développe leur intérêt et leur connaissance,

2) que l'enseignement de la mathématique forme un tout, non subdivisé, et lié aux autres activités.

I. - Transformations dans le vie et à l'Ecole.

L'enfant rencontre, observe, effectue et utilise des transformations.

a) *Dans la vie de tous les jours.*

Il bouge, il déplace des objets: déplacements.

Il grandit: similitude.

Il gonfle un ballon: transformation par similitude.

Il fait des bulles de savon: transformation d'une portion de plan en sphère; la bulle est emportée par le vent: déformation.

Il se regarde dans un miroir: symétrie, similitude, déformation.

Il utilise une loupe, un appareil photographique, un microscope; il va au cinéma: similitudes.

(*) Conferenza tenuta all'Istituto di Geometria dell'Università di Bologna il 22 ottobre 1962.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 6 novembre 1963.

Il observe l'ombre au soleil, l'ombre projetée d'une lampe : affinité, projectivité.

Il observe ses mains : isométrie.

Il va s'acheter une paire de chaussures : similitude des paires de différentes tailles, d'une chaussure droite et d'une chaussure gauche de tailles différentes. isométrie des chaussures d'une même paire...

Il dessine, fait des maquettes : nouvelles similitudes.

Il utilise des transformations sur les nombres : conversion de francs en lires, calcul d'un prix, dimensions d'une maquette.

b) *A l'école.*

Dès l'école primaire, l'enfant fait des représentations à l'échelle.

Plus tard, il étudie le thermomètre, les différentes échelles thermométriques et apprend à passer de l'une à l'autre : il fait donc des translations, des homothéties sur la droite, des transformations sur les nombres.

Il étudie la dilatation des corps solides, il y a similitude ; la réflexion sur des miroirs sphériques, et la position de l'image par rapport à l'objet, sur l'axe focal, il obtient sur cette droite une homographie, une inversion (et en même temps, les transformations correspondantes sur les nombres).

En géographie, il rencontre et utilise les différentes représentations planes de la terre (notamment la projection stéréographique) et se rend compte que l'une ou l'autre est intéressante, suivant le point de vue auquel on se place, par les propriétés qu'elle conserve ou non.

Il fait des épures : représentation plane d'objets de l'espace.

Il représente les résultats d'une expérience : graphique.

Si je me suis attardée à ces exemples de tous les jours, c'est pour vous montrer que la notion de transformation peut être dégagée progressivement (bien avant l'année où elle figure au programme). Si elle est présente à l'esprit du professeur, celui-ci a la possibilité, avec de très jeunes enfants déjà, de faire pas mal d'observations et de constatations qui se préciseront et prépareront l'étude des transfosmations.

II. - L'élève effectue des transformations.

L'élève effectue des transformations :

— en se servant de l'ombre solaire, de l'ombre conique ;

— en réalisant des projections concrètes de figures planes, simples (à l'aide de fils).

— par photographie ;

— par dessin ou construction spatiale, en se donnant une loi de transformation (homothétie, inversion, loi inventée) ;

— par quadrillage (Je donnerai quelques détails sur ce dernier mode de transformations.)

Les élèves apprennent à représenter la variation de phénomènes divers par des graphiques. Par exemple : dès l'école primaire, variation de la température, longueur du jour et de la nuit ; plus tard, compte rendu d'une expérience physique (dilatation linéaire, chute des corps).

Les graphiques obtenus par les différents élèves ne sont pas égaux, ni même semblables, car ils ont été faits, en général, à partir d'unités différentes ; ces graphiques sont affinement équivalents.

Les élèves étudient une fonction, la représentent graphiquement dans divers systèmes de coordonnées (rectangulaires, obliques, polaires, bipolaires) ; les courbes obtenues sont très différentes et peuvent être considérées comme transformées les unes des autres. Ils inventent de nouveaux systèmes de coordonnèes, d'où de nouvelles transformations, qui peuvent être plus ou moins intéressantes du point de vue mathématique.

Nous obtenons, en réalité, des transformations par quadrillages.

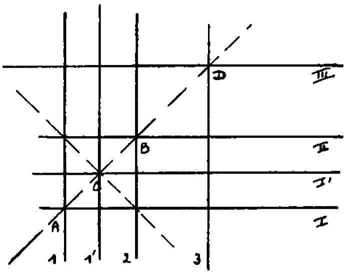
Nous appelerons « quadrillage » toute transformation métrique, affine, projective ou conforme d'un quadrillage euclidien (si nous appelons quadrillage, 2 familles de courbes qui balayent le plan, un point du plan se trouve alors sur une courbe de chaque famille).

Au lieu de considérer les transformations d'une courbe (représentative d'une fonction) il est amusant, une fois la correspondance ou la loi de transformation établies, de considérer les transformées de dessins ; ceci n'est pas uniquement un jeu; pour s'en convaincre il suffit de penser aux différents réseaux géographiques (on peut passer de l'un à l'autre par transformation par quadrillage).

De cette manière, nous obtenons les transformations les plus diverses : parfois la transformation est biunivoque ; d'autres fois, pour une même transformation, certains points auront 2, 1 ou pas de transformé ... certaines transformations feront toujours correspondre une droite à une droite ; d'autres lui feront correspondre une droite, un cercle, une courbe, deux droites etc. d'où une première classification des transformations obtenues.

Au point de vue mathématique, toutes ces transformations n'ont, certes, pas la même importance.

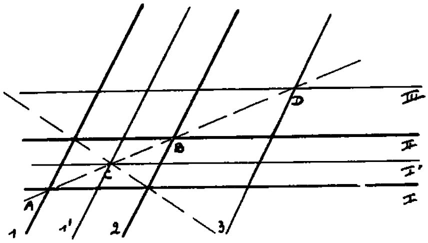
Les dessins suivants montrent le passage d'un quadrillage euclidien aux quadrillages affin, projectif, conforme ; et la façon d'étendre et de resserrer ces quadrillages.



Métrique

$AC = CB$

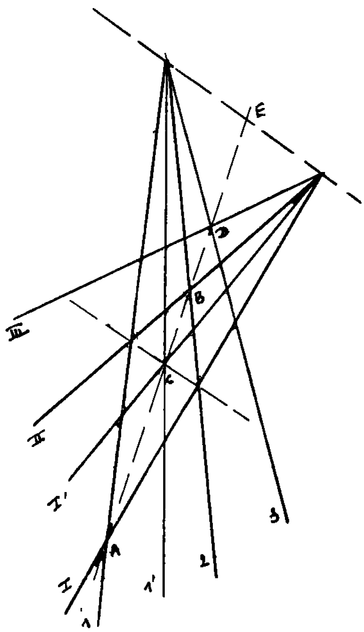
$AB = BD$



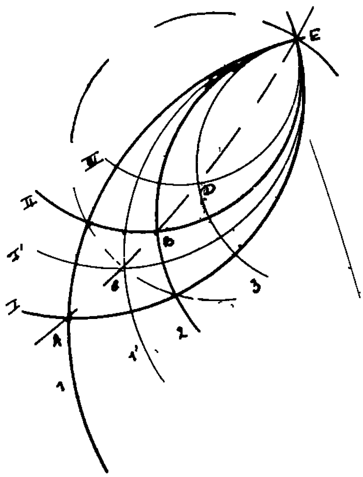
Affin

Projectif $(ABCE) = -1$

$(ADBE) = -1$



Conforme



III. - L'élève classe les transformations.

Ayant réalisé (par différentes techniques) et observé de nombreuses transformations, l'élève essaye de les classer : dans toutes les transformations, les figures perdent certaines de leurs propriétés, en conservent d'autres. Quelles sont les transformations rencontrées qui laissent aux figures les mêmes propriétés, qui leur font perdre les mêmes propriétés ?

C'est ainsi que les élèves ont été amenés, petit à petit, à prendre conscience des transformations et propriétés métriques, affines, projectives, conformes, par ombres, projections, photographies, quadrillages.

Les propriétés affines sont celles qui sont conservées par ombre au soleil, passage d'un quadrillage euclidien à un quadrillage affin, projection cylindrique.

Les propriétés projectives sont celles qui sont conservées par ombre ou projection conique, passage d'un quadrillage euclidien à un quadrillage projectif, par photographie sur plans non-parallèles.

Les propriétés conformes sont celles qui sont conservées par inversion, passage d'un quadrillage euclidien à un quadrillage conforme, par projection stéréographique.

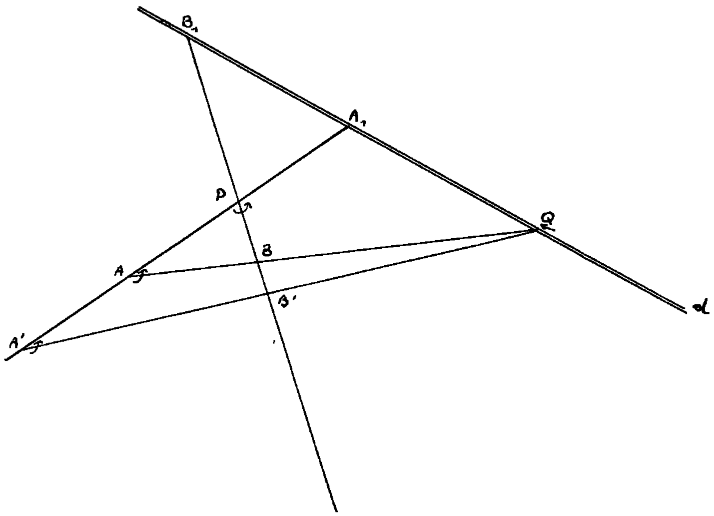
Les propriétés métriques euclidiennes sont celles qui ne sont conservées que par similitude (passage d'un quadrillage euclidien à un autre quadrillage euclidien, photographie sur plans parallèles, projections sur plans parallèles).

IV. - Instruments de transformation.

La plupart des techniques de transformation que nous venons d'envisager permettent de transformer une figure plane en une autre figure plane, les deux figures étant dans des plans différents.

Il existe des instruments : le pantographe et l'inverseur, qui permettent de faire une homothétie ou une inversion du plan sur lui-même. Les élèves de 16 ans, l'an dernier, ont construit et utilisé ces instruments pour réaliser des transformations. Ils ont voulu des instruments du même type, permettant de réaliser une affinité, une projectivité du plan. Un groupe d'élèves a conçu et construit un affinographe et un pantographe projectif. Je me suis contentée de vérifier que la conception de l'instrument répondait bien aux exigences.

Le principe du pantographe projectif est basé sur l'homothétie projective (homologie).



d, P, A et A' sont fixes (A A' P alignés).

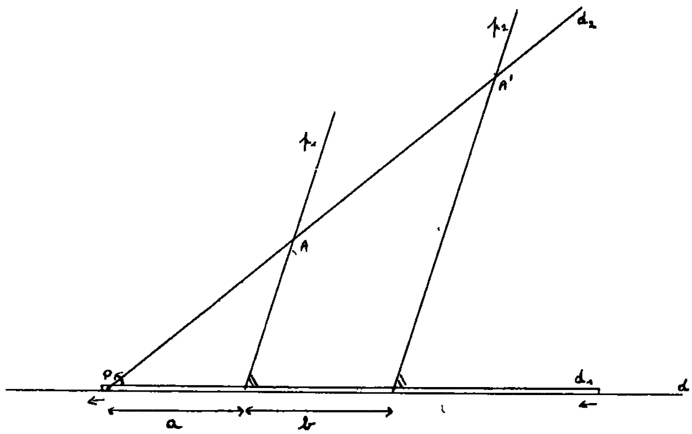
PB pivote autour de P, Q (intersection de AB et $A'B'$) glisse sur d, AB pivote autour de A, $A'B'$ autour de A'.

B' est le transformé de B par homothétie projective.

$(AA'PA_1) = (BB'PB_1) = k$, birapport d'homothétie.

L'appareil est construit de manière qu'on puisse faire varier le birapport d'homothétie k ; il s'agit, pour cela, de changer la position de A' sur la droite AP.

Principe de l'affinographe.



Les droites p_1 et p_2 sont parallèles et fixées à la droite d_1 qui glisse sur d; d_2 pivote autour de P (point de d_1).

Le transformé de A est A'; il s'obtient en faisant glisser d_1 sur d, de manière à faire passer p_1 par A. A' est l'intersection de P_2 et d_2 qu'on fait pivoter autour de P pour qu'il passe par A).

L'appareil est conçu de manière à pouvoir changer les constantes (a, b, direction des p).

Remarque : on trouve facilement l'expression analytique de ces transformations, et on peut constater que l'ensemble des transformations obtenues pour d fixe et direction des p fixe, mais pour a et b variables, forme un sous groupe des affinités.

V. - Remarques.

Je tiens à souligner qu'il s'agit ici du compte rendu d'une expérien e bien incomplète, expérience au cours de laquelle nous nous sommes plus spécialement attardés à l'aspect géométrique de quelques transformations géométriques des espaces à deux dimensions.

Nous ne sousestimons pas, pour autant :

— la généralisation à l'espace à trois dimensions, ou à une dimension (ce qui n'a été fait qu'occasionnellement l'an dernier), l'espace à trois dimensions peut d'ailleurs aussi bien servir de départ,

— l'aspect algébrique des transformations.

En effet, chaque fois que cela nous a été possible, les équations de transformation ont été écrites et étudiées dans différents systèmes de coordonnées. Dès qu'on a muni le plan d'un repère, toute transformation géométrique induit une ou des transformations sur les nombres.

DOCUMENTS PRESENTES AU COURS DE L'EXPOSE

1) Transformations par photos (homothétie projective) : photo d'un élève, d'un objet (une poire) et différentes transformations projectives.

Photos de dessins géométriques : circonférence et carré inscrit, et déformations projectives (ellipse, hyperbole, parabole et quadrilatère inscrit).

2) Transformations d'une figure plane, par dessin, à l'aide d'une loi de transformation.

3) Transformations de dessins géométriques et de dessins quelconques par quadrillages divers, par quadrillage métrique, affin, projectif, conforme.

Différentes représentations planes du globe terrestre.

4) Instruments de transformations conçus et réalisés par des élèves de 16 ans (pantographe projectif, affinographe) et transformations de dessins géométriques réalisés à l'aide de ces instruments.

5) Un cahier d'élève de 16 ans sur les transformations, notions et propriétés métriques, affines, projectives, conformes.

6) Les éléments d'un tableau réalisé l'an dernier avec des élèves de 16 ans, sur le même sujet.