
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCO DE FRANCHIS

**Sui sistemi anolonomi il cui moto è
definito da un sistema lagrangiano.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 18
(1963), n.4, p. 367–376.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_4_367_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sui sistemi anolonomi il cui moto è definito da un sistema lagrangiano

Nota di FRANCO de FRANCHIS (*) (*)

Sunto. - *Vedere l'introduzione.*

INTRODUZIONE. - È noto che i moti possibili di un sistema olonomo di N punti $P_i (i = 1, 2, \dots, N)$ ad n gradi di libertà, riferito ad una n -pla di coordinate lagrangiane $q_h (h = 1, 2, \dots, n)$, sono definiti dalle equazioni del LAGRANGE della 2^a forma:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

ove T denota la forza viva del sistema e le Q_h sono le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva, espresse dalle:

$$Q_h = \sum_1^N \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \times F_i \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Nel caso particolare in cui la sollecitazione attiva sia conservativa, denotando con $U(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$ la funzione potenziale ed introdotta la *funzione lagrangiana*

$$\mathcal{L}(q/\dot{q}/t) = T - U,$$

le (1) assumono l'aspetto:

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

La forma, testè indicata, del sistema differenziale è di notevole interesse e si presta a deduzioni dirette ed espressive; essa consente, altresì, la formulazione hamiltoniana delle equazioni del moto, a partire dalla quale sono state dedotte importanti conseguenze nel campo della fisica.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 10 giugno 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 29 del Comitato per la Matematica del C. N. R.

Esistono dei casi concreti in cui, pur non essendo la sollecitazione attiva conservativa, le equazioni differenziali (1) assumono la forma (2); un esempio classico è quello fornito da una particella materiale, cui sia stata comunicata una carica elettrica, mobile, nel vuoto, in presenza di un campo magnetico (¹). In questo caso la forza applicata alla particella non è, addirittura, posizionale.

Non credo del tutto privo di interesse mostrare che, anche nel caso di un sistema anolonomo ad n gradi di libertà, quando siano verificate certe condizioni, che porremo in rilievo, è possibile, nell'ipotesi che la sollecitazione attiva sia posizionale, attribuire alle equazioni differenziali del moto la forma lagrangiana (2), e quindi l'equivalente forma hamiltoniana. Gli integrali che definiscono i possibili moti del sistema anolonomo si identificano, allora, coi particolari integrali di un sistema (2) di equazioni differenziali, in numero uguale al grado di libertà, che si ottengono in corrispondenza a valori iniziali delle q_h e delle $\dot{q}_h$ che verificano le equazioni dei vincoli di pura mobilità.

1. - Il Prof. C. AGOSTINELLI, in una Nota pubblicata nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (²), con riguardo ad un sistema olonomo soggetto ad una sollecitazione attiva le cui componenti lagrangiane Q_h sono *funzioni lineari delle $\dot{q}$* , ha caratterizzato le condizioni perchè il problema dinamico ammetta la funzione lagrangiana $\mathcal{L}$ del tipo:

$$(3) \quad \mathcal{L} = T + \sum_{s=1}^n U_s \dot{q}_s + U$$

ove le $U_s (s=1, \dots, n)$ e la U sono funzioni delle q e di t .

Più particolarmente, posto:

$$Q_h = \sum_{s=1}^n Q_{hs} \dot{q}_s + Q_{h0} \quad (h=1, 2, \dots, n),$$

ove le Q_{hs} e Q_{h0} sono funzioni delle q e di t , il Prof. AGOSTINELLI ha dimostrato che, perchè il problema dinamico ammetta la fun-

(¹) Cfr. ad es. P. CALDIROLA - Lezioni di Fisica teorica - Vol. I Editrice Viscontea - Milano.

(²) Cfr. C. AGOSTINELLI - « Sui problemi dinamici con forze funzioni lineari delle velocità nei quali esiste la funzione lagrangiana » Nota I Atti dell'acc. dei Lincei, 1946.

zione lagrangiana (3) è necessario che siano verificate le relazioni :

$$Q_{hs} = \frac{\partial U_s}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial U_h}{\partial \dot{q}_s}, \quad Q_{h0} = \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial U_h}{\partial t} \quad (h, s = 1, \dots, n)$$

Vogliamo ora vedere, reciprocamente, che affinchè il sistema (1) sia riducibile alla forma (2), le Q_h debbono essere necessariamente lineari nelle $\dot{q}$. Supposto, inverò, che la $\mathcal{L}$ sia una qualunque funzione regolare delle $q, \dot{q}, t$, ponendo :

$$U^*(q/\dot{q}/t) = \mathcal{L} - T,$$

se la sollecitazione attiva, definita dalle Q_h , è tale che le (1) assumano la forma (2), debbono avere luogo le identità :

$$(4) \quad Q_h = \frac{\partial U^*}{\partial \dot{q}_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U^*}{\partial \dot{q}_h} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

ossia :

$$Q_h = \frac{\partial U^*}{\partial \dot{q}_h} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 U^*}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 U^*}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \frac{\partial^2 U^*}{\partial t \partial \dot{q}_h} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

Poichè, in generale, le Q_h dipendono dalla configurazione, dall'atto di moto e dal tempo, debbono risultare identicamente nulle le $\frac{\partial^2 U^*}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}$ onde la U^* deve essere funzione lineare nelle $\dot{q}$, ossia del tipo :

$$U^* = \sum_{s=1}^n U_s(q/t) \dot{q}_s + U(q/t).$$

In conseguenza :

$$\mathcal{L} = T + \sum_{s=1}^n U_s(q/t) \dot{q}_s + U(q/t),$$

in conformità della (3).

Ne segue, per le (4), che :

$$\begin{aligned} Q_h &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial U_s}{\partial q_h} \dot{q}_s + \frac{\partial U}{\partial q_h} - \sum_{s=1}^n \frac{\partial U_h}{\partial q_s} q_s - \frac{\partial U_h}{\partial t} = \\ &= \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial U_s}{\partial q_h} - \frac{\partial U_h}{\partial q_s} \right) \dot{q}_s + \left(\frac{\partial U}{\partial q_h} - \frac{\partial U_h}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

cosicchè le Q_h sono necessariamente funzioni lineari nelle $\dot{q}$, ed i coefficienti delle $\dot{q}$ costituiscono un sistema emisimmetrico rispetto agli indici.

2. - Ciò premesso, supponiamo che un sistema olonomo S ad n gradi di libertà, a vincoli indipendenti dal tempo, sia ulteriormente soggetto ad m vincoli di pura mobilità, lineari nelle $\dot{q}$, pure essi indipendenti da t :

$$\sum_{r=1}^n a_{rs} q_r = 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m)$$

La forza viva T del sistema è esprimibile mediante una forma quadratica delle $\dot{q}$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n g_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$$

con le g_{hk} funzioni delle q . Supporremo, inoltre, che la sollecitazione attiva sia posizionale.

Le equazioni differenziali del moto possono assumere la forma⁽³⁾ :

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + \sum_{v=1}^m \lambda_v a_{rv} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

ove le λ_v denotano m opportuni moltiplicatori. Le (5), associate alle m equazioni dei vincoli di pura mobilità, forniscono un sistema

⁽³⁾ Cfr. per es. H. GOLDSTEIN - Classical Mechanics - Addison - Wesley Publ. Comp., 1957, p. 41.

di $n + m$ equazioni nelle $n + m$ funzioni incognite $q_h (h = 1, 2, \dots, n)$ e $\lambda_v (v = 1, 2, \dots, m)$. Inoltre, è possibile determinare, con sole operazioni di derivazione ed in termini finiti, le λ_v in funzione della configurazione e dell'atto di moto. Tale preventiva determinazione consente di ricondurre le equazioni del moto di un sistema anolonomo a vincoli indipendenti dal tempo alle analoghe equazioni dello stesso sistema in assenza dei vincoli di pura mobilità, purché alle forze che sollecitano il sistema si aggiungano opportune forze, note in funzione della configurazione e dell'atto di moto, ed, inoltre, si scelgano, fissate le q_h nell'istante $t=0$, i valori delle $\dot{q}_h$ in modo da soddisfare alle equazioni dei vincoli di mobilità (*).

Più specificamente, nelle ipotesi ammesse, indicando con g^{rs} il reciproco di g_{sr} nel determinante $\|g_{sr}\|$ e posto:

$$(6) \quad A_{\sigma v} = \sum_{l,r=1}^n a_{vl} a_{\sigma r} g^{lr} \quad (\sigma, v = 1, 2, \dots, m),$$

i parametri λ_v si deducono per risoluzione del sistema lineare (loc. cit. pag. 708):

$$(7) \quad \sum_{v=1}^m A_{\sigma v} \lambda_v = - \sum_{r,l=1}^n \frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_r - \sum_{r=1}^n a_{r\sigma} Q^r +$$

$$+ \sum_{r,s,t=1}^n a_{r\sigma} \left\{ \begin{matrix} s & t \\ r & \end{matrix} \right\} q_s q_t \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m)$$

ove

$$Q^r = \sum_{s=1}^n g^{rs} Q_s, \quad \left\{ \begin{matrix} s & t \\ r & \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{rl} \left(\frac{\partial g_{sl}}{\partial q_t} + \frac{\partial g_{rl}}{\partial q_s} - \frac{\partial g_{st}}{\partial q_l} \right)$$

Il determinante dei coefficienti $A_{\sigma v}$ nel sistema (7) è diverso dallo zero (loc. cit., pag. 708), sicchè il sistema è risolubile rispetto alle λ_v . Denotando con $A^{\nu\sigma}$ il reciproco di $A_{\sigma\nu}$ nel determinante

(*) Con riguardo a vincoli di tipo generale Cfr. F. DE FRANCHIS - « Vincoli e reazioni nel più generale schema lagrangiano » Rendiconti dell'Acc. Nazionale dei Lincei - Vol. XXV - 1937, pp. 704-709.

|| $A_{\sigma\nu}$ || si perviene alle :

$$(8) \quad \lambda_\nu = \sum_{\sigma=1}^m A^{\sigma\nu} \sum_{r,l=1}^n \left(-\frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial q_l} + \sum_{t=1}^n a_{lt\sigma} \left\{ \begin{matrix} r & l \\ & t \end{matrix} \right\} \right) \dot{q}_l - \\ - \sum_{\sigma=1}^m \sum_{r=1}^n A^{\sigma\nu} a_{r\sigma} Q^r \quad (\nu = 1, 2, \dots, m).$$

3. - Vogliamo ricercare le condizioni che debbono essere verificate perchè il sistema (5) possa ridursi alla forma (2)

Ponendo :

$$U^*(q/\dot{q}/t) = \mathfrak{L}(q/\dot{q}/t) - T,$$

in base alle (5), dovrà risultare identicamente :

$$(9) \quad \frac{\partial U^*}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U^*}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu a_{r\nu}$$

Poichè i secondi membri sono, in base alla determinazione indicata al n. 2, funzioni note delle q e delle $\dot{q}$, con ragionamento analogo a quello già svolto al n. 1, si prova che la U^* dovrà essere funzione lineare nelle $\dot{q}$, in quanto sono valide le identità $\frac{\partial^2 U^*}{\partial q_i \partial \dot{q}_i} = 0$; possiamo, quindi, porre :

$$U^* = \sum_{s=1}^n U_s(q) \dot{q}_s + U(q)$$

onde .

$$(10) \quad \mathfrak{L} = T + \sum_{s=1}^n U_s(q) \dot{q}_s + U(q)$$

In base alle (9), risulta identicamente :

$$Q_i + \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu a_{r\nu} = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial U_s}{\partial q_i} - \frac{\partial U_s}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_s + \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

cosicchè, per le (8), deve aversi:

$$Q_r + \sum_{\nu, \sigma=1}^m a_{r\nu} A^{\sigma\nu} \sum_{l, r=1}^n \left(-\frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial q_l} + \sum_{t=1}^n a_{t\sigma} \left\{ \begin{matrix} r & l \\ t & t \end{matrix} \right\} \right) \dot{q}_l \dot{q}_r -$$

$$- \sum_{\nu, \sigma=1}^m a_{r\nu} \sum_{s=1}^n a_{s\sigma} A^{\sigma\nu} Q^s = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial U_s}{\partial q_r} - \frac{\partial U_r}{\partial q_s} \right) \dot{q}_s + \frac{\partial U}{\partial q_r}.$$

Tenendo conto che le Q , A , a , U sono funzioni delle q , identificando i coefficienti con riguardo alle $\dot{q}$, si perviene alle:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\nu, \sigma=1}^m \sum_{r=1}^n A^{\sigma\nu} a_{r\nu} \left(\frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial q_l} - \sum_{t=1}^n a_{t\sigma} \left\{ \begin{matrix} r & l \\ t & t \end{matrix} \right\} \right) = 0 \quad (l = 1, \dots, n) \\ \frac{\partial U_s}{\partial q_r} - \frac{\partial U_r}{\partial q_s} = 0 \quad (r, s = 1, \dots, n) \\ Q_r - \sum_{\nu, \sigma=1}^m \sum_{s=1}^n A^{\sigma\nu} a_{r\nu} a_{s\sigma} Q^s = \frac{\partial U}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

Si conclude che, perchè il sistema anolonomo ammetta una funzione lagrangiana, i vincoli ed i coefficienti della forma quadratica che definisce la T debbono soddisfare alle prime n delle (11); in queste condizioni, la $\mathcal{L}$ ha la forma (10) in cui le U_r sono funzioni delle q tali che la forma differenziale lineare $\sum_{s=1}^n U_s dq_s$ sia un differenziale esatto; la U va calcolata in base alle ultime n delle (11). Per questa determinazione la forma differenziale ottenuta moltiplicando i primi membri per $dq_1, \dots, dq_n$ e sommando deve essere un differenziale esatto.

4. - Consideriamo il caso, particolarmente semplice, di un punto libero, di massa unitaria, soggetto ad un solo vincolo di pura mobilità:

$$\sum_{h=1}^3 a_{h1} \dot{q}_h = 0$$

ove le q_h denotano le coordinate cartesiane.

La forza viva T ha la forma:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 q_h^2$$

onde

$$g_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = k \\ 0 & \text{per } i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

Ne seguono le identità;

$$\begin{Bmatrix} r & s \\ t \end{Bmatrix} = 0$$

Le condizioni cui debbono soddisfare le a_{hi} , ossia le prime delle (11), sono:

$$(11') \quad \sum_{r=1}^3 A^{11} a_{r1} \frac{\partial a_{r1}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ora

$$A_{11} = \sum_{l,r=1}^3 a_{l1} a_{r1} \delta_{rl} = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2$$

e quindi:

$$A^{11} = \frac{1}{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2}$$

Le (11'), in conseguenza, assumono l'aspetto:

$$\frac{1}{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2} \sum_{r=1}^3 a_{r1} \frac{\partial a_{r1}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{r=1}^3 a_{r1}^2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Deve, quindi, essere

$$\sum_{r=1}^3 a_{r1}^2 = a^2 = \text{costante}.$$

Questa condizione è, per es., verificata se si sceglie, in particolare :

$$(12) \quad a_{11} = f(q_1)q_2, \quad a_{21} = \sqrt{a^2 - f^2(q_1)q_2^2}, \quad a_{31} = 0$$

con $f(q_1)$ funzione arbitraria di q_1 . Il vincolo anolonomo è, quindi, espresso dalla relazione :

$$q_2 f(q_1) \dot{q}_1 + \sqrt{a^2 - f^2(q_1)q_2^2} \dot{q}_2 = 0$$

Trattasi di un effettivo vincolo di pura mobilità in quanto la forma differenziale lineare :

$$q_2 f(q_1) dq_1 + \sqrt{a^2 - f^2(q_1)q_2^2} dq_2$$

non è un differenziale esatto. Invero ;

$$\frac{\partial q_2 f(q_1)}{\partial q_2} = f(q_1), \quad \frac{\partial \sqrt{a^2 - f^2(q_1)q_2^2}}{\partial q_1} = \frac{-f_1(q_1) \cdot f(q_1)q_2^2}{\sqrt{a^2 - f^2(q_1)q_2^2}}$$

Nelle condizioni poste, il sistema ammette la funzione lagrangiana del tipo :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 \dot{q}_h^2 + \sum_{s=1}^3 U_s \dot{q}_s + U$$

ove U_1, U_2, U_3 sono i coefficienti dei differenziali $dq_l (l=1, 2, 3)$ in una forma lineare che sia un differenziale esatto.

La U deve soddisfare alle:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_1} &= Q_1 - \frac{1}{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2} (a_{11}^2 Q_1 + a_{11} a_{21} Q_2 + a_{11} a_{31} Q_3) \\ \frac{\partial U}{\partial q_2} &= Q_2 - \frac{1}{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2} (a_{11} a_{21} Q_1 + a_{21}^2 Q_2 + a_{21} a_{31} Q_3) \\ \frac{\partial U}{\partial q_3} &= Q_3 - \frac{1}{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2} (a_{11} a_{31} Q_1 + a_{21} a_{31} Q_2 + a_{31}^2 Q_3) \end{aligned} \right.$$

ove Q_1, Q_2, Q_3 sono le componenti cartesiane della forza attiva.

In base alle (12) debbono, quindi, essere soddisfatte le relazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_1} &= Q_1 - \frac{1}{a^2} [q_2^2 f'(q_1) Q_1 + q_2 f(q_1) \sqrt{a^2 - f^2(q_1) q_2^2} Q_2] \\ \frac{\partial U}{\partial q_2} &= Q_2 - \frac{1}{a^2} [q_2 f(q_1) \sqrt{a^2 - f^2(q_1) q_2^2} Q_1 + (a^2 - f^2(q_1) q_2^2) Q_2] \\ \frac{\partial U}{\partial q_3} &= Q_3 \end{aligned} \right.$$

Dalla terza si trae:

$$U = \int Q_3 dq_3 + H(q_1, q_2)$$

con H funzione arbitraria di q_1 e q_2 . La H si potrà determinare dalle prime due se, per es., $f(q_1)$ si sceglie in modo che la forma differenziale lineare ottenuta moltiplicando i secondi membri di tali equazioni rispettivamente per dq_1 e dq_2 e sommando sia un differenziale esatto.