Bruno Pini

Osservazioni sulla ipoellitticità.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.4, p. 420–432.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_4_420_0>

Osservazioni sulla ipoellitticità

Nota di Bruno Pini (a Bologna) (*)

Sunto. - *Come nelle righe che precedono il n 1.*

Sia $P(D_x, D_y)$ un polinomio differenziale a coefficienti costanti. Hörmander ha provato (¹) che condizione necessaria e sufficiente di ipoellitticità è che sia

$$\frac{D_s^h D_\sigma^k P(-is, -i\sigma)}{P(-is, -i\sigma)} \to 0 \tag{1}$$

per $s^2 + \sigma^2 \to +\infty$ (i unità immaginaria, s e σ variabili reali) per ogni coppia di interi non negativi h, k con $h + k > 0$; è sufficiente che sia

$$\frac{D_s P(-is, -i\sigma)}{P(-is, -\sigma)} \to 0, \qquad \frac{D_\sigma P(-is, -i\sigma)}{P(-is, -i\sigma)} \to 0 \tag{2}$$

per $s^2 + \sigma^2 \to +\infty$.

Scopo della presente nota è quello di scrivere il polinomio P come somma di due polinomi P_1 e P_2 così che P_1 sia costituito da tutti e soli quei termini di P per cui P sia ipoellittico se e solo se lo è P_1. P e P_1 saranno due polinomi *egualmente forti* (²) e si potrà chiamare P_1 la *parte principale* di P.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I. il 7 ottobre 1963.

(¹) Cfr. per esempio L. Hörmander, *Linear partial differential equations* Springer-Verlag, Berlin, 1963.

(²) Dei due polinomi $P(D)$ e $Q(D)(D = (D_{x_1}, \dots, D_{x_m}))$ il primo si dice *meno forte* del secondo (cfr. l.c. in (1)) se comunque si fissi un aperto Ω, esiste una costante $C(\Omega) < +\infty$ tale che $\| P(D)\varphi \|_{L^2} \leq C(\Omega) \| Q(D)\varphi \|_{L^2}$ per ogni $\varphi \in C_0^\infty(R^m)$ con supporto in Ω. Posto $\| R(-is) \| = (\sum_p | R^{(p)}(-is) |^2)^{1/2}$, $(s = (s_1, \dots, s_m)$; p è il multi-indice $p_1, \dots, p_m$ e $R^{(p)} = D_{s_1}^{p_1} \cdots D_{s_m}^{p_m} R)$, sono equivalenti le seguenti proprietà: a) $P(D)$ è meno forte di $Q(D)$; b) $| P(-is) | \leq C \| Q(-is) \|$; c) $\| P(-is) \| \leq C \| Q(-is) \|$. Ricordiamo anche che un polinomio egualmente forte d'un polinomio ipoellittico è esso stesso ipoellittico.

1. Si può scrivere

$$(3)\qquad P(D_x, D_y) = \sum_{h=1}^{p} a_h D_x^h + \sum_{k=1}^{q} b_k D_y^k + \sum_{r\geq 1,\, t\geq 1} c_{rt} D_x^r D_y^t + d.$$

È intanto immediato che:

Se (3) *è ipoellittico non può essere* $a_h = 0$ *per* $h = 1, 2, \ldots, p$, *nè* $b_k = 0$ *per* $k = 1, 2, \ldots, q$; *inoltre per ogni coppia* r, t *deve essere* $r \leq p - 1$, $t \leq q - 1$.

La prima osservazione segue subito dal fatto che la (1) implica $|P(-is, -i\sigma)| \to +\infty$ per $s^2 + \sigma^2 \to +\infty$ mentre se $a_h = 0$ per $h = 1, 2, \ldots, p$. si ha $P(-is, 0) = d$.

Fissato poi $\bar r$, sia $\bar t$ il più grande intero per cui $c_{\bar r \bar t} D_x^{\bar r} D_y^{\bar t}$ figura in P; si ha

$$D_s^{\bar r} P(0, -i\sigma) = (-i)^{\bar r} a_{\bar r} \bar r\,! + (-i)^{\bar r + \bar t}\, \bar r\,!\, c_{\bar r \bar t} \sigma^{\bar t} + \sum_{t<\bar t} c_{\bar r t} (-i)^{\bar r + t}\, \bar r\,!\, \sigma^t,$$

$$P(0, -i\sigma) = \sum_{k=1}^{q} b_k (-i)^k \sigma^k + d;$$

la (1) richiede allora che sia $\bar t < q$; dunque per ogni t deve essere $t \leq q - 1$; analogamente $r \leq p - 1$.

Supponiamo che sia $p \geq q$.

Osserviamo che, posto $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$, ($\alpha$, β, γ, δ reali e $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$), e

$$P(D_x, D_y) = P(\alpha D_\xi + \gamma D_\eta, \beta D_\xi + \delta D_\eta) = Q(D_\xi, D_\eta),$$

se $s = \alpha s' + \gamma\sigma'$, $\sigma = \beta s' + \delta\sigma'$, le condizioni (2) implicano le

$$\frac{D_{s'} Q(-is', -i\sigma')}{Q(-is', -i\sigma')} \to 0, \qquad \frac{D_{\sigma'} Q(-is', -i\sigma')}{Q(-is', -i\sigma')} \to 0,$$

e viceversa. Ora se in (3) figurano termini per cui $r + pt/q > p$, con una opportuna trasformazione lineare reale propria delle variabili ci si può ricondurre a un polinomio differenziale in cui tale eventualità non si verifica.

Possiamo quindi supporre che per ogni coppia r, t che figura nella (3) sia $r + pt/q \leq p$.

Scriviamo allora (3) anche come segue

$$P(D_x, D_y) = \sum_{\substack{r + pt/q \leq p \\ r\geq 0,\, t\geq 0}} a_{rt} D_x^r D_y^t$$

e poniamo

$$(4)\qquad P_0(D_x,\ D_y) = \sum_{\substack{r+pt/q=p\\ r\geq 0,\ t\geq 0}} a_{rt} D_x^r D_y^t ,$$

$$P_k(D_x,\ D_y) = \sum_{\substack{p-k<r+pt/q\leq p\\ r\geq 0,\ t\geq 0}} a_{rt} D_x^r D_y^t ,\ \text{per}\ 0<k\leq p.$$

Sia δ il massimo comun divisore tra p e q e $p=p_0\delta$, $q=q_0\delta$; da $r+pt/q=p$ segue $q_0 r+p_0 t=p_0 q_0 \delta$ onde p_0 è divisore di r e q_0 è divisore di t; posto $r=hp_0$, $t=kq_0$, da $q_0 r+p_0 t=p_0 q_0(h+k)$ segue $h+k=\delta$. Pertanto $P_0(\lambda,\ -i\sigma)$ si può scrivere

$$a_p \lambda^{\delta p_0} + \sum_{k=1}^{\delta-1} c_k (-i\sigma)^{(\delta-k)q_0} \lambda^{kp_0} + b_q (-i\sigma)^{\delta q_0}$$

e, posto $\lambda^{p_0} = \sigma^{q_0}\lambda_1^{p_0}$, anche

$$\sigma^{\delta q_0}[a_p \lambda_1^{\delta p_0} + \sum_{k=1}^{\delta-1} c_k (-i)^{(\delta-k)q_0} \lambda_1^{kp_0} + b_q (-i)^{\delta q_0}];$$

indicando con α_j, $j=1, 2, \dots, l$, le radici dell'equazione

$$(5)\qquad a_p \alpha^\delta + \sum_{k=1}^{\delta-1} c_k (-i)^{(\delta-k)q_0} \alpha^k + b_q (-i)^{\delta q_0} = 0,$$

rispettivamente di molteplicità n_1, n_2, ..., $n_l (n_1 + \dots + n_l = \delta)$ si ha

$$(6_1)\qquad P_0(\lambda,\ -i\sigma) \equiv \sigma^{\delta q_0} a_p \prod_{j=1}^{l} (\lambda_1^{p_0} - \alpha_j)^{n_j} \equiv a_p \prod_{j=1}^{l} (\lambda^{p_0} - \alpha_j \sigma^{q_0})^{n_j}.$$

In base a queste osservazioni possiamo affermare la fattorizzazione

$$P_0(D_x,\ D_y) \equiv a_p \prod_{j=1}^{l} \left(D_x^{p_0} - \frac{\alpha_j}{(-i)^{q_0}} D_y^{q_0} \right)^{n_j}$$

Ne segue che

$$(6_2)\qquad P_0(-is,\ \mu) \equiv a_p \prod_{j=1}^{l} \left((-is)^{p_0} - \frac{\alpha_j}{(-i)^{q_0}} \mu^{q_0} \right)^{n_j}.$$

Osserviamo che se la (5) ha radici tutte semplici, allora anche le equazioni $P_0(\lambda,\ -i\sigma)=0$ e $P_0(-is,\ \mu)=0$ hanno radici tutte semplici (per $\sigma \neq 0$, $s \neq 0$); in generale a ogni radice di $P_0(\lambda, -i\sigma) = 0$ si può associare una radice di eguale molteplicità di $P_0(-is, \mu) = 0$. Poniamo ora

$$s = \rho \cos \theta, \quad \sigma = \rho^{p/q} \operatorname{sen} \theta \qquad (\text{onde } \rho \leq |s| + |\sigma|^{q/p} < 2\rho);$$

si ha

$$P_0(-is, \; -i\sigma) = \rho^p P_0(-i \cos \theta, \; -i \operatorname{sen} \theta).$$

Distinguiamo i seguenti casi:

1° *caso*. -

$$P_0(-i \cos \theta, \; -i \operatorname{sen} \theta) \neq 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

2° *caso*. - Esistono valori di θ per cui $P_0(-i \cos \theta, \; - \operatorname{sen} \theta) = 0$; l'equazione $P_0(\lambda, \; -i\sigma) = 0$ ha quindi delle radici immaginarie pure; esse sono tutte semplici.

3° *caso* - Esistono valori di θ per cui $P_0(-i \cos \theta, \; -i \operatorname{sen} \theta) = 0$; le radici immaginarie pure di $P_0(\lambda, \; -i\sigma) = 0$ non sono però tutte semplici.

1. - *Nel primo caso il polinomio $P(D_x, D_y)$ è ipoellittico.*

Ciò segue subito dal fatto che esiste una costante positiva C tale che

(7) $$\rho^p / C \leq |P_0(-is, \; -i\sigma)| \leq C\rho^p.$$

Se $p = q$ il polinomio è ellittico; se $p > q$ può essere parabolico o del tipo che io ho chiamato *pseudoparabolico regolare* e che HÖRMANDER chiama *semi-ellittico* e VOLEVIC *quasi-ellittico* [3].

È $|P| \leq |P_0| + |P - P_0|$; poichè $|P - P_0| = o(\rho^p)$ per $\rho \to +\infty$, dalla (7) segue

$$|P| \leq |P_0| + C(1 + |P_0|) \leq C' |P_0|;$$

da $|P_0| \leq |P| + |P - P_0|$ segue analogamente

$$|P_0| \leq C'' |P|;$$

perciò P e P_0 sono egualmente forti. P_0 è la parte principale di P.

---

[3] Cfr. l.c. in (1) pp. 102-103. L. P. VOLEVIC, *Proprietà locali delle soluzioni dei sistemi quasi-ellittici*, Mat. Sbornik, 59 (101) (1962) (in russo).

II. - *Nel secondo caso $P(D_x, D_y)$ è ipoellittico se e solo se $P_1(D_x, D_y)$ è ipoellittico.*

Per provare ciò facciamo vedere che:

Nel secondo caso condizione necessaria e sufficiente affinchè P sia ipoellittico è che sia

$$\frac{|P_1(-i\rho\cos\theta,\ -i\rho^{p/q}\operatorname{sen}\theta)|}{\rho^{p-1}} \to +\infty \tag{8}$$

per $\rho \to +\infty$ ([4]).

La sufficienza della condizione (8) si riconosce subito perchè per $\rho \to +\infty$ riesce

$$|D_s P(-i\rho\cos\theta,\ -\rho^{p/q}\operatorname{sen}\theta)| = O(\rho^{p-1}),$$

$$|D_\sigma P(-i\rho\cos\theta,\ -i\rho^{p/q}\operatorname{sen}\theta)| = O(\rho^{p-1})$$

$$P(-i\rho\cos\theta,\ -i\rho^{p/q}\operatorname{sen}\theta) - P_1(-i\rho\cos\theta,\ -i\rho^{p/q}\operatorname{sen}\theta)| = O(\rho^{p-1})\ ;$$

le (2) sono perciò soddisfatte.

Proviamo la necessità. Se non valesse la (8) esisterebbero un numero positivo L, una successione $\{\theta_n\}$, $o \leq \theta_n \leq 2\pi$, e una successione divergente $\{\rho_n\}$ tali che

$$|P_1(-i\rho_n\cos\theta_n,\ -i\rho_n^{p/q}\operatorname{sen}\theta_n)|/\rho_n^{p-1} < L, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Si può senz'altro supporre $\{\theta_n\}$ convergente, sia $\theta_n \to \bar\theta$. Dalla (9), dividendo per ρ_n e passando al limite per $n \to \infty$, si ha

$$P_0(-i\cos\bar\theta,\ -i\operatorname{sen}\bar\theta) = 0.$$

D'altra parte

$$D_s P(-is,\ -i\sigma) = (-i)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda} P_0(\lambda,\ -i\sigma)\right]_{\lambda=-is} +$$

$$+ D_s(P(-is,\ -i\sigma) - P_0(-is,\ -i\sigma))\ ;$$

([4]) Ovviamente la condizione si può anche formulare così:

Se $\bar\theta_j$, $j=1, 2, \ldots, \nu$ *sono i valori di* θ *per cui* $P_0(-i\cos\theta, -i\operatorname{sen}\theta)=0$ $(0 < \bar\theta_j < 2\pi$ perchè se $P_0(-i\cos\bar\theta, -i\operatorname{sen}\bar\theta)=0$ necessariamente è $\bar\theta \neq 0(2\pi))$, *allora* $P(D_x, D_y)$ *è ipoellittico se e solo se ad ogni* $\bar\theta_j$ *si può associare un intorno* $I_j (I_h \cap I_k = \emptyset$ per $h \neq k)$ *tale che si verifica la* (8) *per* $\theta \in I_j$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

Infatti per $\theta \in [0, 2\pi] - \bigcup_j I_j$ si ha $|P_0(-i\rho\cos\theta, -i\rho^{p/q}\operatorname{sen}\theta)| > C\rho^p$ per una opportuna costante positiva.

poichè l'equazione $P_0(\lambda, -i\sigma) = 0$ ha tutte le radici semplici, riesce

$$D_s P_0(-i\rho_n \cos\theta_n, -i\rho_n^{p/q} \operatorname{sen}\theta_n)/\rho_n^{p-1} \to (-i)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda} P_0(\lambda, -i \operatorname{sen}\bar\theta)\right]_{\lambda=-i\cos\bar\theta} \neq 0$$

mentre

$$D_s(P(-i\rho_n \cos\theta_n, -i\rho_n^{p/q} \operatorname{sen}\theta_n) - P_0(-i\rho_n \cos\theta_n, -i\rho_n^{p/q} \operatorname{sen}\theta_n))/\rho_n^{p-1} \to 0$$

$$P(-i\rho_n \cos\theta_n, -i\rho_n^{p/q} \operatorname{sen}\theta_n)/\rho_n^{p-1} = O(1)$$

e quindi non si ha

$$\frac{D_s P(-is, -i\sigma)}{P(-is, -i\sigma)} \to 0 \quad \text{per} \quad \rho \to +\infty.$$

Ora $D_s P_1$ e $D_\sigma P_1$ sono al più $O(\rho^{p-1})$ per $\rho \to +\infty$, pertanto la condizione $|P_1|/\rho^{p-1} \to +\infty$ per $\rho \to +\infty$ implica che $D_s P_1/P_1 \to 0$, $D_\sigma P_1/P_1 \to 0$ per $s^2 + \sigma^2 \to +\infty$.

Dunque la condizione $D_s P/P \to 0$, $D_\sigma P/P \to 0$ per $s^2 + \sigma^2 \to +\infty$ è equivalente alla condizione $|P_1|/\rho^{p-1} \to +\infty$ per $\rho \to +\infty$ e questa a sua volta è equivalente alla condizione $D_s P_1/P_1 \to 0$, $D_\sigma P_1/P_1 \to 0$ per $s^2 + \sigma^2 \to +\infty$.

Pertanto $P(D_x, D_y)$ è ipoellittico se e solo se $P_1(D_x, D_y)$ è ipoellittico. Ragionando come nel primo caso, si ha attualmente

$$C' |P| \leq |P_1| \leq C'' |P|$$

per due opportune costanti positive C' e C''. Dunque P e P_1 sono egualmente forti. P_1 è la parte principale di P.

Si osservi che se q è un divisore di p non esistono coppie r, t tali che $p - 1 < r + pt/q < p$ e quindi in questo caso la condizione (8) diventa

$$\rho\, |P_0(-\cos\theta, -i \operatorname{sen}\theta)| \to +\infty \quad \text{per} \quad \rho \to +\infty$$

e quindi $P(D_x, D_y)$ è ipoellittico se e solo se $P_0(-i\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta) \neq 0$ per $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

III. - *Nel terzo caso se $\bar n$ è la massima molteplicità delle radici immaginarie pure dell'equazione $P_0(\lambda, -i\sigma) = 0$, allora $P(D_x, D_y)$ è ipoellittico se e solo se $P_{\bar n}(D_x, D_y)$ è ipoellittico.*

Cominciamo col provare che:

Nel terzo caso, se $\bar\theta_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$, *sono i valori di* θ *per cui* $P_0(-i\cos\theta, -i\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$ *e se l'equazione* $P_0(\lambda, -i\,\mathrm{sen}\,\bar\theta_j) = 0$ *ha la radice* $\lambda = -i\cos\bar\theta_j$ *multipla di molteplicità* n_j, *allora condizione necessaria e sufficiente affinchè* $P(D_x, D_y)$ *sia ipoellittico è che ad ogni* $\bar\theta_j$ *si possa associare un intorno* I_j *tale che riesca*

$$(9_1)\qquad \frac{|P_{n_j}(-i\rho\cos\theta, -i\rho^{p/q}\,\mathrm{sen}\,\theta)|}{\rho^{p-n_j}} \to +\infty$$

per $\rho \to +\infty$, $\theta \in I_j$ *e*

$$(9_2)\qquad \frac{D_s P_{n_j}(-is, -i\sigma)}{P_{n_j}(-is, -i\sigma)} \to 0, \qquad \frac{D_\sigma P_{n_j}(-is, -i\sigma)}{P_{n_j}(-is, -i\sigma)} \to 0$$

per $\rho \to +\infty$, $\theta \in I_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$ ([5]).

È $\bar\theta_j \neq 0$ e si può supporre $I_h \cap I_k = \emptyset$ per $h \neq k$; in $[0, 2\pi] - \bigcup_j I_j$ si ha $|P_0(-i\rho\cos\theta, -i\rho^{p/q}\,\mathrm{sen}\,\theta)| > c\rho^p$ per una opportuna costante positiva c. Scriviamo

$$(10)\qquad \frac{D_s P}{P} = \frac{\dfrac{D_s P_{n_j}}{P_{n_j}} + \dfrac{D_s(P - P_{n_j})}{\rho^{p-n_j}} \cdot \dfrac{1}{P_{n_j}/\rho^{p-n_j}}}{1 + \dfrac{P - P_{n_j}}{\rho^{p-n_j}} \cdot \dfrac{1}{P_{n_j}/\rho^{p-n_j}}}.$$

Poichè $(P - P_{n_j})/\rho^{p-n_j} = O(1)$ e $D_s(P - P_{n_j})/\rho^{p-n_j} = o(1)$ per $\rho \to +\infty$, la (9_1) e la prima della (9_2) assicurano la prima delle (2) per $\theta \in I_j$; analogamente la (9_1) e la seconda delle (9_2) assicurano la seconda delle (2) per $\theta \in I_j$.

Ciò prova la sufficienza di (9_1) e (9_2).

Proviamo la necessità. Se non vale (9_1) per un j, allora fissato

---

([5]) Non ci preoccupiamo di assodare se tra la (9_1) e le (9_2) v'è implicazione. È immediato però riconoscere che la (9_1) non implica le (9_2)

Per esempio se $P(-is, -i\sigma) = (s^2 - \sigma^2)^4 + i(s - \sigma)(s^2 + \sigma^2)^3 + (s^2 + \sigma^2)^3$ si ha $p = q = 8$, $\bar\theta_1 = \pi/4$, $\bar\theta_2 = 3\pi/4$, $\bar\theta_3 = 5\pi/4$, $\bar\theta_4 = 7\pi/4$ e $P_0(\lambda, -i\,\mathrm{sen}\,\bar\theta_j) = 0$ ha la radice immaginaria $-i\cos\bar\theta_j$ di molteplicità 4. $P_4 \equiv P$ e si ha $|P|/\rho^4 > \rho^2$ mentre $D_s P(-is, -is)/P(-is, -is) = i + 3/s$ (che non tende a zero per $|s| \to +\infty$).

comunque piccolo I_j esistono una costante positiva L e due successioni $\{\theta_\nu\}$ e $\{\rho_\nu\}$ tali che $\theta_\nu \to \bar\theta \in I_j$, $\rho_\nu \to +\infty$ per cui

$$|P_{n_j}(-i\rho_\nu \cos\theta_\nu, -i\rho_\nu^{p/q} \operatorname{sen}\theta_\nu)| / \rho_\nu^{p-n_j} < L, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Dividendo per $\rho_\nu^{n_j}$ e passando al limite per $\nu \to +\infty$ si ottiene

$$P_0(-i\cos\bar\theta, -i\operatorname{sen}\bar\theta) = 0$$

onde $\bar\theta = \bar\theta_j$. Poichè

$$\frac{D_s^{n_j}P}{P} = \frac{D_s^{n_j}P_0/\rho^{p-n_j} + D_s^{n_j}(P-P_0)/\rho^{p-n_j}}{P_{n_j}/\rho^{p-n_j} + (P-P_{n_j})/\rho^{p-n_j}}$$

ed è

$$D_s^{n_j}P_0/\rho^{p-n_j} = (-i)^{n_j}\left[\frac{\partial^{n_j}}{\partial\lambda^{n_j}}P_0(\lambda, -i\operatorname{sen}\theta)\right]_{\lambda=-i\cos\theta},$$

$$D_s^{n_j}(P-P_0)/\rho^{p-n_j} = o(1), \quad (P-P_{n_j})/\rho^{p-n_j} = O(1), \quad \text{per} \quad \rho \to +\infty,$$

$$P_{n_j}(-i\rho_\nu\cos\theta_\nu, -i\rho_\nu^{p/q}\operatorname{sen}\theta_\nu)/\rho_\nu^{p-n_j} = O(1)$$

$$\frac{D_s^{n_j}P_0(-i\rho_\nu\cos\theta_\nu, -\rho_\nu^{p/q}\operatorname{sen}\theta_\nu)}{\rho_\nu^{p-n_j}} \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$(-i)^{n_j}\left[\frac{\partial^{n_j}}{\partial\lambda^{n_j}}P_0(\lambda, -i\operatorname{sen}\bar\theta_j)\right]_{\lambda=-i\cos\bar\theta_j} \neq 0,$$

non risulta soddisfatta la (1).

Supponiamo allora soddisfatta la (9_1) e non la prima delle (9_2). Comunque piccolo si fissi l'intorno I_j, per una certa j, esisteranno una costante positiva ε e due successioni $\{\theta_\nu\}$ e $\{\rho_\nu\}$ tali che $\theta_\nu \to \bar\theta = \bar\theta_j$ e $\rho_\nu \to +\infty$, per cui

$$\frac{|D_sP_{n_j}(-\rho_\nu\cos\theta_\nu, -i\rho_\nu^{p/q}\operatorname{sen}\theta_\nu)|}{|P_{n_j}(-i\rho_\nu\cos\theta_\nu, -i\rho_\nu^{p/q}\operatorname{sen}\theta_\nu)|} > \varepsilon, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Dalla (10) segue allora che $D_sP(-i\rho_\nu\cos\theta_\nu, -i\rho_\nu^{p/q}\operatorname{sen}\theta_\nu)/P(-i\rho_\nu\cos\theta_\nu, -i\rho_\nu^{p/q}\operatorname{sen}\theta_\nu)$ non tende a zero per $\nu \to \infty$ e quindi non è soddisfatta la prima delle (2).

Analogo ragionamento se si suppone verificata la (9_1) e non la seconda delle (9_2).

Poniamo ora $\bar{n} = \max(n_1, \dots, n_l)$. Poichè il P_{n_j} relativo a P e il corrispondente relativo a $P_{\bar{n}}$ coincidono. attraverso la condizione ora stabilita si ha che la ipoellitticità di P implica quella di $P_{\bar{n}}$ e viceversa.

Come nei casi precedenti si ha poi

$$C' \| P \| \leq \| P_{\bar{n}} \| \leq C'' \| P \|$$

per due opportune costanti positive C' e C''.

$P_{\bar{n}}(D_x, D_y)$ si dirà la parte principale di $P(D_x, D_y)$.

2. Accenniamo all'estensione dei risutati del n. 1.

Sia

$$P(D) = P(D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_m})$$

un polinomio differenziale a coefficienti costanti. Sia p_j l'ordine massimo della derivata pura in D_{x_j} che figura in $P(D)$. Per fissare le idee sia $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_m$. Possiamo limitarci a considerare il caso che per ogni termine $a_{h_1 \dots h_m} D_{x_1}^{h_1} \dots D_{x_m}^{h_m}$ che figura in P sia

$$\frac{h_1}{p_1} + \frac{h_2}{p_2} + \dots + \frac{h_m}{p_m} \leq 1.$$

Poniamo

$$P_0(D) = \sum_{\Sigma(h_j/p_j)=1} a_{h_1 \dots h_m} D_{x_1}^{h_1} \dots D_{x_m}^{h_m}$$

$$P_k(D) = \sum_{1-k/p_1 < \Sigma(h_j/p_j) \leq 1} a_{h_1 \dots h_m} D_{x_1}^{h_1} \dots D_{x_m}^{h_m}.$$

Se $P_0(-is_1, \dots, -is_m) \neq 0$ per $s_1, \dots, s_m$ *reali e* $s_1^2 + \dots + s_m^2 > 0$, *allora* $P(D)$ *è ipoellittico.*

Se $P_0(-is_1, \dots, -is_{j-1}, \lambda, -is_{j+1}, \dots, -is_m) = 0$ *ha delle radici immaginarie pure e, al variare di* j, *l'ordine massimo di molteplicità di esse è* $\bar{n}$, *allora* $P(D)$ *è ipoellittico se e solo se lo è* $P_{\bar{n}}(D)$.

P e P_0 nel primo caso, P e $P_{\bar{n}}$ nel secondo, sono egualmente forti P_0 nel primo caso, e $P_{\bar{n}}$ nel secondo, è la parte principale di P.

3. In certe questioni interessa ottenere valutazioni asintotiche delle radici, e delle parti reali di queste, delle equazioni

$$(11) \qquad \sum_{r+pt/q\leq p} a_{rt}(-i\sigma)^t\lambda^r = 0, \qquad \sum_{r+pt/q\leq p} a_{rt}(-is)^r\mu^t = 0$$

Consideriamo ad esempio la prima delle (11) per $\sigma > 0$ (analoghe considerazioni si possono fare per $\sigma < 0$ e per la seconda).

I. - Se $P_0(-is, \; -i\sigma) \neq 0$ per $s^2 + \sigma^2 > 0$, allora le radici di $P_0(\lambda, \; -is) = 0$ sono

$$\lambda_j(\sigma) = \alpha_j\sigma^{q/p}$$

con $P_0(\alpha_j, \; -i) = 0$, $\mathcal{R}e\, \alpha_j > 0$ oppure $\mathcal{R}e\, \alpha_j < 0$; perciò le radici della prima delle (11) sono

$$\lambda_j = \alpha_j\sigma^{q/p} + o(\sigma^{q/p}) \quad \text{per} \quad \sigma \to +\infty.$$

II - Se $P(D_x, \; D_y)$ è ipoellittico e $P_0(\alpha, \; -i) = 0$ ha radici immaginarie pure ma tutte semplici, allora l'equazione

$$P_1(\lambda, \; -i\sigma) = P_0(\lambda, \; -i\sigma) + \sum_{p-1<r+pt/q<p} a_{rt}(-i\sigma)^t\lambda^r = 0$$

non ha radici immaginarie pure per σ sufficientemente grande.

I valori che può assumere $r + pt/q$ sotto la condizione $p - 1 < r + pt/q < p$ sono un numero finito di numeri razionali p_1, p_2, ., p_l e non è accettabile nè $r = 0$, nè $t = 0$, scriviamo perciò

$$P_1(\lambda, \; -i\sigma) = P_0(\lambda, \; -i\sigma) + \sum_{j=1}^{l} \; \sum_{\substack{r+pt/q=p_j \\ r\geq 1,\, t\geq 1}} a_{rt}(-i\sigma)^t\lambda^r$$

e suppponiamo che sia $p_1 > p_2 > .. > p_l$.

Posto $\lambda = \mu\sigma^{q/p}$, $\sigma = 1/\tau$, l'equazione $P_1(\lambda, \; -i\sigma) = 0$ diventa

$$P_0(\mu, \; -i) + \sum_{j=1}^{l} \Big(\sum_{\substack{r+pt/q=p_j \\ r\geq 1,\, t\geq 1}} a_{rt}(-i)^t\mu^r \Big)\tau^{q(p-p_j)/p} = 0$$

e questa per $\tau > 0$ sufficientemente piccolo non ha radici immaginarie pure.

Sia ν una radicie immaginaria pura di $P_0(\mu, \; -i) = 0$.

Non può essere

$$\sum_{\substack{r+pt/q=p_j\\ r\geq 1,\, t\geq 1}} a_{rt}(-i)^t\alpha^r = 0 \quad \text{per} \quad j=1,\,2,\,..,\,l$$

perchè altrimenti sarebbe $P_1(\alpha\sigma^{q/p},\ -i\sigma)=0$ per ogni $\sigma>0$ mentre $|\,P_1(-is.\ -i\sigma)\,| \to +\infty$ per $s^2+\sigma^2 \to +\infty$.

Supponiamo che sia

$$\sum_{\substack{r+pt/q=p_j\\ r\geq 1,\, t\geq 1}} a_{rt}(-i)^t\alpha^r = 0 \quad \text{per} \quad j=1,\,2,\,\ldots,\,k-1, \tag{12}$$

$$\sum_{\substack{r+pt/q=p_k\\ r\geq 1,\, t\geq 1}} a_{rt}(-i)^t\alpha^r \neq 0. \tag{13}$$

Poniamo

$$\mu = \alpha + c_1\tau^{1/p} + c_2\tau^{2/p} + \,..$$

Tra i coefficienti c_h ve n'è certamente uno, sia c_{m_k}, tale che $\mathcal{R}e\, c_h = 0$ per $h<m_k$, $\mathcal{R}e\, c_{m_k}\neq 0$ e $q>m_k$, perchè la ipoellitticità di $P_1(D_x,\ D_y)$ implica che $|\,\mathcal{R}e\,\lambda\,| \to +\infty$ per $|\,\sigma\,| \to +\infty$.

Detta λ la radice della prima delle (11) corrispondente alla radice immaginaria semplice α di $P_0(\mu,\ -i)=0$, riesce, per $\sigma\to+\infty$,

$$\lambda = \alpha\sigma^{q/p} + o(\sigma^{q/p}), \quad \mathcal{R}e\,\lambda = O\,(\sigma^{(q-m_k)/p}).$$

III. - Supponiamo infine che $P_0(\alpha,\ -i)=0$ abbia anche radici immaginarie pure multiple e sia $\bar{n}$ il massimo ordine di molteplicità delle radici immaginarie pure di $P_0(\lambda,\ -i\sigma)=0$. Allora

$$P_{\bar{n}}(\lambda,\ -i\sigma) = P_0(\lambda,\ -i\sigma) + \sum_{j=1}^{\nu}\ \sum_{r+pt/q=p_j} a_{rt}(-i\sigma)^t\lambda^r = 0$$

non ha radici immaginarie pure per σ sufficientemente grande. Procedendo come prima, se α è una radice immaginaria pura di molteplicità n di $P_0(\alpha,\ -i)=0$, supposto che si verifichino le (12)' e (13) (ove ora i p_j sono sottoposti alla limitazione $p-\bar{n}<p_j<p$)

si ottiene per la radice λ di $P(\lambda, -i\sigma) = 0$, corrispondente alla radice α di $P_0(\alpha, -i) = 0$. e per $\sigma \to +\infty$ la valutazione

$$\lambda = \alpha\sigma^{q/p} + o(\sigma^{q/p}), \quad \mathcal{R}e\,\lambda = O(\sigma^{(q-m_{kn})/p})$$

per un certo m_{kn} (per cui certamente $q > m_{kn}$).

4. Se l'operatore $P_0(D_x, D_y)$ è ipoellittico, le soluzioni di $P_0(D_x, D_y)u = 0$ e di $P(D_x, D_y) = 0$ appartengono a una certa classe di GEVREY, sia $G_{\alpha, \beta}$.

Se $P_0(\lambda, -i\sigma) = 0$ ha radici immaginarie pure ma $P(D_x, D_y)$ è ipoellittico, allora le soluzioni di $P(D_x, D_y)u = 0$ risultano appartenere a una classe $G_{\bar\alpha, \bar\beta}$ con $\bar\alpha \geq \alpha$, $\bar\beta \geq \beta$. Ciò si riconosce con ragionamenti analoghi a quelli indicati in altra Nota (6) se si suppone che $P(-is, -i\sigma)$ si annulli al più per $s = \sigma = 0$. Precisamente:

Se l'equazione $P(-is, \mu) = 0$ ha le radici μ_h tali che $\mu_h(s) = O(s^{\alpha_h})$, $\mathcal{R}e\,\mu_h(s) = O(s^{\beta_h})$ per $s \to +\infty$ e $\mu(s) = O(|s|^{\alpha'_h})$, $\mathcal{R}e\,\mu_h(s) = O(|s|^{\beta'_h})$ per $s \to -\infty$ e l'equazione $P(\lambda, -i\sigma) = 0$ ha le radici λ_k tali che $\lambda_k(\sigma) = O(\sigma^{\gamma_k})$, $\mathcal{R}e\,\lambda_k(\sigma) = O(\sigma^{\delta_k})$ per $\sigma \to +\infty$ e $\lambda_k(\sigma) = O(|\sigma|^{\gamma'_k})$, $\mathcal{R}e\,\lambda_k(\sigma) = O(|\sigma|^{\delta'_k})$ per $\sigma \to -\infty$, le soluzioni di $P(D_x, D_y)u = 0$ appartengono a $G_{\bar\alpha, \bar\beta}$ con

$$\bar\alpha = \max_{h,k,r,t}\left(\frac{1}{\beta_h}, \frac{1}{\beta'_k}, \frac{\gamma_r}{\delta_r}, \frac{\gamma'_t}{\delta'_t}\right), \quad \bar\beta = \max_{h,k,r,t}\left(\frac{1}{\delta_h}, \frac{1}{\delta'_k}, \frac{\alpha_r}{\beta_r}, \frac{\alpha'_t}{\beta'_t}\right)$$

Per esempio, le soluzioni di $(D^4_x + D^3_y)u = 0$ appartengono a $G_{1, 4/3}$. L'operatore $D^4_x + iD^3_y + D^2_x D_y$ è ipoellittico (per esso è $p = 4$, $q = 3$, $p - 1 < 2 + 4/3 < p$; $\lambda^4 + i(-i\sigma)^3 = 0$ ha radici immaginarie pure semplici ed è $|\rho^4(\cos^4\theta - \operatorname{sen}^3\theta) + i\rho^{3+1/3}\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta|/\rho^3 \to +\infty$). Le radici di $\lambda^4 - i\sigma\lambda^2 - \sigma^3 = 0$ sono $O(|\sigma|^{3/4})$ per $|\sigma| \to +\infty$ mentre le loro parti reali per $\sigma \to -\infty$ sono $O(|\sigma|^{3/4})$ e per $\sigma \to +\infty$ due sono $O(\sigma^{3/4})$ e due sono $O(\sigma^{1/4})$. Le radici di $i\mu^3 - s^2\mu + s^4 = 0$ sono $O(|s|^{4/3})$ per $|s| \to +\infty$ mentre delle loro

(6) B. PINI, *Sulla classe di Gevrey delle soluzione di certe equazioni, ipoellittiche*, Boll. U.M.I., 18 (1963).

parti reali due sono $O(|s|^{4/3})$ e una è $O(|s|^{2/3})$ per $|s| \to +\infty$. Pertanto le soluzioni di $(D^4_x + iD^3_y + D^2_x D_y)u = 0$ appartengono a $G_{3,4}$.

È da osservare esplicitamente che i ragionamenti cui si è accennato permettono di attribuire le soluzioni di $P(D_x, D_y)u = 0$ a una certa classe di GEVREY per l'operatore scritto in quel particolare modo Per determinare gli indici minimi della classe di GEVREY occorrerà eseguire una sostituzione lineare reale propria delle variabili e studiare l'eventuale variazione degli indici al variare della sostituzione.

Per esempio, sia $P(D_x, D_y) = (D_x + aD_y)^2 + bD_x + cD_y$ con a, b, c reali e $c \neq ab$.

Con la sostituzione $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ (α, β, γ, δ reali e $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$) tale operatore diventa

$$P'(D_\xi, D_\eta) = ((\alpha + a\beta)D_\xi + (\gamma + a\delta)D_\eta)^2 + (b\alpha + c\beta)D_\xi + (b\gamma + c\delta)D_\eta .$$

Se $\alpha + a\beta \neq 0$, l'equazione

$$[(\alpha + a\beta)\lambda - i\sigma(\gamma + a\delta)]^2 + (b\alpha + c\beta)\lambda - i\sigma(b\gamma + c\delta) = 0$$

ha due radici del tipo $\lambda = i\,\dfrac{\gamma + a\delta}{\alpha + a\beta}\,\sigma + h\,|\sigma|^{1/2}$ con $\Re_e\, h \neq 0$, mentre se $\gamma + a\delta \neq 0$ l'equazione

$$[(\gamma + a\delta)\mu - is(\alpha + a\beta)]^2 + (b\gamma + c\delta)\mu - is(b\alpha + c\beta) = 0$$

ha due radici del tipo $\mu = i\,\dfrac{\alpha + a\beta}{\gamma + a\delta}\,s + k\,|s|^{1/2}$ con $\Re_e\, k \neq 0$.

Perciò se $\alpha + a\beta \neq 0$, $\gamma + a\delta \neq 0$, le soluzioni di $P'(D_\xi, D_\eta)u = 0$ appartengono a $G_{2,2}$. Ma se si scelgono $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in modo che sia $\gamma + a\delta = 0$, allora per la prima equazione si ha $\lambda = O(|\sigma|^{1/2}) = \Re_e\,\lambda$ e per la seconda $\mu = O(s) = \Re_e\,\mu$ e allora le soluzioni appartengono a $G_{1,2}$.